

SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE

DE BRUXELLES

PREMIÈRE PARTIE

DOCUMENTS ET COMPTES RENDUS

STATUTS

ARTICLE PREMIER. — Il est constitué à Bruxelles une association qui prend le nom de Société scientifique de Bruxelles, avec la devise : " *Nulla unquam inter fidem et rationem vera dissensio esse potest* " (*).

ART. 2. — Cette association se propose de favoriser, conformément à l'esprit de sa devise, l'avancement et la diffusion des sciences.

ART. 3. — Elle publiera annuellement le compte rendu de ses réunions, les travaux présentés par ses membres, et des rapports sommaires sur les progrès accomplis dans chaque branche.

Elle tâchera de rendre possible la publication d'une revue destinée à la vulgarisation (**).

ART. 4. — Elle se compose d'un nombre illimité de membres, et fait appel à tous ceux qui reconnaissent l'importance d'une culture scientifique sérieuse pour le bien de la société.

ART. 5. — Elle est dirigée par un *Conseil* de vingt membres, élus annuellement dans son sein. Le Président, les Vice-Présidents, le Secrétaire et le Trésorier font partie de ce Conseil. Parmi les membres du Bureau, le Secrétaire et le Trésorler sont seuls rééligibles.

ART. 6. — Pour être admis dans l'Association, il faut être présenté par deux membres. La demande, signée par ceux-ci, est

---

(*) Const. de Fid. cath. c. IV.

(**) Depuis le mois de janvier 1877, cette revue paraît, par livraisons trimestrielles, sous le titre de *Revue des Questions scientifiques*. Elle forme chaque année deux volumes in-8° de 700 pages. Prix de l'abonnement : 20 francs par an pour tous les pays de l'Union postale. Les membres de la Société scientifique ont droit à une réduction de 25 pour cent.

adressée au Président, qui la soumet au Conseil. L'admission n'est prononcée qu'à la majorité des deux tiers des voix.

L'exclusion d'un membre ne pourra être prononcée que pour des motifs graves et à la majorité des deux tiers des membres du Conseil.

ART. 7. — Les membres qui souscrivent, à une époque quelconque, une ou plusieurs parts du capital social, sont *membres fondateurs*. Ces parts sont de 500 francs. Les *membres ordinaires* versent une cotisation annuelle de 15 francs, qui peut toujours être rachetée par une somme de 150 francs, versée une fois pour toutes.

Le Conseil peut nommer des *membres honoraires* parmi les savants étrangers à la Belgique.

Les noms des membres fondateurs figurent en tête des listes par ordre d'inscription, et ces membres reçoivent autant d'exemplaires des publications annuelles qu'ils ont souscrit de parts du capital social. Les membres ordinaires et les membres honoraires reçoivent un exemplaire de ces publications.

Tous les membres ont le même droit de vote dans les assemblées générales.

ART. 8. — Chaque année il y a trois sessions. La principale se tiendra dans la quinzaine qui suit la fête de Pâques, et pourra durer quatre jours. Le public y sera admis sur la présentation de cartes. On y lit les rapports annuels, et l'on y nomme le Bureau et le Conseil pour l'année suivante.

Les deux autres sessions se tiendront en octobre et en janvier. Elles pourront durer deux jours, et auront pour objet principal de préparer la session de Pâques.

ART. 9. — Lorsqu'une résolution, prise par l'assemblée générale, n'aura pas été délibérée en présence du tiers des membres de la Société, le Conseil aura la faculté d'ajourner la décision jusqu'à la prochaine session de Pâques. La décision sera alors définitive, quel que soit le nombre des membres présents.

ART. 10. — La Société ne permettra jamais qu'il se produise dans son sein aucune attaque, même courtoise, à la religion catholique ou à la philosophie spiritualiste et religieuse.

ART. 11. — Dans les sessions, la Société se répartit en cinq sections : I. *Sciences mathématiques*. II. *Sciences physiques*. III. *Sciences naturelles*. IV. *Sciences médicales*. V. *Sciences économiques*.

Tout membre de l'Association choisit chaque année la section à laquelle il désire appartenir. Il a le droit de prendre part aux travaux des autres sections avec voix consultative.

Art. 12. — La session comprend des séances générales et des séances de section.

Art. 13. — Le Conseil représente l'Association. Il a tout pouvoir pour gérer et administrer les affaires sociales. Il place en rentes sur l'État ou en valeurs garanties par l'État les fonds qui constituent le capital social.

Il fait tous les règlements d'ordre intérieur que peut nécessiter l'exécution des statuts, sauf le droit de contrôle de l'assemblée générale.

Il délibère, sauf les cas prévus à l'article 6, à la majorité des membres présents. Néanmoins, aucune résolution ne sera valable qu'autant qu'elle aura été délibérée en présence du tiers au moins des membres du Conseil dûment convoqué.

Art. 14. — Tous les actes, reçus et décharges sont signés par le Trésorier et un membre du Conseil, délégué à cet effet.

Art. 15. — Le Conseil dresse annuellement le budget des dépenses de l'Association et présente dans la session de Pâques le compte détaillé des recettes et dépenses de l'exercice écoulé. L'approbation de ces comptes, après examen de l'assemblée, lui donne décharge.

Art. 16. — Les statuts ne pourront être modifiés que sur la proposition du Conseil, à la majorité des deux tiers des membres et dans l'Assemblée générale de la session de Pâques.

Les modifications ne pourront être soumises au vote qu'après avoir été proposées dans une des sessions précédentes. Elles devront figurer à l'ordre du jour dans les convocations adressées à tous les membres de la Société.

Art. 17. — La devise et l'article 10 ne pourront jamais être modifiés.

En cas de dissolution, l'Assemblée générale, convoquée extraordinairement, statuera sur la destination des biens appartenant à l'Association. Cette destination devra être conforme au but indiqué dans l'article 2.

RÈGLEMENT

ARRÊTÉ PAR LE CONSEIL POUR L'ENCOURAGEMENT DES RECHERCHES SCIENTIFIQUES

1. — Le Conseil de la Société scientifique de Bruxelles a résolu d'instituer des concours et d'accorder des subsides pour encourager les recherches scientifiques.

2. — A cet objet seront consacrés :

1° Le revenu du bénéfice acquis à la Société jusqu'à la session de Pâques 1879 ;

2° La moitié du bénéfice acquis pendant l'exercice qui précède l'exercice courant.

3. — Chaque année, l'une des sections désignera une question à mettre au concours. L'ordre dans lequel les sections feront cette désignation sera déterminé par le sort. Toute question, pour être posée, devra être approuvée par le Conseil, qui donnera aux questions la publicité convenable.

4. — Les questions auxquelles il n'aura pas été répondu d'une manière satisfaisante resteront au concours. Le Conseil pourra cependant inviter les sections compétentes à les remplacer par d'autres.

5. — Aucun prix ne pourra être inférieur à 500 francs. Une médaille sera en outre remise à l'auteur du mémoire couronné.

6. — Ces concours ne seront ouverts qu'aux membres de la Société.

7. — Ne sont admis que les ouvrages et les planches manuscrits.

8. — Le choix de la langue dans laquelle seront rédigés les mémoires est libre. Ils seront, s'il y a lieu, traduits aux frais de la Société ; la publication n'aura lieu qu'en français.

9. — Les auteurs ne mettront pas leur nom à ces mémoires, mais seulement une devise qu'ils répéteront dans un billet cacheté renfermant leur nom et leur adresse.

10. — Les jurys des concours seront composés de trois membres présentés par la section compétente et nommés par le Conseil.

11. — Les prix seront décernés par le Conseil sur le rapport des jurys.

12. — Toute décision du Conseil ou des sections relative aux prix sera prise au scrutin secret et à la majorité absolue des suffrages.

13. — La Société n'a l'obligation de publier aucun travail couronné ; les manuscrits de tous les travaux présentés au concours restent la propriété de la Société. En cas de publication, cent exemplaires seront remis gratuitement aux auteurs.

14. — Les résultats des concours seront proclamés et les médailles remises dans l'une des assemblées générales de la session de Pâques. Les rapports des jurys devront être remis au Conseil six semaines avant cette session. Le 1er octobre de l'année qui suit celle où a été proposée la question est la date de rigueur pour l'envoi des mémoires au secrétariat.

15. — Pour être admis à demander un subside, il faut être membre de la Société depuis un an au moins.

16. — Le membre qui demandera un subside devra faire connaître par écrit le but précis de ses travaux, au moins d'une manière générale ; il sera tenu, dans les six mois de l'allocation du subside, de présenter au Conseil un rapport écrit sur les résultats de ses recherches, quel qu'en ait été le succès.

17. — Le Conseil, après avoir pris connaissance des diverses demandes de subsides, à l'effet d'en apprécier l'importance relative, statuera au scrutin secret.

18. — Les résultats des recherches favorisées par les subsides de la Société devront lui être présentés, pour être publiés dans ses ANNALES s'il y a lieu.

QUESTIONS DE CONCOURS PROPOSÉES EN 1900

1° *Trouver les caractères distinctifs des maxima ou minima d'une fonction de trois variables* $f(x, y, z)$, *dans le cas où l'ensemble des termes du second ordre, dans le développement de* $f(a+h, b+k, c+l)-f(a, b, c)$ *peut s'annuler sans changer de signe.*

2° *On demande des recherches nouvelles sur les carbures métalliques, spécialement sur les carbures doubles.*

3° *Préciser par de nouvelles recherches l'influence des variations du milieu sur le polymorphisme des champignons inférieurs.*

4° *Des moyens de remédier en Belgique à l'émigration croissante des ouvriers des campagnes vers les villes et les centres industriels.*

LETTRE

DE

S. S. LE PAPE LÉON XIII

AU PRÉSIDENT ET AUX MEMBRES
DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES

Dilectis Filiis Praesidi ac Membris Societatis Scientificae Bruxellis constitutae

LEO PP. XIII.

DILECTI FILII, SALUTEM ET APOSTOLICAM BENEDICTIONEM.

Gratae Nobis advenerunt litterae vestrae una cum Annalibus et Quaestionibus a vobis editis, quas in obsequentissimum erga Nos et Apostolicam Sedem pietatis testimonium obtulistis. Libenter sane agnovimus Societatem vestram quae a scientiis sibi nomen fecit, et quae tribus tantum abhinc annis laetis auspiciis ac Iesu Christi Vicarii benedictione Bruxellis constituta est, magnum iam incrementum cepisse, et uberes fructus polliceri. Profecto cum infensissimi relligionis ac veritatis hostes nunquam desistant, imo magis magisque studeant dissidium rationem inter ac fidem propugnare, opportunum est ut praestantes scientia ac pietate viri ubique exurgant, qui Ecclesiae doctrinis ac documentis ex animo obsequentes, in id contendant, ut demonstrent ***nullam unquam inter fidem et rationem veram dissensionem esse posse;*** quemadmodum Sacrosancta Vaticana Synodus, constantem Ecclesiae et Sanctorum Patrum doctrinam affirmans, declaravit Constitutione IV^a de fide catholica. Quapropter gratulamur quod Societas vestra hunc primo finem sibi proposuerit, itemque in statutis legem dederit, ne quid a sociis contra sanam christianae

philosophiae doctrinam committatur; simulque omnes hortamur ut nunquam de egregio eiusmodi laudis tramite deflectant, atque ut toto animi nisu praestitutum Societatis finem praeclaris exemplis ac scriptis editis continuo assequi adnitantur. Deum autem Optimum Maximum precamur, ut vos omnes coelestibus praesidiis confirmet ac muniat; quorum auspicem et Nostrae in vos benevolentiae pignus, Apostolicam benedictionem vobis, dilecti filii, et Societati vestrae ex animo impertimur.

Datum Romae apud S. Petrum die 15 Ianuarii 1879, Pontificatus Nostri Anno Primo.

LEO PP. XIII.

A nos chers fils le Président et les Membres de la Société scientifique de Bruxelles.

LÉON XIII, PAPE.

CHERS FILS, SALUT ET BÉNÉDICTION APOSTOLIQUE.

Votre lettre Nous a été agréable, ainsi que les Annales et les Questions publiées par vous et offertes en témoignage de votre piété respectueuse envers Nous et le Siège apostolique. Nous avons vu réellement avec plaisir que votre Société, qui a adopté le nom de Société scientifique, et s'est constituée à Bruxelles, depuis trois ans seulement, sous d'heureux auspices avec la bénédiction du Vicaire de Jésus-Christ, a déjà pris un grand développement et promet des fruits abondants. Certes, puisque les ennemis acharnés de la religion et de la vérité ne se lassent point et s'obstinent même de plus en plus à proclamer l'opposition entre la raison et la foi, il est opportun que partout surgissent des hommes distingués par la science et la piété, qui, attachés de cœur aux doctrines et aux enseignements de l'Église, s'appliquent à démontrer *qu'il ne peut jamais exister de désaccord réel entre la foi et la raison*, comme l'a déclaré dans la Constitution IV *de fide catholica*, le saint concile du Vatican affirmant la doctrine constante de l'Église et des saints Pères. C'est pourquoi

Nous félicitons votre Société de ce qu'elle s'est d'abord proposé cette fin, et aussi de ce qu'elle a mis dans les statuts un article défendant à ses membres toute attaque aux saines doctrines de la philosophie chrétienne; et en même temps Nous les exhortons tous à ne jamais s'écarter de la voie excellente qui leur vaut un tel éloge, et à poursuivre continuellement de tout l'effort de leur esprit l'objet assigné à la Société, par d'éclatants exemples et par leurs publications. Nous prions Dieu très bon et très grand, qu'il vous soutienne tous et vous fortifie du céleste secours : en présage duquel, et comme gage de Notre bienveillance envers vous, Nous accordons du fond du cœur à vous, chers fils, et à votre Société la bénédiction apostolique.

Donné à Rome, à Saint-Pierre, le 15 janvier 1879, l'an 1 de notre Pontificat.

LÉON XIII, PAPE.

LISTES

DES

MEMBRES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES

ANNÉE 1901

Liste des membres fondateurs

S. É. le cardinal DECHAMPS (1), archevêque de. . Malines.
François DE CANNART D'HAMALE (1) . . . . . Malines.
Charles DESSAIN . . . . Malines.
Jules VAN HAVRE (1) . . . . Anvers.
Le chanoine MAES (1) . . . . Bruges.
Le chanoine DE LEYN . . . . Bruges.
LEIRENS-ELIAERT . . . . Alost.
Frank GILLIS (1) . . . . Bruxelles.
Joseph SAEY . . . . Bruxelles.
Le Cher DE SCHOUTHEETE DE TERVARENT . . . . Saint-Nicolas.
Le Collège SAINT-MICHEL . . . . Bruxelles.
Le Collège NOTRE-DAME DE LA PAIX . . . . . Namur.
Le Duc D'URSEL, sénateur (1) . . . . Bruxelles.
Le Pce Gustave DE CROY (1). . . . . Le Rœulx.
Le Cte DE T'SERCLAES (1) . . . . Gand.
Auguste DUMONT DE CHASSART (1) . . . . . . Mellet (Hainaut).
Charles HERMITE, membre de l'Institut. . . . Paris
L'École libre de l'IMMACULÉE CONCEPTION . . . Vaugirard-Paris.
L'École libre SAINTE-GENEVIÈVE . . . . . . Paris.
Le Collège SAINT-SERVAIS . . . . Liége.
Le Cte DE BERGEYCK . . . . Beveren-Waes.
L'Institut SAINT-IGNACE . . . . Anvers.

(1) Décédé.

Philippe Gilbert (1), correspondant de l'Institut .	Louvain,
Le R. P. Provincial de la Compagnie de Jésus en Belgique	Bruxelles.
Le Collège de la Compagnie de Jésus.	Louvain.
Le Collège Saint-Joseph	Alost.
Le chanoine de Wouters (1)	Braine-le-Comte.
Antoine d'Abbadie (1), membre de l'Institut . .	Paris.
S. É. le cardinal Haynald (1), archevêque de Kalocsa et Bàcs	Kalocsa(Hongrie)
S. É. le cardinal Séraphin Vannutelli	Rome.
S. G. Mgr Du Roussaux (1), évêque de	Tournai.
S. É. le cardinal Goossens, archevêque de. . .	Malines.
R. Bedel	Aix.
S. G. Mgr Belin (1), évêque de	Namur.
Eugène Pecher	Bruxelles.
S. Exc. Mgr Ferrata, archevêque de Thessalonique, nonce apostolique	Paris.
S. É. le cardinal Nava di Bontifé	Catane.
S. Exc. Mgr Rinaldi, nonce apostolique . . .	Madrid.
S. Exc. Mgr Granito di Belmonte, nonce apostolique	Bruxelles.
E. Goedseels	Uccle.

Liste des membres honoraires

Antoine d'Abbadie (1), membre de l'Institut. . .	Paris.
Amagat, correspondant de l'Institut, répétiteur à l'école polytechnique	Paris.
Mgr Baunard, recteur de l'Université catholique.	Lille.
Joachim Barrande (1)	Prague.
A. Béchamp	Lille.
Béchaux, correspondant de l'Institut.	Paris.

(1) Décédé.

Le Prince Boncompagni (¹) de l'Académie des Nuovi Lincei . . . . Rome.
Boussinesq, membre de l'Institut. . . . . . Paris.
L. de Bussy, membre de l'Institut . . . . . Paris.
Desplats . . . . Lille.
Fabre, J.-H. . . . . Sérignan.
Le docteur Foerster . . . . Aix-la-Chapelle.
Haton de la Goupillière, membre de l'Institut . Paris.
V. Hautefeuille, membre de l'Institut . . . . Paris.
Dr Heis (¹) . . . . Münster.
Charles Hermite, membre de l'Institut . . . . Paris.
Le vice-amiral de Jonquières, membre de l'Institut Paris.
Camille Jordan, membre de l'Institut . . . . Paris.
A. de Lapparent, membre de l'Institut . . . . Paris.
G. Lemoine, membre de l'Institut. . . . . . Paris.
F. Le Play (¹). . . . . Paris.
Le général Newton . . . . New-York.
Louis Pasteur (¹), membre de l'Institut . . . . Paris.
R. P. Perry, S. J. (¹) de la Société royale de Londres. . . . . Stonyhurst.
Victor Puiseux (¹), membre de l'Institut . . . Paris.
A. Barré de Saint-Venant (¹), membre de l'Institut . . . . Paris.
R. P. Secchi, S. J. (¹) de l'Académie des Nuovi Lincei . . . . Rome.
Paul Tannery. . . . . Pantin.
Aimé Witz . . . . Lille.
Wolf, membre de l'Institut . . . . Paris.

(¹) Décédé.

Liste générale des membres de la Société scientifique de Bruxelles

---

ABBELOOS (Mgr), docteur en théologie, recteur émérite de l'Université, 3, montagne du Collège. — Louvain.
D'ACY (E.), 40, boulevard Malesherbes. — Paris.
ADAN DE YARZA (Ramon), ingénieur des mines. — Lequeitio (Vizcaya — Espagne).
ALEXIS-M. G. (Frère), 27, rue Oudinot. — Paris.
ALLARD (François), industriel. — Chatelineau.
AMAGAT, correspondant de l'Institut, répétiteur à l'École polytechnique, 19, avenue d'Orléans. — Paris.
ANDRÉ (J.-B.), inspecteur général au ministère de l'agriculture. — Héverlé.
D'ANNOUX (Cte H.), 74, boulevard Alexandre Martin. — Orléans.
ARCELIN (Adrien), secrétaire perpétuel de l'Académie de Mâcon, 12, quai des Messageries. — Châlon-sur-Saône (Saône-et-Loire — France).
ARDUIN (abbé Alexis), à Aiguebelle, par Grignan (Drôme — France).
BAIVY (Dr), place Saint-Aubin. — Namur.
BALBAS (Thomas), ingénieur des mines. — San-Sébastian (Espagne).
DI BARTOLO (Canonico Salvatore), Ruggiero Settimo, 71. — Palermo (Sicile).
BAUNARD (Mgr), recteur de l'université catholique, 60, boulevard Vauban. — Lille (Nord — France).
BAYET (Adrien), 33, Nouveau Marché aux Grains. — Bruxelles.
BEAUVOIS (Eug.). — Corberon (Côte-d'Or — France).
BÉCHAUX, correspondant de l'Institut, 56, rue d'Assas. — Paris.
BEDEL (abbé R.), prêtre de St-Sulpice, directeur au Grand-Séminaire. — Aix (Bouches-du-Rhône — France).
BELPAIRE (Frédéric), ingénieur, 48, avenue du Margrave. — Anvers.

de Bergeyck (Cte), château de Beveren-Waes (Flandre orientale).
Berleur (Adolphe), ingénieur, 17, rue Saint-Laurent. — Liége.
Berlingin (Melchior), directeur des laminoirs de la Vieille-Montagne. — Peuchot par Viviers (Aveyron — France).
Berryer (Paul), avocat, 3, rue Fabry. — Liége.
Bertrand (Léon), 9, rue Crespel. — Bruxelles.
Béthune (Mgr Félix), 40, rue d'Argent. — Bruges.
Bibot (D^{r}), Place Léopold. — Namur.
Bleuset, S. J. (R. P.), collège Saint-François-Xavier, rue de Rome. — Verviers.
Blondel (Alfred), ingénieur, 1, place du Parc. — Tournai.
de la Boëssière-Thiennes (Mis), 23, rue aux Laines. — Bruxelles; ou château de Lombise par Lens (Hainaut).
Bolsius, S. J. (R. P. Henri), Kerkstraat, A. 14. — Oudenbosch (Pays-Bas).
Borginon (Dr Paul), 58, rue Dupont. — Bruxelles.
Boulay (chan.), professeur aux Facultés catholiques, 5, rue Mercier. — Lille (Nord — France).
Bouqué F., professeur à l'Université, 3, rue des Selliers. — Gand.
Bouquillon (abbé Th.), Catholic University of America. — Washington (Brookland, D. C., États-Unis d'Amérique).
Bourgeat (chan.), professeur aux Facultés catholiques, 15, rue Charles de Muyssart. — Lille (Nord — France).
Boussinesq, membre de l'Institut, 73, rue Claude Bernard. — Paris.
du Bois (Paul), ingénieur des ponts et chaussées, 54, rue du Mans. Alençon (Orne — France).
van den Branden de Reeth (S. Gr. Mgr), archevêque de Tyr, 82, rue du Bruel. — Malines.
Branly (Édouard), professeur à l'Institut catholique, 21, avenue de Tourville. — Paris.
Breithof (F.), 85, rue de Bruxelles. — Louvain.
Breithof (N.), professeur à l'Université, 85, rue de Bruxelles. — Louvain.
van der Bruggen (Bon Maurice), Ministre de l'Agriculture. — Bruxelles.

Bruylants, professeur à l'Université catholique, membre de l'Académie royale de médecine, 32, rue des Récollets. — Louvain.
Buisseret (Anatole), professeur à l'École des cadets, 5, rue Bosret. — Namur.
Buisseret (Joseph), professeur à l'École normale de l'État. — Nivelles.
de Bussy (L), membre de l'Institut, inspecteur général des constructions navales, 7, rue de Jouy. — Paris.
Cabeau (abbé Charles), professeur au Collège Saint-Joseph. — Virton.
Camboué, S. J. (R. P. Paul), missionnaire apostolique. — Tananarive (Madagascar).
Cappellen (Guillaume), commissaire d'arrondissement, 4, place Marguerite. — Louvain.
Caratheodory (Costa), 101, avenue Louise. — Bruxelles.
Cartuyvels (Jules), inspecteur général au ministère de l'agriculture et des travaux publics, 215, rue de la Loi. — Bruxelles.
Casarés (Firmino), farmacia, 93, calle de San Andrés. — La Coruña (Espagne).
Chautard, doyen de la Faculté catholique des sciences de Lille, villa Saint-Marc, par Croissanville (Calvados — France).
Cicioni (M° R. Giulio Prior), professeur au Séminaire de Perugia (Italie).
Clasen (abbé B.-I.), curé-doyen d'Echternach (Grand-Duché de Luxembourg).
Cloquet (L.), professeur à l'Université, 2, rue Saint-Pierre. — Gand.
Cogels (J.-B. Henri), 181, avenue des Arts. — Anvers.
Colegio de Estudios Superiores de Deusto (R. P. J. Han. Obeso). — Bilbao (Espagne).
Collège de la Compagnie de Jésus, 11, rue des Récollets. — Louvain.
Collège Notre-Dame de la Paix, 45, rue de Bruxelles. — Namur.
Collège Saint-Joseph, 13, rue de Bruxelles. — Alost.
Collège Saint-Michel, 14, rue des Ursulines. — Bruxelles.
Collège Saint-Servais, 88, rue Saint-Gilles. — Liége.
Collège de Bellevue. — Dinant.

Colombier, 14, rue Lhomond. — Paris.
Cooreman, 1, place du Marais. — Gand.
Coppieters de Stockhove (abbé Ch.), directeur des dames de l'Instruction chrétienne. — Bruges.
Courtoy (Dr), place de la Monnaie. — Namur.
Cousin (L.), ingénieur, 10, rue Simonis. — Bruxelles.
Cousot (abbé), aumônier de l'École des cadets. — Namur.
Cousot (Dr Georges), membre de la Chambre des Représentants. — Dinant.
Craninckx (Bon Oscar), 51, rue de la Loi. — Bruxelles.
de Croy (Pce Juste), 63, rue de la Loi. — Bruxelles; ou le Rœulx.
Cuylits (Jean), docteur en médecine, 44, boulevard de Waterloo. — Bruxelles.
Dabert (S. Gr. Mgr), évêque de Périgueux et Sarlat.
Dallemagne (G.), 340, rue Saint-Gilles. — Liége
Daniels (Dr Fr.), professeur à l'Université catholique de Fribourg (Suisse).
Dansette (Gaston), 81, chaussée de Charleroi. Saint-Gilles (Bruxelles).
Daubresse (Paul), ingénieur, 42, rue des Orphelins. — Louvain.
Davignon (Julien), 41, avenue de la Toison-d'Or. — Bruxelles.
De Baets (Herman), 11, rue des Boutiques. — Gand.
De Baets (chan. Maurice), professeur à l'Université de Louvain. — Lubbeek.
Debaisieux, professeur à l'Université, 14, rue Léopold. — Louvain.
De Becker (chan. Jules), professeur à l'Université, 112, rue de Namur. — Louvain.
De Bien (Fernand), rue du Trône, 150. — Bruxelles.
De Bloo (Julien), ingénieur, 89, boulevard Frère-Orban. — Gand.
De Brouwer (chan.), curé-doyen. — Ypres.
De Bruyn (Jules), 175, chaussée de Wavre. — Bruxelles.
De Buck (Dr D.), 7, rue des Boutiques. — Gand.
De Ceuster, S. J. (R. P.), Collège Saint-Michel, 14, rue des Ursulines. — Bruxelles.
Dechevrens, S. J. (R. P. Marc), directeur de l'Observatoire du Collège Saint-Louis. — Jersey (Iles de la Manche).
Degive (A.), membre de l'Académie royale de médecine, directeur de l'École vétérinaire de l'État, bouvelard d'Anderlecht. — Cureghem-lez-Bruxelles.

De Greeff, S. J. (R. P. Henri), Collège N.-D. de la Paix, rue de Bruxelles. — Namur.
De Jaer (Camille), avocat, 56, boulevard de Waterloo. — Bruxelles.
De Jaer (Jules), ingénieur des mines, Vieux-Marché-aux-Bêtes. — Mons.
Delacre (Maurice), membre correspondant de l'Académie royale de Belgique, professeur à l'Université, 16, boulevard du Fort. — Gand.
Delaire (A.), secrétaire général de la Société d'économie sociale, 238, boulevard Saint-Germain. — Paris.
Delannoy, conservateur des étalons des poids et mesures, 14, rue du Cornet. — Bruxelles.
De Lantsheere (Dr J.), oculiste, 203, rue Royale. — Bruxelles.
De Lantsheere (Léon), professeur à l'Université de Louvain, membre de la Chambre des Représentants, 69, rue du Commerce. — Bruxelles.
Delattre, S. J. (R. P.), 11, rue des Récollets. — Louvain.
Delaunois (Dr G.), à Bon-Secours, par Péruwelz (Hainaut).
Delcroix (Dr A.), 18, chaussée de Louvain. — Bruxelles.
Delemer, 24, rue Voltaire. — Lille (Nord — France).
Delétrez (Dr A.), 5, rue de la Charité. — Bruxelles.
De Leyn (chan. A.), 52, rue du Marécage. — Bruges.
Delvigne (chan. Adolphe), curé de Saint-Josse-ten-Noode, 18, rue de la Pacification. — Bruxelles.
Demanet (chan.), docteur en sciences physiques et mathématiques, professeur à l'Université, Collège du Saint-Esprit. — Louvain.
De Moor (Dr), médecin de l'Hospice Guislain, 57, rue des Tilleuls. — Gand.
De Munnynck, O. P. (R. P.), au couvent des R. P. Dominicains, rue Juste-Lipse. — Louvain.
De Muynck (abbé), professeur à l'Université, Collège du Pape. — Louvain.
Denys (Dr J.), professeur à l'Université, Institut bactériologique. — Louvain.
De Preter (Herman), ingénieur, 59, rue du Marais. — Bruxelles.
Deschamps, S. J. (R. P. Alfred), docteur en sciences naturelles, ancienne abbaye. — Tronchiennes.

Deschamps (Fernand), docteur en droit, 13, rue des Fabriques. — Bruxelles.

De Smedt, S. J. (R. P. Charles), président de la Société des Bollandistes, correspondant de l'Institut, 14, rue des Ursulines. — Bruxelles.

Desplats (docteur), professeur aux Facultés catholiques, 56, boulevard Vauban. — Lille (Nord — France).

Dessain (Charles), libraire-éditeur, rue de la Blanchisserie. — Malines.

De Tilly (général J.), de l'Académie royale de Belgique, 162, rue Masui. — Bruxelles.

Dewalque (François), professeur à l'Université, 26, rue des Joyeuses-Entrées. — Louvain.

Dewalque (Gustave), professeur à l'Université, membre de l'Académie royale de Belgique, 17, rue de la Paix. — Liége.

D'Hondt (Frédéric), directeur du Laboratoire communal. — Courtrai.

Dierckx, S. J. (R. P. F.), 11, rue des Récollets. — Louvain.

de Dorlodot (chan. H.), docteur en théologie, professeur à l'Université catholique, rue de Bériot. — Louvain.

de Dorlodot (Sylvain), château de Floriffoux. — Floreffe (Namur).

Dressel, S. J. (R. P.), professeur de physique au Collège Saint-Ignace. — Fauquemont (Limbourg hollandais).

Drion (Bon Adolphe), fils, avocat. — Gosselies.

Dubois (Ernest), professeur à l'Université, 26, quai de l'École. — Gand.

Dubois (Georges), professeur à l'École supérieure de Commerce, 12, rue Mercelis. — Bruxelles.

Duchateau-Frentz (D^r), rue Joseph II. — Bruxelles.

Ducretet, 75, rue Claude Bernard. — Paris.

Dufrane (D^r), chirurgien à l'hôpital, 25, rue d'Havré. — Mons.

Dugniolle (Max), professeur à l'Université, 45, Coupure. — Gand.

Duhem (Pierre), professeur de physique à la Faculté des sciences, 18, rue de la Teste. — Bordeaux (Gironde — France).

Dumas-Primbault (Henri), ingénieur, château de la Pierre. — Cérilly (Allier — France).

Dumont (Achille), docteur en médecine, 77, chaussée de Charleroi. — Bruxelles.

DUMONT (André), professeur à l'Université, 18, rue des Joyeuses-Entrées. — Louvain.

DUPONT (Aristide), 34, rue Capouillet. — Bruxelles.

DUQUENNE (Dr Louis), 227, rue Sainte-Marguerite. — Liége.

DURANT (Henri), inspecteur général des charbonnages patronnés par la Société Générale, 3, Montagne du Parc. — Bruxelles.

DUSAUSOY (Clément), professeur à l'Université, 107, chaussée de Courtrai. — Gand.

DUSMET Y ALONZO (J.-M.), docteur en sciences naturelles, 7, plaza Santa-Cruz. — Madrid (Espagne).

DUTORDOIR (Hector), ingénieur en chef directeur du service technique provincial, 375, boulevard du Château. — Gand.

ÉCOLE LIBRE DE L'IMMACULÉE CONCEPTION. — Vaugirard-Paris.

ÉCOLE LIBRE SAINTE-GENEVIÈVE, rue des Postes. — Paris.

DE L'ESCAILLE (Jos.), ingénieur. — Hamont, par Neerpeelt (Limbourg).

EYNAUD (L.), ingénieur de la marine, directeur des constructions navales, 2 place de l'Alma. — Cherbourg (Manche — France).

FABRE (J. H.), naturaliste. — Sérignan par Vaucluse (Vaucluse — France).

FAGNART (Émile), docteur en sciences physiques et mathématiques, chargé de cours à l'Université, 7, rue Nieuwpoort. — Gand.

FAIDHERBE (Dr Alexandre), 38, rue de l'Hospice. — Roubaix (Nord — France).

DE FAVEREAU DE JENNERET (Bon), ministre des Affaires Étrangères. — Bruxelles.

FERNANDEZ SANCHEZ (José), catedrático de Historia universal en la Universidad. — Santiago (Galice — Espagne).

FERRATA (S. Exc. Mgr), nonce apostolique. — Paris.

FERRON (Eug.), commissaire du Gouvernement grand-ducal près les chemins de fer, 8, avenue de la Porte-Neuve. — Luxembourg (Grand-Duché).

FITA Y COLOMÉ, S. J. (R. P. Fidel), calle de Isabel la Católica, 12. — Madrid (Espagne).

FOLIE (F.), membre de l'Académie royale de Belgique. — Grivegnée.

FORNI (Cte Paul). Botzen (Tyrol — Autriche).

DE FOVILLE (abbé), directeur au Séminaire St-Sulpice. — Paris.

FRANCOTTE (Xavier), docteur en médecine, professeur à l'Université, 15, quai de l'Industrie. — Liége.
GANGANELLI, président du Grand Séminaire. — Caltanisetta (Sicile).
DE GARCIA DE LA VEGA (Bon Victor), docteur en droit, 37, rue du Luxembourg. — Bruxelles.
GAUTHIER-VILLARS (Albert), 55, quai des Grands Augustins. — Paris.
GAUTIER (chanoine), 21, rue Louise. — Malines.
GERARD (Ern.), ingénieur en chef, chef du cabinet du ministre des chemins de fer, 15, avenue de la Renaissance. — Bruxelles.
GILBERT (Paul), ingénieur à Heer-Agimont.
GILLARD, S. J. (R. P.), professeur au collège Saint-Servais, 88, rue St-Gilles. Liége.
GILSON, professeur à l'Université, 539, boulevard du Château. – Gand.
DE GIRARD (Raymond), professeur de géologie à l'Université, 99, rue de Lausanne. — Fribourg (Suisse).
GLORIEUX (D^r), 36, rue Jourdan. — Bruxelles.
GOEDSEELS (Edouard), administrateur-inspecteur de l'Observatoire royal de Belgique. — Uccle.
GONZALEZ Y CASTEJON, major d'État-Major, professeur de S. M. le roi d'Espagne, Real palacio. — Madrid.
GOOSSENS (S. É. le cardinal), archevêque de Malines.
GOOSSENS, S. J. (R. P. Fernand), 11, rue des Récollets. — Louvain.
GORIS (Charles), docteur en médecine, 181, rue Royale. — Bruxelles.
GRANDMONT (Alphonse), avocat. — Taormina (Sicile).
GRANITO DI BELMONTE, (S. Exc. Mgr), nonce apostolique. — Bruxelles.
GRINDA (Jesús), ingénieur des ponts et chaussées, Fuencarral, 74 y 76. — Madrid (Espagne).
DE GROSSOUVRE (A.), ingénieur en chef des mines. — Bourges (Cher — France).
GUELTON (Georges), attaché au Ministère de l'Intérieur et de l'Instruction publique, 119, rue Marie-Thérèse. — Louvain.
GUERMONPREZ (D^r), professeur aux Facultés catholiques, membre correspondant de l'Académie royale de médecine de Belgique et de la Société de chirurgie de Paris, 132, rue Nationale. — Lille (Nord — France).
HACHEZ (F.), professeur à l'Université de Louvain, 21, rue Philippe-le-Bon. — Bruxelles.

HAGEN, S. J. (R. P.). Georgetown College Observatory. — Washington D. C. (États-Unis d'Amérique).

HAHN, S. J. (R. P. Guillaume), Collège de N.-D. de la Paix, 45, rue de Bruxelles. — Namur.

HALLEUX, ingénieur des Mines, rue Joniaux, 5. — Etterbeek (Bruxelles).

HATON DE LA GOUPILLIÈRE (J.-N.), membre de l'Institut, inspecteur général des mines, directeur de l'École des mines, 60, boulevard Saint-Michel. — Paris.

HAUTEFEUILLE (V.), membre de l'Institut, 28, rue du Luxembourg. — Paris.

HAVENITH, lieutenant à l'École de guerre, 120, avenue de la Couronne. — Bruxelles.

DE LA HAYE (Auguste), major au 13e régiment de ligne, 9, boulevard de Meuse. — Jambes (Namur).

HEBBELYNCK (Mgr A.), recteur magnifique de l'Université, 28, rue Mi-Mars. — Louvain.

HELLEPUTTE (G.), membre de la Chambre des représentants, professeur à l'Université catholique. — Vlierbeek-lez-Louvain.

DE HEMPTINNE (Alexandre), 56, rue de la Vallée. — Gand.

HENRARD (Dr Étienne), 105, avenue du Midi. — Bruxelles.

HENRARD (Dr Félix), 176, boulevard du Hainaut. — Bruxelles.

HENRY (Albert), avocat, 47, rue de la Ruche. — Bruxelles.

HENRY (Louis), professeur à l'Université, membre de l'Académie royale de Belgique, 2, rue du Manège. — Louvain.

HENRY (Paul), professeur à l'Université, 11, rue des Joyeuses-Entrées. — Louvain.

HENSEVAL (Dr Maurice), 11, avenue du Vélodrome. — Ostende.

HERMITE (Charles), membre de l'Institut, 2, rue de Sorbonne. — Paris.

HERVIER (abbé Joseph), 31, grande rue de la Bourse. — Saint-Étienne (Loire — France).

HEYMANS (J. F.), docteur en sciences, professeur à l'Université, 35, boulevard de la Citadelle. — Gand.

HEYNEN (W.), membre de la Chambre des représentants. — Bertrix (Luxembourg); et 85, rue du Commerce. — Bruxelles.

HOUTARD (Bon J.). — Monceau-sur-Sambre (Hainaut).
HOUZE (Dr Oct.). — Binche.
HUMBERT, ingénieur des mines, professeur à l'École polytechnique, 16, boulevard Malesherbes. — Paris.
HUYBRECHTS (D^r Th.), 10, rue Hôtel des Monnaies. — Bruxelles.
ILLESCAS (Juan), calle de la Compania, 16. — Puebla (Mexique, viâ New-York).
INIGUEZ Y INIGUEZ (Francisco), catedrático de Astronomia en la Universidad, director del Observatorio astronomico. — Madrid (Espagne).
INSTITUT SAINT-IGNACE, 47, courte rue Neuve. — Anvers.
JACOBS (Mgr), ancien curé-doyen de Sainte-Gudule, 226, avenue de la Couronne. — Bruxelles.
JACOBS (F.), président de la Société belge d'astronomie, 21, rue des Chevaliers. — Bruxelles.
JACOPSSEN, S. J. (R. P. Raymond), 11, rue des Récollets. — Louvain.
JENNER (Ch.-J.), inspecteur général honoraire des ponts et chaussées, 23, rue Neuve. — Vannes (Morbihan — France).
DE JOANNIS, S. J. (R. P.), 15, rue Monsieur. — Paris.
JOLY (Albert), juge au tribunal de première instance, 8, rue de la Grosse-Tour. — Bruxelles.
JOLY (Léon), avocat, 54, avenue Brugmann. — Bruxelles.
DE JONCQUIÈRES, vice-amiral, membre de l'Institut, 2, avenue Bugeaud. — Paris.
JORDAN (Camille), membre de l'Institut, 48, rue de Varenne. — Paris.
JOSSART, 6, rue Lucien Namèche. — Namur.
JOURDAIN (Louis), ingénieur, 12, rue Montagne-aux-Herbes-Potagères. — Bruxelles.
KAÏSER (G.), inspecteur du travail au ministère de l'Industrie, 19, rue Charles-Martel. — Bruxelles.
KENNIS (G.), ingénieur civil, bourgmestre, 12, rue de Robiano. — Schaerbeek.
KIMUS (abbé), Collège du Saint-Esprit. — Louvain.
KIRSCH (R. P. Alexandre-M.), C. S. C. — Notre-Dame (Indiana — États-Unis).
KIRSCH (Mgr J.-P.), professeur à l'Université. — Fribourg (Suisse).
DE KIRWAN (Charles), ancien inspecteur des forêts, Villa Dalmassière, par Voiron (Isère, France).

KURTH (Godefroid), membre de l'Académie royale de Belgique, professeur à l'Université, 6, rue Rouvroy. — Liége.

LAFLAMME (Mgr), Université de Laval. — Québec (Canada).

LAGASSE-DE LOCHT (Charles), ingénieur en chef, directeur des ponts et chaussées, membre du Conseil supérieur du Travail, Président de la Commission Royale des Monuments, 167, chaussée de Wavre. — Bruxelles.

LAHOUSSE (Dr), professeur à l'Université, 27, Coupure. — Gand.

LAMARCHE (Émile), 81, rue Louvrex. — Liége.

LAMBERT (Camille), ingénieur en chef des chemins de fer de l'État. — Woluwe-Saint-Lambert.

LAMBIOTTE (Omer), ingénieur de charbonnages. — Anderlues.

LAMBIOTTE (Victor), ingénieur, directeur-gérant aux charbonnages d'Oignies-Aiseau, par Tamines (Namur).

LAMBOT (Oscar), professeur à l'Athénée royal, 21, rue Saint-Jean. — Arlon.

LAMBRECHTS (Hector), 103, avenue de la Couronne. — Bruxelles.

LAMINNE (Chan. Jacques), supérieur du petit séminaire de Saint-Trond.

LAMY (Mgr), membre de l'Académie royale de Belgique, professeur à l'Université catholique, 149, rue des Moutons. — Louvain.

DE LAPPARENT (A.), membre de l'Institut, membre correspondant de la Société géologique de Londres, associé de l'Académie de Belgique, professeur à l'Institut catholique, 3, rue de Tilsitt. — Paris.

LARUELLE (Dr), 22, rue du Congrès. — Bruxelles.

LEBOUTEUX (P.). — Verneuil par Migné (Vienne — France).

LEBRUN (Dr Hector), 31, rue Vauthier. — Bruxelles.

LEBRUN (Dr), rue de Bruxelles. — Namur.

LECHALAS (G.), ingénieur en chef des ponts et chaussées, 13, quai de la Bourse. — Rouen (Seine-Inférieure — France).

LECLERCQ (Jules), correspondant de l'Académie royale de Belgique, 25, avenue de l'Astronomie. — Bruxelles.

LECONTE (Félix), Installations électriques, 1, rue des Arts. — Lille.

LEDRESSEUR (Charles), docteur en médecine, professeur à l'Université, 79, voer des Capucins. — Louvain.

LEFEBVRE (Dr), membre de l'Académie royale de médecine, 36, rue de Bériot. — Louvain.

Lefebvre (Mgr Ferdinand), professeur à l'Université, 34, rue de Bériot. — Louvain.

Lefebvre (abbé Maurice), docteur en sciences naturelles, professeur au Collège Saint-Joseph. — Virton.

Legrand (abbé Alfred), rue de Bruxelles. — Namur.

Le Hir (abbé Daniel), aumônier de la Maison des Oiseaux, 86, rue de Sèvres. — Paris.

Leirens-Eliaert, rue du Pont. — Alost.

Lejeune-Simonis, château de Sohan. — Pepinster (Liége).

Lemaître (Dr), rue de Montigny. — Charleroi.

Lemoine (Georges), membre de l'Institut, ingénieur en chef des ponts et chaussées, examinateur de sortie à l'École polytechnique, 76, rue Notre-Dame des Champs. — Paris.

Lenoble, professeur aux Facultés catholiques, 28ter, rue Négrier. — Lille (Nord — France).

Le Paige (C.), membre de l'Académie royale de Belgique, professeur à l'Université, plateau de Cointe. — Liége.

Leplae, professeur à l'Institut agronomique. — Louvain.

Leray (R. P. A.), Eudiste, 12, rue du Quinconce. — Angers.

de Liedekerke (Cte Charles), 30, rue de l'Industrie. — Bruxelles.

de Liedekerke de Pailhe (Cte Éd.), 47, avenue des Arts. — Bruxelles.

du Ligondès (Vicomte), lieutenant-colonel d'artillerie. — Bourges (Cher — France).

de Limburg-Stirum (Cte Adolphe), 15, rue du Commerce. — Bruxelles.

Limpens (Émile), avocat. — Termonde.

de Locht (Léon), professeur à l'Université, ingénieur, Mont-Saint-Martin. — Liége.

Lorin, 186, boulevard Saint-Honoré. — Paris.

Lucas, S. J. (R. P.), docteur en sciences physiques et mathématiques, collège N.-D. de la Paix, rue de Bruxelles. — Namur.

Maes (l'abbé), curé de Saint-Job. — Uccle.

Mansion (Paul), professeur à l'Université, inspecteur des Études à l'École préparatoire du génie civil et des Arts et Manufactures, membre de l'Académie royale de Belgique, 6, quai des Dominicains. — Gand.

Martens (Édouard), professeur à l'Université, 27, rue Marie-Thérèse. — Louvain.

Martin (Dr), boulevard ad aquam. — Namur.

Martinez y Saez (Francisco de Paula), professeur de zoologie au Musée d'histoire naturelle, calle de San Quintin, 6. — Madrid (Espagne).

Massange de Louvrex (Dr), 4, rue Forgeur. — Liége.

Matagne (Henri), docteur en médecine, 31, avenue des Courses. — Bruxelles.

Matthieu (Émile), avocat, Marché aux Bêtes. — Huy.

de Maupeou (Cte), ingénieur de la marine, 3, rue du Commerce. — Lorient (Morbihan — France).

Meessen (Dr Wilhelm), 28, rue Froissard. — Bruxelles.

de Meeùs (Cte Henri), ingénieur, rue du Vert-Bois. — Liége.

Mercier (Mgr D.), professeur à l'Université, 1, rue des Flamands. — Louvain.

de Merode-Westerloo (Cte), rue aux Laines. — Bruxelles.

Meunier (abbé Alph.), professeur à l'Université, Collège Juste-Lipse. — Louvain.

Meunier (Fernand), 21, rue Mercelis. — Bruxelles.

Meurs, S. J. (R. P.), 11, rue des Récollets. — Louvain.

Micha, professeur à l'Université, 110, rue Marie-Thérèse.— Louvain.

Miranda y Bistuer (Julian), Calle Mayor, 43-1°, Arcipreste de la Santa Iglesia de Lerida (Cataluña), Espagne.

Moeller (Dr), membre de l'Académie royale de médecine, 1, rue Montoyer. — Bruxelles.

Moeller (Dr Nicolas), 46, rue de Berlin. — Bruxelles.

Monchamp (Mgr Georges), docteur en théologie et en philosophie, vicaire général de Mgr l'Évêque de Liége, 16, rue de l'Évêché. — Liége.

Monier (Marcel), laboratoire de biologie de Liége, 19, rue Wazon. — Liége.

de Montessus de Ballores (Cte M. R.), professeur au collège Notre-Dame de Belle-Vue. — Izeure, Moulins (Allier — France).

Monthaye, capitaine commandant d'état-major, professeur à l'École de guerre, 38, rue de la Tourelle. — Bruxelles.

de Moreau d'Andoy (Cher), 186, avenue Louise. — Bruxelles.

MOREUX (abbé Th.), professeur au collège Saint-Célestin. — Bourges (Cher — France).
MOULART (abbé), directeur au collège épiscopal. — Leuze.
MULLENDERS (Joseph), ingénieur, 7, rue Renkin. — Liége.
DE NADAILLAC (M[is]), 18, rue Duphot. — Paris ; ou Rougemont par Cloyes (Eure et Loir — France).
NAVA DI BONTIFÉ (S. É. le cardinal). — Catane.
NERINCX (Alfred), avocat à la cour d'appel, professeur à l'École supérieure du commerce, 8, rue Bosquet. — Saint-Gilles (Bruxelles).
NEUBERG, membre de l'Académie royale de Belgique, professeur à l'Université, 6, rue de Sclessin. — Liége.
NICOTRA (Mgr Sébastien). — Munich.
NOLLÉE DE NODUWEZ, membre honoraire du Corps diplomatique de S. M. le Roi des Belges, 146, rue Royale. — Bruxelles.
NYSSENS (Albert), professeur à l'Université de Louvain, 20, rue de Spa. — Bruxelles.
NYSSENS (Pierre), directeur au laboratoire agricole de l'État, 21, rue Sainte-Marguerite. — Gand.
D'OCAGNE (Maurice), professeur à l'École des ponts et chaussées, répétiteur à l'École polytechnique, 30, rue de la Boétie. — Paris.
DE OLAVARRIA (Martial), ingénieur en chef des mines, secrétaire de la Commission de la carte géologique d'Espagne, Huertas, 82. — Madrid (Espagne).
ORBAN DE XIVRY, gouverneur de la province de Luxembourg — Arlon.
PARDON (Gustave), ingénieur. — Quaregnon (Hainaut).
PASQUIER (Ern.), professeur à l'Université, 22, rue Marie-Thérèse. — Louvain.
PATRONI (Monsign. Giuseppe), dott. in filosofia, in teologia ed in ambe le leggi, 47, piazza del Gesù. — Rome.
PECHER (Eugène), 80, avenue Louise. — Bruxelles.
PEETERS (docteur), professeur à l'Institut Saint-Louis, rue du Marais. — Bruxelles.
PEETERS (Jules), docteur en droit, 51, rue Saint-Martin. — Tournai.
PEPIN, S. J. (R. P. Théophile), École libre Saint-Michel. — Saint-Étienne (Loire — France).

PIERAERTS (chan.), directeur de l'Institut Saint-Louis. — Bruxelles.

DE PIERPONT (Édouard), château de Rivière. — Profondeville.

PIERRE (abbé Oscar), professeur au collège de Bellevue. — Dinant.

POISOT (Maurice), avocat, 4, rue Buffon. — Dijon (Côte-d'Or — France).

POULLET (Prosper), professeur à l'Université, rue Léopold.—Louvain.

PROOST (Alphonse), directeur général de l'agriculture, 16, rue Anoul. — Bruxelles; ou Mousty-lez-Ottignies.

PROVINCIAL (R. P.) de la Compagnie de Jésus, 165, rue Royale. — Bruxelles.

PRUDHAM (abbé), directeur du Collège Stanislas, 22, rue N.-D. des Champs. — Paris

PYFFEROEN (Oscar), professeur à l'Université, 4, rue du Nouveau Bois. — Gand.

QUAIRIER, 28, boulevard du Régent. — Bruxelles.

RACHON (abbé Prosper), curé de Ham-sur-Heure, par Longuyon (Meurthe-et-Moselle — France).

RACLOT (abbé V.), aumônier des hospices et directeur de l'observatoire. — Langres (Haute-Marne — France).

RANWEZ (Fernand), professeur à l'Université, 56, rue de Tirlemont. — Louvain.

RECTOR (R. P.) del Colegio del Jesûs. — Tortosa (Tarragona — Espagne).

RENARD (abbé Alphonse), membre de l'Académie royale de Belgique, conservateur honoraire au Musée d'histoire naturelle, professeur à l'Université de Gand, 14, avenue Ernestine. — Ixelles.

DE REUL (Gustave), ingénieur, directeur de l'École industrielle, 11, boulevard Cauchy. — Namur.

DE RIBAUCOURT (Cte), 27, rue de Loxum. — Bruxelles; ou château de Perck, par Vilvorde.

RICHALD (J.), ingénieur des ponts et chaussées, 69, rue Archimède. — Bruxelles.

DE RIDDER (Paul), 96, rue Joseph II. — Bruxelles.

RINALDI (Son Exc. Mgr), Nonce apostolique. — Madrid.

RISUENO (Emiliano Rodriguez), catedratico de Historia natural en la Universidad, calle Duque de la Victoria, 16, pral. — Valladolid (Espagne).

ROBERTI (Max), notaire, rue de Namur. — Louvain.
DE LA ROCHE DE MARCHIENNES (Émile). — Harvengt par Harmignies (Hainaut).
ROELANDTS, S. J. (R. P.), Collège du Sacré-Cœur. — Charleroi.
ROLAND (Pierre), ingénieur, 49, rue des Orphelins. — Louvain.
DE ROMRÉE (Cte), château de Vichenet. — Le Mazy.
RUTTEN (Dr), place Léopold. — Namur.
DE SALVERT (Vte), professeur aux Facultés catholiques de Lille, 7, rue de la Bibliothèque. — Versailles (Seine-et-Oise — France) : ou château de Villebeton, par Châteaudun (Eure-et-Loir — France).
SANZ (Pelegrin), ingeniero de caminos, Oficina de Obras publicas. — Tarragona (Espagne).
DE SAUVAGE (Cte), 22, avenue de Friedland. — Paris.
SCARSEZ DE LOCQUENEUILLE (Anatole), Langemarck (Fl. occ.); ou 42, rue du Taciturne. — Bruxelles.
SCHAFFERS, S. J. (R. P.), docteur en sciences physiques et mathématiques, ancienne abbaye. — Tronchiennes.
SCHEUER, S. J. (R. P. Pierre), 11, rue des Récollets. — Louvain.
SCHMIDT (Alfred), chimiste de la maison E. Leybold's Nachfolger, 7, Bruderstrasse. — Cologne.
SCHMITZ, S. J. (R. P.), directeur du Musée géologique des bassins houillers belges, 11, rue des Récollets. — Louvain.
SCHMITZ (Théodore), ingénieur civil des Mines, 58, rue Saint-Joseph. — Anvers.
SCHOBBENS, docteur en médecine, 49, longue rue Neuve. — Anvers.
SCHOEMAKER (W.-J.), professeur à l'École moyenne. — Nimègue (Pays-Bas).
SCHOLLAERT, place Saint-Antoine. — Louvain.
DE SCHOUTHEETE DE TERVARENT (Cher). — Saint-Nicolas.
DE SELLIERS DE MORANVILLE (Cher), commandant d'état-major, 46, chaussée de Charleroi. — Bruxelles.
SIBENALER, professeur à l'Université catholique, 106, rue de Namur. — Louvain.
SIMART, lieutenant de vaisseau, répétiteur à l'École polytechnique, 70, rue Miromesnil. — Paris.
SIMON (Dr J.-B.), 108, rue Haute. — Bruxelles.

Simonis (Alfred), sénateur. — Verviers.
Siret (Henri), ingénieur, 59, rue du Transvaal. — Anvers.
Siret (Louis), ingénieur. — Cuevas (prov. Almeria — Espagne).
Smekens (Théophile), président honoraire du tribunal de 1re instance, 31, avenue Quentin Metsys. — Anvers.
del Socorro (José Maria Solano, Mes), professeur de géologie au Musée d'histoire naturelle, calle de Jacometrezo, 41, bajo. — Madrid (Espagne).
Soisson (G.), ingénieur, docteur en sciences, professeur à l'Athénée grand-ducal, rue Joseph II. — Luxembourg (Grand-Duché).
Solvyns (Albert), commissaire d'arrondissement. — Tronchiennes-lez-Gand; ou, 138, Coupure. — Gand.
Soreil, ingénieur. — Maredret-sous-Sosoye, par Anthée (Namur).
de Sparre (Cte), professeur aux Facultés catholiques de Lyon, château de Vallière. — Saint-Georges-de-Reneins (Rhône — France).
Spina, S. J. (R. P. Pedro), Colegio católico del Sagrado Corazón de Jesús, sacristia de Capucinas núm. 5. — Puebla (Mexique).
Springael (Auguste), ingénieur, 2, rue Sainte-Walburge. — Bruges.
Staelpaert (abbé), professeur au Collège Saint-Pierre, rue des Récollets. — Louvain.
Stainier (Xavier), professeur à l'Institut agricole de Gembloux, membre de la Commission géologique de Belgique, rue Pierquin. — Gembloux.
van den Steen de Jehay (Cte Frédéric), attaché au Cabinet du Roi, 13, rue de la Loi. — Bruxelles.
Stillemans (S. G. Mgr), évêque de Gand.
Stinglhamber (Émile), docteur en droit, 31, rue des Minimes. — Bruxelles.
Storms (abbé Camille), curé de Ganshoren, par Jette (Brabant).
Stouffs (Dr), rue de Charleroi. — Nivelles.
van der Straten-Ponthoz (Cte François), 23, rue de la Loi. — Bruxelles.
Struelens (Alfred), docteur en médecine, 18, rue Hôtel des Monnaies. — Saint-Gilles (Bruxelles).
Le Supérieur du Collège des Joséphites, Vieux Marché. — Louvain.

Surbled (Dr), 40, rue de Joinville. — Paris.
Suttor, ingénieur, 19, rue des Bogards. — Louvain.
Swolfs (Dr), 27, rue de l'Association. — Bruxelles.
Swolfs (chan.), inspecteur diocésain, 46, avenue Henri Speecq. — Malines.
Tannery (Paul), directeur de la manufacture des tabacs. — Pantin (Seine — France).
Taymans (Émile), notaire. — Tubize (Brabant).
Théron, docteur en sciences physiques et mathématiques, professeur à l'Athénée, 26, rue Marnix. — Gand.
Thibaudier, ingénieur de la marine. — Rochefort-sur-Mer (Charente-Inférieure — France).
Thiéry (abbé Armand), Institut des Hautes-Études, 1, rue des Flamands. — Louvain.
Thirion, S. J. (R. P.), 11, rue des Récollets. — Louvain.
Thiry (Fr.), secrétaire de l'Association conservatrice cantonale de Templeuve, bourgmestre. — Pecq (Hainaut).
Tilman (Firmin), ingénieur. — Anderlues.
Timmermans (François), ingénieur, directeur-gérant de la Société anonyme des ateliers de construction de la Meuse, 22, rue de Fragnée. — Liége.
Torroja y Caballé (Eduardo), architecte, professeur à la Faculté des sciences de l'Université, calle de Lope de Vega, nos 13 et 15, cto 3o dra. — Madrid (Espagne).
de Trazegnies (Mis). — Corroy-le-Château, par Gembloux ; ou 23, rue de la Loi. — Bruxelles.
de T'Serclaes (Mgr Charles), président du Collège belge. — Rome.
de T'Serclaes (Cte Jacques), capitaine d'état-major, professeur à l'École de guerre, 26, rue de l'Abbaye. — Bruxelles.
t'Serstevens (Gaston), château de Baudemont, par Virginal.
d'Ursel (Cte Aymard), capitaine d'artillerie, château de Bois-de-Samme, par Wauthier-Braine (Brabant).
de la Vallée Poussin, associé de l'Académie royale de Belgique, professeur à l'Université, 190, rue de Namur. — Louvain.
de la Vallée Poussin (Ch.-J.), professeur à l'Université, 190, rue de Namur. — Louvain.

DE LA VALLÉE POUSSIN (Joseph), chef de cabinet du Ministre de la Justice, 190, rue de Namur. — Louvain.

VAN AERTSELAER (chan.), curé-doyen de Sainte-Gudule. — Bruxelles.

VAN AUBEL, professeur de physique à l'Université, 136, chaussée de Courtrai. — Gand.

VAN AUBEL (Ch.), assistant à l'Université de Liége, 72, square Marie-Louise. — Bruxelles.

VAN BASTELAER (Léonce), 24, rue de l'Abondance. — Bruxelles.

VAN BIERVLIET (J.), professeur à l'Université, 5, rue Metdepenningen. — Gand.

VANDEN BOSSCHE (G.), avocat, 31, rue Baudeloo. — Gand.

VAN DEN GHEYN (chan. Gabriel), supérieur à l'Institut Saint-Liévin. — Gand.

VAN DEN GHEYN, S. J. (R. P. Joseph), bollandiste, conservateur à la Bibliothèque royale, 14, rue des Ursulines. — Bruxelles.

VANDENPEEREBOOM (E.), ingénieur, 15, rue d'Artois. — Liége.

VANDENPEEREBOOM (Jules). — Anderlecht-lez-Bruxelles.

VANDERLINDEN, ingénieur en chef des ponts et chaussées, professeur à l'Université, 27, Cour du Prince. — Gand.

VAN DER MENSBRUGGHE, membre de l'Académie royale de Belgique, professeur à l'Université, 131, Coupure. — Gand.

VANDERRYST, inspecteur adjoint de l'agriculture. — Tongres.

VAN DER SMISSEN (Édouard), avocat, professeur à l'Université de Liége, 16, rue du Gouvernement Provisoire. — Bruxelles.

VANDERSTRAETEN (Dr A.), 68, rue du Trône. — Bruxelles.

VAN DE WOESTYNE (chanoine), professeur au Grand Séminaire. — Bruges.

VAN DROMME, docteur en médecine, rue des Chartreuses. — Bruges.

VAN EMELEN (Léopold), docteur en sciences physiques et mathématiques, Collège des Joséphites. — Melle (Fl. orientale).

VAN GEERSDAELE (Dr Eugène). — Dampremy (Charleroi).

VAN GEHUCHTEN, professeur à l'Université, 36, rue Léopold. — Louvain.

VAN HOECH (Dr Ém.), 11, rue Traversière. — Bruxelles.

VAN KEERBERGHEN, docteur en médecine, 15, rue du Trône. — Bruxelles.

VANNUTELLI (Son Ém. le cardinal Séraphin). — Rome.

VAN ORTROY (Fernand), professeur à l'Université, 37, quai des Moines. — Gand.

VAN OVERLOOP (Eugène), 152, rue Royale. — Bruxelles.

VAN SWIETEN (Raymond), 31, quai aux Pierres de Taille. — Bruxelles

VAN ZUYLEN-ORBAN (Gust.), industriel, 8, quai de l'Industrie. — Liége.

VAULTRIN, inspecteur des forêts, 2, rue de Lorraine. — Nancy (Meurthe-et-Moselle — France).

VENNEMAN, docteur en médecine, professeur à l'Université, 35, rue du Canal. — Louvain.

VERHELST (abbé F.), professeur au Collège Saint-Jean-Berchmans, 9, rempart Saint-Georges. — Anvers.

VERRIEST (G.), docteur en médecine, professeur à l'Université, 40, rue du Canal. — Louvain.

VERSCHAFFEL (R. P.), chargé des travaux astronomiques à l'Observatoire d'Abbadie. — Abbadia, par Hendaye (Basses-Pyrénées — France).

VICENT, S. J. (R. P. Antonio), Colegio de San José. — Valencia (Espagne).

VISART DE BOCARMÉ (Cte Amédée), membre de la Chambre des représentants, bourgmestre. — Bruges.

VISART DE BOCARMÉ, avocat, 10, rue Grandgagnage. — Namur.

VOLLEN (E.), docteur en droit, rue de Paris. — Louvain.

DE VORGES (Albert), 4, avenue Thiers. — Compiègne (Oise — France).

DE VORGES (Cte E. Domet), 46, rue du Général Foy. — Paris.

VUYLSTEKE, professeur à l'Université de Louvain, 59, rue du Congrès. — Bruxelles.

WAFFELAERT (S. G. Mgr), évêque de Bruges.

WALRAVENS (S. G. Mgr), évêque de Tournai.

WARLOMONT (René), docteur en médecine et en sciences naturelles, médecin de régiment au 2e chasseurs à cheval, 5, rue de la Grosse Pomme. — Mons.

WAUCQUEZ (Victor), avocat, 93, rue d'Arlon. — Bruxelles.

WAUTELET (A.), ingénieur à l'usine à gaz. — Roubaix (Nord — France).

DE WAVRIN (Mis), château de Ronsele, par Somergem (Fl. orientale).

DE WECK (abbé A.), missionnaire apostolique. — Fille-Dieu sous Romont (canton de Fribourg — Suisse).

WÉRY (Dr Aug.). — Sclayn (Namur).
WÉRY (Vincent), président du tribunal de 1re instance, 4, rue des Telliers. — Mons.
WILMOTTE (abbé), professeur au Séminaire. — Floreffe (Namur).
WITTAMER, capitaine-commandant d'artillerie, directeur des études à l'école des cadets. — Namur.
WITZ (Aimé), professeur aux Facultés catholiques, 29, rue d'Antin. — Lille (Nord — France).
WOLF, membre de l'Institut, 95, rue des Feuillantines. — Paris.
WOLTERS (Frédéric), professeur à l'Université, 55, rue du Jardin. — Gand.
WOUTERS (abbé Louis), inspecteur de l'enseignement, 73, rue de l'Empereur. — Anvers.
ZAHM (R. P. J.-A.), C. S. C. — Notre-Dame (Indiana, États-Unis d'Amérique).

Membres décédés

BLONDIAUX	Thy-le-Château.
Aristide DUPONT	Bruxelles.
HERMITE	Paris.
Chanoine MAERTENS	Saint-Nicolas.
ORBAN DE XIVRY	Arlon.
DE PILLON DE SAINT-PHILBERT	Douai.
T'SERSTEVENS (Léon)	Bruxelles.
VICAIRE	Paris.
Chanoine WALRAVENS	Ath.
Chanoine DE WOUTERS	Braine-le-Comte.

Listes des membres inscrits dans les sections

1re Section

Mathématiques, Astronomie, Géodésie. — Mécanique. — Génie civil et militaire.

MM. Adan de Yarza.
Balbas.
Chan. di Bartolo.
Belpaire.
Berlingin.
Boussinesq.
du Boys.
F. Breithof.
N. Breithof.
de Bussy.
Abbé Cabeau.
Caratheodory.
Abbé Clasen.
Abbé Coppieters de Stockhove.
Cousin.
Daubresse.
De Bien.
De Bloo.
R. P. De Ceuster, S. J.
Jules De Jaer.
De Tilly.
Durant.
Dusausoy.
Dutordoir.
de l'Escaille.
Eynaud.
Fagnart.
Folie.
Gauthier-Villars.
R. P. Gillard, S. J.
Goedseels.

MM. Grinda.
de Grossouvre.
Hachez.
Hagen.
Halleux.
Haton de la Goupillière.
Havenith.
de la Haye.
Helleputte.
Humbert.
Iñiguez.
Fern Jacobs.
Jenner.
Amiral de Jonquières.
Camille Jordan.
Kaïser.
Kennis.
Charles Lagasse.
Lamarche.
Lambert.
Lechalas.
Le Paige.
Cte Charles de Liedekerke.
Vte du Ligondès.
Mansion.
Cte de Maupeou.
de Meeus.
Micha.
Cte de Montessus.
Abbé Moreux.
Neuberg.

MM. Pierre Nyssens.
d'Ocagne.
de Olavarria.
Pardon.
Pasquier.
R. P. Pepin, S. J.
Richald.
V[te] de Salvert.
Pelegrin Sanz.
Sibenaler.
Simart.
Soisson.
Soreil.
C[te] de Sparre.
R. P. Spina, S. J.

MM. Suttor.
Paul Tannery.
Théron
Thibaudier.
Timmermans.
Torroja y Caballé.
C[te] Jacques de T'Serclaes.
C[te] Aymard d'Ursel.
Ch.-J. de la Vallée Poussin.
E. Vandenpeereboom.
J. Vandenpeereboom.
Vanderlinden.
Van Emelen.
R. P. Verschaffel.
Wolf.

2[e] Section

Physique. — Chimie. — Métallurgie. — Météorologie et Physique du globe.

MM. Allard.
Amagat.
André.
Bayet.
Blondel.
Branly.
Bruylants.
Casarès.
Chautard.
Dallemagne.
R. P. Dechevrens, S. J.
R. P. De Greeff, S. J.
Delacre.
Delannoy.
Delemer.
Abbé Demanet.
De Muynck.
De Preter.
François Dewalque.
R P. Dierckx, S. J.
R. P. Dressel, S. J.
Ducretet.
Duhem.
Dumas-Primbault.

MM. André Dumont.
Ferron.
Gerard.
R. P. Goossens, S. J.
Hamonet.
de Hemptinne.
Louis Henry.
Paul Henry.
R. P. Jacopssen, S. J.
R. P. de Joannis, S. J.
Omer Lambiotte.
Victor Lambiotte.
Lambot.
Laminne.
Leconte.
Lemoine.
Lenoble.
R. P. Leray.
de Locht.
R. P. Lucas, S. J,
Mullenders.
Abbé Pierre.
Abbé Raclot.
Fern. Ranwez.

MM. de Reul.
Roland.
R. P. Schaffers, S. J.
R. P. Scheuer, S. J.
Schmidt.
Springael.
Abbé Staelpaert.
Abbé Thiéry.
R. P. Thirion, S. J.

MM. Thiry.
Tilman.
Van Aubel.
Van der Mensbrugghe.
Abbé Verhelst.
Abbé Wilmotte.
Witz.
R. P. Zahm.

3e Section

Géologie, Minéralogie. — Zoologie. — Paléontologie. — Anthropologie Ethnographie, Science du langage. — Géographie.

Mgr Abbeloos.
MM. d'Acy.
Fr. Alexis.
Arcelin.
Arduin.
Beauvois.
Bedel.
Mis de la Boëssière-Thiennes.
R. P. Bolsius, S. J.
Chanoine Boulay.
Bouquillon.
Chanoine Bourgeat.
Anatole Buisseret.
Joseph Buisseret.
R. P. Camboué, S J.
Cicioni.
Cloquet.
Daniels
Chanoine De Baets.
Chanoine De Brouwer.
R. P. Delattre, S. J.
Chanoine Delvigne.
R. P. De Munnynck, O. P.
Gustave Dewalque
Chanoine de Dorlodot.
Bon Drion.
Dugniolle.
Dusmet y Alonzo.
Fabre.

R. P. Fita, S. J.
MM. Abbé de Foville.
de Girard.
Henseval.
Abbé Hervier.
Heynen.
Kimus.
R. P. Kirsch.
de Kirwan.
Kurth.
Mgr Lamy.
A. de Lapparent.
Leclercq.
Mgr Ferdinand Lefebvre.
Abbé Maurice Lefebvre.
Abbé Le Hir.
Cte Adolphe de Limburg-Stirum.
Edouard Martens.
Martinez y Saez.
Henri Matagne.
Mgr Mercier
Abbé Meunier
Fernand Meunier.
Mgr Monchamp.
Monier.
Mis de Nadaillac.
Nollée de Noduwez
de Pierpont.
Abbé Rachon.

MM. Abbé Renard.
Risueño.
Ém. de la Roche.
Scarsez de Locqueneuille.
R. P. Schmitz, S. J.
Th. Schmitz.
H. Siret.
L. Siret.
Mis del Socorro.
Albert Solvyns.
Stainier.
Abbé Storms.
Chanoine Swolfs.

MM. de la Vallée Poussin.
Jos. de la Vallée Poussin.
Chan. G. Van den Gheyn.
R. P. Van den Gheyn, S. J.
Vanderryst.
Van Ortroy.
Van Overloop.
Vaultrin.
R. P. Vicent, S. J.
Albert de Vorges.
Mis de Wavrin.
Abbé Wouters.

4ᵉ Section

Anatomie, Physiologie — Hygiène — Pathologie, Thérapeutique, etc.

MM. Baivy.
Bibot.
Borginon.
Courtoy.
Cuylits.
Debaisieux.
De Buck.
Degive.
J. De Lantsheere.
Delaunois.
Delcroix.
Delétrez.
De Moor.
Denys.
R. P. Deschamps, S. J.
Desplats.
Duchateau.
Dufrane.
Achille Dumont.
Duquenne.
Faidherbe.
Francotte.
Gilson.
Glorieux.
Goris.
Guermonprez.

R. P. Hahn, S. J.
MM. Heymans.
Etienne Henrard.
Félix Henrard.
Houze.
Huyberechts.
Lahousse.
Laruelle.
Lebrun.
Hector Lebrun.
Ledresseur.
Dr Lefebvre.
Lemaître.
Martin.
Massange de Louvrex
Meessen.
Moeller.
Nicolas Moeller.
Peeters.
Proost.
Rutten.
Schobbens.
Simon.
Stouffs.
Struelens.
Surbled.

MM. Dr Swolfs.
Ch. Van Aubel.
Van Biervliet.
Vanderstraeten.
Van Dromme.
Van Geersdaele.
Van Gehuchten.

MM. Van Hoeck.
Van Keerberghen.
Van Swieten.
Venneman.
Verriest.
Warlomont.
Aug. Wéry.

5e Section

Agronomie. — Économie sociale, Statistique. — Sciences commerciales. Économie industrielle.

MM. d'Announx.
Béchaux.
de Bergeyck.
Berleur.
Berryer.
Bertrand.
Béthune.
Cappellen.
Cartuyvels.
Cooreman.
Craninx.
Pce de Croy.
Dansette.
Davignon.
Herman De Baets.
De Bruyn.
Camille De Jaer.
Delaire.
Léon De Lantsheere.
Fernand Deschamps.
D'Hondt.
Ernest Dubois.
Georges Dubois.
de Favereau.
Grandmont.
Guelton.
Albert Henry.
Bon Houtard.
Albert Joly.
Léon Joly.
Lambrechts.
Lebouteux.
Leplae.

MM. Cte Édouard de Liedekerke.
Limpens.
Matthieu.
de Merode-Westerloo.
Monthaye.
de Moreau d'Andoy.
Nerincx.
Mgr Nicotra.
Albert Nyssens.
Pecher.
Jules Peeters.
Poisot.
Poullet.
Pyfferoen.
de Romrée.
de Selliers de Moranville.
Smekens.
van den Steen de Jehay.
Stinglhamber.
Cte Fr. van der Straten-Ponthoz.
Taymans.
de Trazegnies.
Gaston t'Serstevens.
Cte d'Ursel.
Vanden Bossche.
Van der Smissen.
Van Zuylen-Orban.
Cte Amédée Visart de Bocarmé.
Visart de Bocarmé.
Vollen.
Cte Domet de Vorges.
Waucquez.
Vincent Wéry.

MEMBRES DU CONSEIL

1899-1900

—

Président, M. Charles Lagasse-de Locht.
1er Vice-Président, M. P. Duhem.
2e Vice-Président, M. Léon De Lantsheere.
Secrétaire, M. Paul Mansion.
Trésorier, M. J. De Bruyn.
MM. le Mis de la Boëssière-Thiennes.
Chanoine Delvigne.
Fr. Dewalque.
G. Dewalque.
Dr Ach. Dumont.
É. Goedseels.
Dr Lefebvre.
Dr Moeller.
E. Pasquier.
A. Proost.
Cte Fr. van der Straten-Ponthoz.
Chanoine Swolfs.
Ch.-J. de la Vallée Poussin.
G. Van der Mensbrugghe.

MEMBRES DU CONSEIL

1900-1901

25e ANNÉE DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE

—

1er Président d'honneur, M. le Dr LEFEBVRE.
2e Président d'honneur, M. le Cte Fr. VAN DER STRATEN-PONTHOZ.
Président, M. G. LEMOINE.
1er Vice-Président, M. le Chanoine DELVIGNE.
2e Vice-Président, M. A. PROOST.
Secrétaire, M. PAUL MANSION.
Trésorier, M. J. DE BRUYN.
MM. le Marquis DE LA BOËSSIÈRE-THIENNES.
Léon DE LANTSHEERE.
Fr. DEWALQUE.
G. DEWALQUE.
Dr A. DUMONT.
E. GOEDSEELS.
Ch. LAGASSE-DE LOCHT.
Dr MOELLER.
E. PASQUIER.
Chanoine SWOLFS.
Ch.-J. DE LA VALLÉE POUSSIN.
G. VAN DER MENSBRUGGHE.

BUREAUX DES SECTIONS

1899-1900

1re Section

Président, M. J. Neuberg.
Vice-Présidents, MM. E. Pasquier et J. Vanderlinden.
Secrétaire, M. H. Dutordoir.

2e Section

Président, M. A. Witz.
Vice-Présidents, MM. E. Gerard et G. Van der Mensbrugghe.
Secrétaire, Le R. P. Lucas, S. J.

3e Section

Président, M. de Lapparent.
Vice-Présidents, Le R. P. Schmitz, S. J. et M. le Cte A. de Limburg-Stirum.
Secrétaire, M. Van Ortroy.

4e Section

Président, M. Debaisieux.
Vice-Présidents, MM. Heymans et Huyberechts.
Secrétaire, M. De Lantsheere.

5e Section

Président, M. Éd. Van der Smissen.
Vice-Présidents, MM. le Cte van der Straten-Ponthoz et Léon Joly.
Secrétaire, M. A. Nerincx.

BUREAUX DES SECTIONS

1900-1901

1re Section

Président, M. De Tilly.
Vice-Présidents, MM. E. Goedseels et C. Le Paige.
Secrétaire, M. H. Dutordoir.

2e Section

Président, R. P. H. De Greeff, S. J.
Vice-Présidents, MM. F. Dewalque et G. Van der Mensbrugghe.
Secrétaire, R. P. Lucas, S. J.

3e Section

Président, M. de Lapparent.
Vice-Présidents, MM. J. Leclercq et le Cte de Limburg-Stirum.
Secrétaire, M. Van Ortroy.

4e Section

Président, M. Heymans.
Vice-Présidents, MM. Huyberechts et Delaunois.
Secrétaire, M. J. De Lantsheere.

5e Section

Président d'honneur, M. le Cte van der Straten-Ponthoz.
Président, M. Ernest Dubois.
Vice-Présidents, MM. Léon Joly et Edmond Leplae.
Secrétaire, M. Alfred Nerincx.

LISTE GÉOGRAPHIQUE

DES

MEMBRES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES (*)

La Société Scientifique de Bruxelles comptait au 31 janvier 1901, 445 membres se répartissant comme suit :

Belgique	320
France	76
Espagne	21
Italie	5
États-Unis	4
Hollande	3
Suisse	3
Grand-Duché de Luxembourg	3
Sicile	3
Mexique	2
Allemagne	1
Angleterre	1
Autriche	1
Canada	1
Madagascar	1
Total	445

(*) Dans cette liste, qui a été imprimée six semaines après la précédente, on a introduit tous les changements d'adresses et autres qui se sont produits dans l'intervalle.

BELGIQUE

Les membres belges se répartissent comme suit :

Flandre Occidentale	11
Flandre Orientale	40
Province d'Anvers	15
Limbourg	3
Brabant	172
Province de Liége	26
Hainaut	20
Province de Namur	30
Luxembourg	3
Total	320

Les principales villes possèdent :

Bruxelles	97	Membres.
Louvain	55	»
Gand	31	»
Liége	20	»
Namur	17	»
Anvers	10	»
Bruges	8	»

FLANDRE OCCIDENTALE (11) (*)

Bruges (8)

Béthune (Mgr Félix), 40, rue d'Argent.
Coppieters de Stockhove (abbé Ch.), directeur des Dames de l'Instruction Chrétienne.
De Leyn (chan. A.), 52, rue du Marécage.
Springael (Auguste), ingénieur, 2, rue Sainte-Walburge.
Van de Woestyne (chan.), professeur au Grand Séminaire.
Van Dromme, docteur en médecine, rue des Chartreuses.
Visart de Bocarmé (Cte Amédée), membre de la Chambre des Représentants, bourgmestre.
Waffelaert (S. G. Mgr), évêque de Bruges.
D'Hondt (Fréd.), directeur du Laboratoire Communal. — **Courtrai.**
De Brouwer (chan.), curé-doyen. — **Ypres.**
Henseval (Dr Maurice), 11, avenue du Vélodrome. — **Ostende.**

FLANDRE ORIENTALE (40)

Gand (31)

Bouqué, professeur à l'Université, 3, rue des Selliers.
Cloquet (L.), professeur à l'Université, 2, rue Saint-Pierre.
Cooreman (Gérard), 1, place du Marais.
De Baets (Herman), 11, rue des Boutiques.
De Bloo (Julien), ingénieur, 89, boulevard Frère-Orban.
De Buck (Dr D.), 7, rue des Boutiques.

(*) On a indiqué, entre parenthèses, le nombre des membres de chaque province et des villes principales.

DELACRE (Maurice), membre correspondant de l'Académie royale de Belgique, professeur à l'Université, 16, boulevard du Fort.
DE MOOR (Dr), médecin de l'Hospice Guislain, 57, rue des Tilleuls.
DUBOIS (Ernest), professeur à l'Université, 26, quai de l'École.
DUGNIOLLE (Max), professeur à l'Université, 45, Coupure.
DUSAUSOY (Clément), professeur à l'Université, 107, chaussée de Courtrai.
DUTORDOIR (Hector), ingénieur en chef directeur du service technique provincial, 339, boulevard du Château.
FAGNART (Émile), docteur en sciences physiques et mathématiques, chargé de cours à l'Université, 7, rue Nieuwpoort.
GILSON, professeur à l'Université, 339, boulevard du Château.
DE HEMPTINNE (Alexandre), 56, rue de la Vallée.
HEYMANS (J. F.), docteur en sciences, professeur à l'Université, 35, boulevard de la Citadelle.
LAHOUSSE (Dr), professeur à l'Université, 27, Coupure.
MANSION (Paul), professeur à l'Université, inspecteur des Études à l'École préparatoire du génie civil et des Arts et Manufactures, membre de l'Académie royale de Belgique, 6, quai des Dominicains.
NYSSENS (Pierre), directeur au laboratoire agricole de l'État, 16, rue du Jambon.
PYFFEROEN (Oscar), professeur à l'Université, 4, rue du Nouveau Bois.
SOLVYNS (Albert), commissaire d'arrondissement, 138, Coupure.
S. G. Mgr STILLEMANS, évêque de Gand.
THÉRON, docteur en sciences physiques et mathématiques, professeur à l'Athénée, 26, rue Marnix.
VAN AUBEL, professeur de physique à l'Université, 136, chaussée de Courtrai.
VAN BIERVLIET (J.), professeur à l'Université, 5, rue Metdepenningen.
VANDEN BOSSCHE (G.), avocat, 31, rue Baudeloo.
VAN DEN GHEYN (chan. Gabriel), supérieur à l'Institut Saint-Liévin.
VANDERLINDEN, ingénieur en chef des ponts et chaussées, professeur à l'Université, 27, Cour du Prince.
VAN DER MENSBRUGGHE, membre de l'Académie royale de Belgique, professeur à l'Université, 131, Coupure.
VAN ORTROY (Fernand), professeur à l'Université, 37, quai des Moines.

WOLTERS (Frédéric), professeur à l'Université, 55, rue du Jardin.
COLLÈGE SAINT-JOSEPH, 13, rue de Bruxelles. — **Alost.**
LEIRENS-ELIAERT, rue du Pont. — **Alost.**
DE BERGEYCK (Cte), château de **Beveren-Waes** (Fl. orientale).
VAN EMELEN (Léopold), docteur en sciences physiques et mathématiques, Collège des Joséphites. — **Melle** (Fl. orientale).
DE SCHOUTHEETE DE TERVARENT (Cher). — **Saint-Nicolas.**
DE WAVRIN (Mis), château de Ronsele, par **Somergem** (Fl. orientale).
LIMPENS (Emile), avocat. — **Termonde.**
DESCHAMPS, S. J. (R. P.), docteur en sciences naturelles, ancienne abbaye. — **Tronchiennes.**
SCHAFFERS, S. J. (R. P.), docteur en sciences physiques et mathématiques, ancienne abbaye. — **Tronchiennes.**

PROVINCE D'ANVERS (15)

Ville d'Anvers (10)

BELPAIRE (Frédéric), ingénieur, 48, avenue du Margrave.
COGELS (J.-B.-Henri), 181, avenue des Arts.
HAVENITH, lieutenant-adjoint de l'État Major, 22, longue rue de l'Hôpital.
INSTITUT SAINT-IGNACE, 47, courte rue Neuve.
SCHMITZ (Théodore), ingénieur civil des Mines, 58, rue Saint-Joseph.
SCHOBBENS, docteur en médecine, 49, longue rue Neuve.
SIRET (Henri), ingénieur, 59, rue du Transvaal.
SMEKENS (Théophile), président honoraire du tribunal de 1re instance, 31, avenue Quentin Metsys.
VERHELST (abbé F.), professeur au Collège Saint-Jean-Berchmans, 9, rempart Saint-Georges.
WOUTERS (abbé Louis), inspecteur de l'enseignement, 73, rue de l'Empereur.

Malines (5)

VAN DEN BRANDEN DE REETH (S. G. Mgr), archevêque de Tyr, 82, rue du Bruel.
DESSAIN (Charles), libraire éditeur, rue de la Blanchisserie.

Gautier (chanoine), 21, rue Louise.
S. É. le Cardinal Goossens, archevêque de Malines.
Swolfs (chanoine), inspecteur diocésain, 46, avenue Henri Speecq.

LIMBOURG (3)

de l'Escaille (Joseph), ingénieur. — **Hamont**, par Neerpelt (Limbourg).
Laminne (chanoine Jacques), supérieur du petit Séminaire de **Saint-Trond**.
Vanderryst, inspecteur adjoint de l'agriculture. — **Tongres**.

LUXEMBOURG (3)

Lambot (Oscar), professeur à l'Athénée royal, 21, rue Saint-Jean. — **Arlon**.
Cabeau (abbé Charles), professeur au Collège Saint-Joseph. — **Virton**.
Lefebvre (abbé Maurice), docteur en sciences naturelles, professeur au collège Saint-Joseph. — **Virton**.

PROVINCE DE BRABANT (172)

Bruxelles (97)

Bayet (Adrien), 33, nouveau Marché aux Grains.
Bertrand (Léon), 9, rue Crespel.
de la Boëssière-Thiennes (Mis), 23, rue aux Laines.
Borginon (Dr Paul), 58, rue Dupont.
van der Bruggen (Bon Maurice), Ministre de l'Agriculture.
Caratheodory (Costa), 101, avenue Louise.
Cartuyvels (Jules), inspecteur général au ministère de l'agriculture et des travaux publics, 215, rue de la Loi.
Collège Saint-Michel, 14, rue des Ursulines.

COUSIN, ingénieur, 10, rue Simonis.
CRANINCX (B[on] Oscar), 51, rue de la Loi.
DE CROY (P[ce] Juste), 63, rue de la Loi.
CUYLITS (Jean), docteur en médecine, 44, boulevard de Waterloo.
DAVIGNON (Julien), 41, avenue de la Toison-d'Or.
DE BIEN (Fernand), rue du Trône.
DE CEUSTER, S. J. (R. P.), collège Saint-Michel, 14, rue des Ursulines.
DE JAER (Camille), avocat, 56, boulevard de Waterloo.
DELANNOY conservateur des étalons des poids et mesures, 14, rue du Cornet.
DE LANTSHEERE (D[r] J.), oculiste, 215, rue Royale.
DE LANTSHEERE (Léon), professeur à l'Université de Louvain, membre de la Chambre des Représentants, 83, rue du Commerce.
DELCROIX (D[r] A.), 18, chaussée de Louvain.
DELÉTREZ (D[r] A.), 5, rue de la Charité.
DELVIGNE (chanoine Adolphe), curé de Saint-Josse-ten-Noode, 18, rue de la Pacification.
DENOËL, ingénieur de 1[re] classe à l'Administration centrale des Mines, 55, rue Américaine.
DE PRETER (Herman), ingénieur, 59, rue du Marais.
DESCHAMPS (Fernand), docteur en droit, 13, rue des Fabriques.
DE SMEDT S. J. (R. P. Charles), président de la Société des Bollandistes, correspondant de l'Institut, 14, rue des Ursulines.
DE TILLY (général J.), de l'Académie royale de Belgique, 162, rue Masui.
DUBOIS (George), professeur à l'École Supérieure de Commerce, 12, rue Mercelis.
DUCHATEAU-FRENTZ (D[r]), rue Joseph II.
DUMONT (Achille), docteur en médecine, 77, chaussée de Charleroi.
DURANT (Henri), inspecteur général des charbonnages patronnés par la Société générale, 3, Montagne du Parc.
DE FAVEREAU DE JENNERET (B[on]), ministre des Affaires Étrangères.
DE GARCIA DE LA VEGA (B[on] Victor), docteur en droit, 37, rue du Luxembourg.
GERARD (Ernest), ingénieur en chef, chef du cabinet du ministre des chemins de fer, 15, avenue de la Renaissance.
GLORIEUX (D[r]), 36, rue Jourdan.

GORIS (Charles), docteur en médecine, 181, rue Royale.
GRANITO DI BELMONTE (S. Ex. Mgr), nonce apostolique.
HACHEZ (F.), professeur à l'Université de Louvain, 21, rue Philippe le Bon.
HENRARD (Dr Étienne), 105, avenue du Midi.
HENRARD (Dr Félix), 176 boulevard du Hainaut.
HENRY (Albert), avocat, 47, rue de la Ruche.
HEYNEN (W.), membre de la Chambre de Représentants, 85, rue du Commerce.
HUYBERECHTS (Dr Th.), 10, rue Hôtel des Monnaies.
Mgr JACOBS, ancien curé-doyen de Sainte-Gudule, 226, avenue de la Couronne.
JACOBS (F.), président de la Société belge d'astronomie, 21, rue des Chevaliers.
JOLY (Albert), juge au tribunal de première instance, 8, rue de la Grosse-Tour.
JOLY (Léon), avocat, 54, avenue Brugmann.
JOURDAIN (Louis), ingénieur, 12, rue Montagne-aux-Herbes-potagères.
KAÏSER (G.), inspecteur du travail au ministère de l'Industrie, 19, rue Charles Martel.
LAGASSE-DE LOCHT (Charles), ingénieur en chef, directeur des ponts et chaussées, membre du Conseil supérieur du Travail, Président de la commission royale des Monuments, 167, chaussée de Wavre.
LAMBRECHTS (Hector), 103, avenue de la Couronne.
LARUELLE (Dr), 22, rue du Congrès.
LEBRUN (Dr Hector), 31, rue Vauthier.
LECLERCQ (Jules), correspondant de l'Académie royale de Belgique, 25, avenue de l'Astronomie.
DE LIEDEKERKE (Cte Charles), 30, rue de l'Industrie.
DE LIEDEKERKE DE PAILHE (Cte Éd.), 47, avenue des Arts.
DE LIMBURG-STIRUM (Cte Adolphe), 15, rue du Commerce.
MATAGNE (Henri), docteur en médecine, 31, avenue des Courses.
MEESSEN (Dr Wilhelm), 28, rue Froissard.
DE MERODE-WESTERLOO (Cte), rue aux Laines.
MEUNIER (Fernand), 92, avenue de la Couronne.
MOELLER (Dr), membre de l'Académie royale de médecine, 1, rue Montoyer.

MOELLER (Dr Nicolas), 46, rue de Berlin.
MONTHAYE, capitaine commandant d'état-major, professeur à l'École de guerre, 38, rue de la Tourelle.
DE MOREAU D'ANDOY (Cher), 186, avenue Louise.
NOLLÉE DE NODUWEZ, membre honoraire du corps diplomatique de S. M. le roi des Belges, 146, rue Royale.
NYSSENS (Albert), professeur à l'Université de Louvain, 20, rue de Spa.
PECHER (Eugène), 80, avenue Louise.
PEETERS (docteur), professeur à l'Institut Saint-Louis, rue du Marais.
PIERAERTS (chan.), directeur de l'Institut Saint-Louis.
PROOST (Alphonse), directeur général de l'Agriculture, 16, rue Anoul.
PROVINCIAL (R. P.), de la Compagnie de Jésus, 165, rue Royale.
QUAIRIER, 28, boulevard du Régent.
DE RIBAUCOURT (Cte), 27, rue de Loxum.
RICHALD (J.), ingénieur des ponts et chaussées, 69, rue Archimède.
DE RIDDER (Paul), 96, rue Joseph II.
SCARSEZ DE LOCQUENEUILLE, 42, rue du Taciturne.
DE SELLIERS DE MORANVILLE (Cher), commandant d'état-major, 46, chaussée de Charleroi.
SIMON (Dr J.-B.), 108, rue Haute.
VAN DEN STEEN DE JEHAY (Cte Frédéric), attaché au Cabinet du Roi, 13, rue de la Loi.
STINGLHAMBER (Emile), docteur en droit, 31, rue des Minimes.
VAN DER STRATEN-PONTHOZ (Cte François), 23, rue de la Loi.
SWOLFS (Dr), 27, rue de l'Association.
DE TRAZEGNIES (Mis), 23, rue de la Loi.
DE T'SERCLAES (Cte Jacques), capitaine d'état-major, professeur à l'École de guerre, 26, rue de l'Abbaye.
VAN AERTSELAER (chan.), curé-doyen de Sainte-Gudule.
VAN AUBEL, assistant à l'Université de Liége, 72, square Marie-Louise.
VAN BASTELAER (Léonce), 24, rue de l'Abondance.
VAN DEN GHEYN S. J. (R. P. Joseph), bollandiste, conservateur à la bibliothèque royale, 14, rue des Ursulines.
VAN DER SMISSEN (Édouard), avocat, professeur à l'Université de Liége, 16, rue du Gouvernement Provisoire.
VANDERSTRAETEN (Dr A.), 68, rue du Trône.
VAN HOECK (Dr Em.), 11, rue Traversière.

VAN KEERBERGHEN, docteur en médecine, 15, rue du **Trône**.
VAN OVERLOOP (Eugène), 152, rue Royale.
VAN SWIETEN (Raymond), 31, qúai aux Pierres-de-Taille.
VUYLSTEKE, professeur à l'Université de Louvain, 59, rue du **Congrès**.
WAUCQUEZ (Victor), avocat, 93, rue d'Arlon.
VANDENPEEREBOOM (Jules). — **Anderlecht** (Bruxelles).
DEGIVE (A.), membre de l'Académie royale de médecine, directeur de l'École vétérinaire de l'État, boulevard d'Anderlecht. — **Cureghem** (Bruxelles).
HALLEUX, ingénieur des mines, rue Joniaux, 5. — **Etterbeek** (Bruxelles).
RENARD (abbé Alphonse), membre de l'Académie royale de Belgique, conservateur honoraire au musée d'histoire naturelle, professeur à l'Université de Gand, 14, avenue Ernestine. — **Ixelles**.
STORMS (abbé Camille), curé de **Ganshoren**, par Jette (Brabant).
DANSETTE (Gaston), 81, chaussée de Charleroi. — **Saint-Gilles** (Bruxelles).
NERINCX (Alfred), avocat à la Cour d'appel, professeur à l'École supérieure du Commerce, 8, rue Bosquet. — **Saint-Gilles** (Bruxelles).
STRUELENS (Alfred), docteur en médecine, 18, rue Hôtel-des-Monnaies. — **Saint-Gilles** (Bruxelles).
KENNIS (G.), ingénieur civil, bourgmestre, 12, rue de Robiano, — **Schaerbeek**.
GOEDSEELS (Édouard), administrateur-inspecteur de l'Observatoire royal de Belgique. — **Uccle**.
MAES (l'abbé), curé de Saint-Job. — **Uccle**.
LAMBERT (Camille), ingénieur en chef des chemins de fer de l'État. — **Woluwe-Saint-Lambert**.
BUISSERET (Joseph), professeur à l'École normale de l'État. — **Nivelles**.
STOUFFS (D^r^), rue de Charleroi. — **Nivelles**.
TAYMANS (Emile), notaire. — **Tubize** (Brabant).
T'SERSTEVENS (Gaston), château de Baudemont, par **Virginal**.
D'URSEL (Cte Aymard), capitaine d'artillerie, château de Bois-de-Samme, par **Wauthier-Braine** (Brabant).

Louvain (55)

Mgr ABBELOOS, docteur en théologie, recteur émérite de l'Université de Louvain, 3, Montagne du Collège.
BREITHOF (F.), professeur à l'Université, 85, rue de Bruxelles.
BREITHOF (N.), professeur à l'Université, 85, rue de Bruxelles.
BRUYLANTS, professeur à l'Université, membre de l'Académie royale de médecine, 32, rue des Récollets.
CAPPELLEN (Guillaume), commissaire d'arrondissement, 4, place Marguerite.
COLLÈGE DE LA COMPAGNIE DE JÉSUS, 11, rue des Récollets.
DAUBRESSE (Paul), ingénieur, 42, rue des Orphelins.
DEBAISIEUX, professeur à l'Université, 14, rue Léopold.
DE BECKER (chan. Jules), professeur à l'Université, 112, rue de Namur.
DELATTRE S. J. (R. P.), 11, rue des Récollets.
DEMANET (chan.), docteur en sciences physiques et mathématiques, professeur à l'Université, Collège du Saint-Esprit, rue de Namur.
DE MUNNYNCK, O. P. (R. P.), au couvent des R. P. Dominicains, rue Juste-Lipse.
DE MUYNCK (abbé), professeur à l'Université, Collège du Pape.
DENYS (Dr J.), professeur à l'Université, Institut bactériologique.
DEWALQUE (François), professeur à l'Université, 26, rue des Joyeuses-Entrées.
DIERCKX, S. J. (R. P. F.), 11, rue des Récollets.
DE DORLODOT (chan. H.), docteur en théologie, professeur à l'Université, rue de Bériot.
DUMONT (André), professeur à l'Université, 18, rue des Joyeuses-Entrées.
GOOSSENS, S. J. (R. P. F.), 11, rue des Récollets.
GUELTON (Georges), attaché au ministère de l'Intérieur et de l'Instruction publique, 119, rue Marie-Thérèse.
Mgr HEBBELYNCK (A.), recteur magnifique de l'Université, 28, rue Mi-Mars.
HENRY (Louis), professeur à l'Université, membre de l'Académie royale de Belgique, 2, rue du Manège.
HENRY (Paul), professeur à l'Université, 11, rue des Joyeuses-Entrées.

Jacopssen, S. J. (R. P.), 11, rue des Récollets.
Mgr Lamy, membre de l'Académie royale de Belgique, professeur à l'Université, 149, rue des Moutons.
Ledresseur (Dr Charles), professeur à l'Université, 79, voer des Capucins.
Lefebvre (Dr), membre de l'Académie royale de médecine, 36, rue de Bériot.
Mgr Lefebvre (Ferdinand), professeur à l'Université, 34, rue de Bériot.
Leplae, professeur à l'Institut agronomique, 127, rue de la Station.
Martens (Edouard), professeur à l'Université, 27, rue Marie-Thérèse.
Mgr D. Mercier, professeur à l'Université, 1, rue des Flamands.
Meunier (abbé Alphonse), professeur à l'Université, Collège Juste-Lipse.
Melins, S. J. (R. P.), 11, rue des Récollets.
Micha, professeur à l'Université, 110, rue Marie-Thérèse.
Pasquier (Ern.), professeur à l'Université, 22, rue Marie-Thérèse.
Poullet (Prosper), professeur à l'Université, rue Léopold.
Ranwez (Fernand), professeur à l'Université, 56, rue de Tirlemont.
Roberti (Max), notaire, rue de Namur.
Rolland (Pierre), ingénieur, 49, rue des Orphelins.
Scheller, S. J. (R. P.), 11, rue des Récollets.
Schmitz, S. J. (R. P.), directeur du Musée géologique des bassins houillers belges, 11, rue des Récollets.
Schollaert, place Saint-Antoine.
Sibenaler, professeur à l'Université catholique, 106, rue de Namur.
Stappaerts (l'abbé), professeur au Collège Saint-Pierre, rue des Récollets.
Le Supérieur du Collège des Joséphites, Vieux-Marché.
Sutton, répétiteur à l'Université, 19, rue des Bogards.
Thiéry (abbé Armand), Institut des Hautes-Etudes, 1, rue des Flamands.
Thirion, S. J. (R. P.), 11, rue des Récollets.
de la Vallée Poussin, associé de l'Académie Royale de Belgique, professeur à l'Université, 190, rue de Namur.
de la Vallée Poussin (Ch.-J.), correspondant de l'Académie de Belgique, professeur à l'Université, 190, rue de Namur.

[redacted]

DE LA VALLEE [redacted]

VAN GEHUCHTEN. [redacted]

VENNEMAN, [redacted]

VERRIEST (G... [redacted]

VOLLEN (E... [redacted]

ANDRÉ (J.-B... [redacted]

DE BAETS (chan. [redacted]

HELLEPUTTE (G... [redacted]

...ue

... des

... ...nale de

... ...enal.

... ...t-Martin. —

30)

[redacted]

[redacted] :

BERLEUR (Adolphe.. [redacted]

BERRYER (Paul.. [redacted]

COLLÈGE SAINT-[redacted]

DALLEMAGNE (Georges.. [redacted]

DEWALQUE (Gustave.. [redacted]

DUQUENNE (Dr [redacted]

FRANCOTTE (Dr [redacted]

GILLARD, S. J. (R... [redacted]

KURTH (Godefroi...

LAMARCHE (Émi...

LE PAIGE (C.),

MASSANGE DE...

DE MEEUS (...

...ole des cadets, 5, rue Bosret.

15, rue de Bruxelles.

...ole des cadets.

...llège Notre-Dame de la Paix, rue de

Notre-Dame de la Paix, rue de Bruxelles.

mèche.

...xelles.

. rue de Bruxelles.

...ollège Notre-Dame de la Paix, rue de Bruxelles.

...ard Ad Aquam.

, ingénieur, directeur de l'école industrielle,

, boulevard Cauchy.

...e Léopold.

...mé, avocat, 10, rue Grandgagnage.

MONCHAMP (Mgr Georges), vicaire général de S. G. Mgr l'Évêque de Liége, membre de l'Académie royale de Belgique, 14, rue de l'Évêché.
MONIER (Marcel), laboratoire de biologie de Liége, 19, rue Wazon.
MULLENDERS (Joseph), ingénieur, 7, rue Renkin.
NEUBERG, membre de l'Académie royale de Belgique, professeur à l'Université, 6, rue de Sclessin.
TIMMERMANS (François), ingénieur, directeur-gérant de la Société anonyme des ateliers de construction de la Meuse, 22, rue de Fragnée.
VANDENPEEREBOOM (E.), ingénieur, 15, rue d'Artois.
VAN ZUYLEN-ORBAN (Gust.), industriel, 8, quai de l'Industrie.
FOLIE (F.), membre de l'Académie royale. — **Grivegnée.**
MATTHIEU (Émile), avocat, Marché-aux-Bêtes. — **Huy.**
DE LOCHT (Léon), professeur à l'Université de Liége, ingénieur, château du Tramly. — **Trooz.**
LEJEUNE-SIMONIS, château de Sohan. — **Pepinster** (Liége).
SIMONIS (Alfred), sénateur. — **Verviers.**
BLEUSET, S. J. (R. P.), professeur au Collège Saint-François-Xavier, rue de Rome. — **Verviers.**

HAINAUT (20)

LAMBIOTTE (Omer), ingénieur de charbonnages. — **Anderlues.**
TILMAN (Firmin), ingénieur. — **Anderlues.**
HOUZE (Dr Oct.). — **Binche.**
LEMAÎTRE (Dr), rue de Montigny. — **Charleroi.**
ALLARD (François), industriel. — **Chatelineau.**
VAN GEERSDAELE (Dr Eugène). — **Dampremy** (Charleroi).
DRION (Bon Adolphe), fils, avocat. — **Gosselies.**
DE LA ROCHE DE MARCHIENNES (Émile). — **Harvengt** par Harmignies (Hainaut).
MOULART (abbé), directeur au Collège épiscopal. — **Leuze.**
HOUTARD (Bon J.). — **Monceau-sur-Sambre** (Hainaut).
DE JAER (Jules), ingénieur des mines, Vieux-Marché-aux-Bêtes. — **Mons.**
DUFRANE (Dr), chirurgien à l'Hôpital, 25, rue d'Havré. — **Mons.**

WARLOMONT (René), docteur en médecine et en sciences naturelles, médecin de régiment au 2e chasseurs à cheval, 5, rue de la Grosse-Pomme. — **Mons**.
WÉRY (Vincent), président du tribunal de 1re instance, 4, rue des Telliers. — **Mons**.
THIRY (Fr.), secrétaire de l'Association conservatrice cantonale de Templeuve, bourgmestre. — **Pecq** (Hainaut).
DELAUNOIS (Dr G.), à Bon-Secours par **Péruwelz** (Hainaut).
PARDON (Gustave), ingénieur. — **Quaregnon** (Hainaut).
BLONDEL (Alfred), ingénieur, 1, place du Parc. — **Tournai**.
PEETERS (Jules), docteur en droit, 51, rue Saint-Martin. — **Tournai**.
S. G. Mgr WALRAVENS, évêque de **Tournai**.

PROVINCE DE NAMUR (30)

Namur (17)

BAIVY (Dr), place Saint-Aubin.
BIBOT (Dr), place Léopold.
BUISSERET (Anatole), professeur à l'École des cadets, 5, rue Bosret.
COLLÈGE NOTRE-DAME DE LA PAIX, 45, rue de Bruxelles.
COURTOY (Dr), place de la Monnaie.
COUSOT (abbé), aumônier de l'École des cadets.
DE GREEFF, S. J. (R. P.), Collège Notre-Dame de la Paix, rue de Bruxelles.
HAHN, S. J. (R. P.), Collège Notre-Dame de la Paix, rue de Bruxelles.
JOSSART, 6, rue Lucien Namèche.
LEBRUN (Dr), rue de Bruxelles.
LEGRAND (abbé Alfred), rue de Bruxelles.
LUCAS, S. J. (R. P.), Collège Notre-Dame de la Paix, rue de Bruxelles.
MARTIN (Dr), boulevard Ad Aquam.
DE REUL (Gustave), ingénieur, directeur de l'école industrielle, 11, boulevard Cauchy.
RUTTEN (Dr), place Léopold.
VISART DE BOCARMÉ, avocat, 10, rue Grandgagnage.

WITTAMER, capitaine-commandant d'artillerie, directeur des études à l'École des cadets.
SOREIL, ingénieur. — Maredret-sous-Sosoye, par **Anthée** (Namur).
COLLÈGE DE BELLEVUE. — **Dinant.**
COUSOT (Dr), Membre de la Chambre des Représentants. — **Dinant.**
PIERRE (abbé Oscar), professeur au Collège de Bellevue. — **Dinant.**
DE DORLODOT (Sylvain), château de Floriffoux. — **Floreffe.**
WILMOTTE (abbé), professeur au Séminaire. — **Floreffe.**
STAINIER (Xavier), professeur à l'Institut agricole, rue Pierquin. — **Gembloux.**
GILBERT (Paul), ingénieur à **Heer-Agimont.**
DE LA HAYE (Auguste), major au 13e régiment de ligne, 9, boulevard de Meuse. — **Jambes** (Namur).
DE ROMRÉE (Cte), château de Vichenet. — **Le Mazy.**
DE PIERPONT (Édouard), château de Rivière. — **Profondeville.**
WÉRY (Dr). — **Sclayn.**
LAMBIOTTE (Victor), ingénieur, directeur-gérant aux charbonnages d'Oignies-Aiseau, par **Tamines** (Namur).

FRANCE (76)

Paris (32)

d'Acy (E.), 40, boulevard Malesherbes.
Alexis-M. G. (Frère), 27, rue Oudinot.
Amagat, correspondant de l'Institut, répétiteur à l'École polytechnique, 19, avenue d'Orléans.
Béchaux, correspondant de l'Institut, 56, rue d'Assas.
Boussinesq, membre de l'Institut, 73, rue Claude Bernard.
Branly (Édouard), professeur à l'Institut catholique, 21, avenue de Tourville.
de Bussy (L.), membre de l'Institut, inspecteur général des constructions navales, 7, rue de Jouy.
Colombier, 14, rue Lhomond.
Delaire (A.), secrétaire général de la Société d'économie sociale, 238, boulevard Saint-Germain.
École libre de l'Immaculée Conception. — Vaugirard.
École libre Sainte-Geneviève, rue des Postes.
Ferrata (S. Exc. Mgr), nonce apostolique.
de Foville (abbé), directeur au Séminaire Saint-Sulpice.
Gauthier-Villars (Albert), 55, quai des Grands Augustins.
Hamonet (abbé), professeur à l'Institut catholique, 74, rue de Vaugirard.
Haton de la Goupillière (J.-N.), membre de l'Institut, inspecteur général des mines, directeur de l'École des Mines, 60, boulevard Saint-Michel.
Hautefeuille (V.), membre de l'Institut, 28, rue du Luxembourg.
Humbert, ingénieur des mines, professeur à l'École polytechnique, 16, boulevard Malesherbes.
de Joannis, S. J. (R. P.), 15, rue Monsieur.
de Jonquières, vice-amiral, membre de l'Institut, 2, avenue Bugeaud.
Jordan (Camille), membre de l'Institut, 48, rue de Varenne.

DE LAPPARENT (A.), membre de l'Institut, membre correspondant de la Société géologique de Londres, associé de l'Académie de Belgique, professeur à l'Institut catholique, 3, rue de Tilsitt.

LE HIR (abbé Daniel), aumônier de la Maison des Oiseaux, 86, rue de Sèvres.

LEMOINE (Georges), membre de l'Institut, ingénieur en chef des ponts et chaussées, examinateur de sortie à l'École polytechnique, 76, rue Notre-Dame des Champs.

LORIN, 186, boulevard Saint-Honoré,

DE NADAILLAC (Mis), 18, rue Duphot.

D'OCAGNE (Maurice), professeur à l'École des ponts et chaussées, répétiteur à l'École polytechnique, 30, rue de la Boétie.

PRUDHAM (abbé), directeur du Collège Stanislas, 22, rue Notre-Dame des Champs.

DE SAUVAGE (Cte), 22, avenue de Friedland.

SURBLED (D^r^), 40, rue de Joinvillle.

DE VORGES (Cte E. Domet), 46, rue du Général Foy.

WOLF, membre de l'Institut, 95, rue des Feuillantines.

DÉPARTEMENTS (44).

Allier (1) : DUMAS-PRIMBAULT (Henri), ingénieur, château de la Pierre. — **Cérilly**.

Aveyron (1) : BERLINGIN (Melchior), directeur des laminoirs de la Vieille-Montagne. — **Peuchot**, par Viviers.

Bouches-du-Rhône (1) : BEDEL (abbé R.), prêtre de Saint-Sulpice, directeur au Grand Séminaire. — **Aix**.

Calvados (1) : CHAUTARD, doyen de la Faculté catholique des sciences de Lille, villa Saint-Marc, par **Croissanville**.

Charente-inférieure (1) : THIBAUDIER, ingénieur de la marine. — **Rochefort-sur-mer**.

Cher (3) : DE GROSSOUVRE (A), ingénieur en chef des mines. — **Bourges**.

DU LIGONDÈS (Vte), colonel d'artillerie. — **Bourges**.

MOREUX (abbé Th.), professeur au Collège Saint-Célestin. — **Bourges**.

Côte-d'Or (2) : Beauvois (Eug.). — **Corberon.**
Poisot (Maurice), avocat, 4, rue Buffon. — **Dijon.**
Drome (1) : Arduin (abbé Alexis), à **Aiguebelle**, par Grignan.
Gironde (1) : Duhem (Pierre), professeur de physique à la Faculté des sciences, 18, rue de la Teste. — **Bordeaux.**
Isère (1) : de Kirwan (Charles), ancien inspecteur des forêts, villa Dalmassière, par **Voiron.**
Loire (2) : Hervier (abbé Joseph), 31, grande rue de la Bourse. — **Saint-Étienne.**
Pepin, S. J. (R. P.), École libre Saint-Michel. — **Saint-Étienne.**
Loiret (1) : d'Annoux (Cte H.), 74, boulevard Alexandre Martin. — **Orléans.**
Maine-et-Loire (1) : Leray (R. P. A.), Eudiste, rue du Quinconce. — **Angers.**
Manche (1) : Eynaud (L.), ingénieur de la marine, directeur des constructions navales, 2, place de l'Alma.—**Cherbourg.**
Haute-Marne (1) : Raclot (abbé V.), aumônier des hospices et directeur de l'Observatoire. — **Langres.**
Meurthe-et-Moselle (2) : Rachon (abbé Prosper), curé de **Ham-sur-Heure**, par Longuyon.
Vaultrin, inspecteur des forêts, 2, rue de Lorraine. — **Nancy.**
Morbihan (1) : de Maupeou (Cte), ingénieur de la marine, 3, rue du Commerce. — **Lorient.**
Nord (11) : Mgr Baunard, recteur de l'Université catholique, 60, boulevard Vauban. — **Lille.**
Boulay (chan.), professeur aux Facultés catholiques, 5, rue Mercier. — **Lille.**
Bourgeat (chan.), professeur aux Facultés catholiques, 15, rue Charles de Muyssart. — **Lille.**
Delemer, 24, rue Voltaire. — **Lille.**
Desplats (Dr), professeur aux Facultés catholiques, 56, boulevard Vauban. — **Lille.**
Guermonprez (Dr), professeur aux Facultés catholiques, membre correspondant de l'Académie royale de médecine de Belgique et de la Société de chirurgie de Paris, 132, rue Nationale. — **Lille.**
Leconte (Félix), installations électriques, 1, rue des Arts. — **Lille.**

LENOBLE, professeur aux Facultés catholiques, 28ter, rue Négrier. — **Lille.**

WITZ (Aimé), professeur aux Facultés catholiques, 29, rue d'Antin. — **Lille.**

FAIDHERBE (Dr Alexandre), 38, rue de l'Hospice. — **Roubaix.**

WAUTELET (A.), ingénieur à l'Usine à gaz. — **Roubaix.**

Oise (1) : DE VORGES (Albert), 4, avenue Thiers. — **Compiègne.**

Orne (1) : DU BOYS, ingénieur des ponts et chaussées, 54, rue du Mans. — **Alençon.**

Basses-Pyrénées (1) : VERSCHAFFEL (R. P.), chargé des travaux astronomiques à l'Observatoire d'Abbadie. — **Abbadia,** par Hendaye.

Rhône (1) : DE SPARRE (Cte), professeur aux Facultés catholiques de Lyon, château de Vallière. — **Saint-Georges-de-Reneins.**

Saône-et-Loire (1) : ARCELIN (Adrien), secrétaire perpétuel de l'Académie de Mâcon, 12, quai des Messageries. — **Châlon-sur-Saône.**

Seine (1) : TANNERY (Paul), directeur de la Manufacture de tabacs. — **Pantin.**

Seine-et-Oise (1) : DE SALVERT (Vte), professeur aux Facultés catholiques de Lille, 7, rue de la Bibliothèque. — **Versailles.**

Seine-Inférieure (1) : LECHALAS (G), ingénieur en chef des ponts et chaussées, 13, quai de la Bourse. — **Rouen.**

Vaucluse (1) : FABRE (J.-H.), naturaliste. — **Serignan,** par Vaucluse.

Vienne (1) : LEBOUTEUX (P.). — **Verneuil,** par Migné.

ANGLETERRE (1)

DECHEVRENS, S. J. (R. P.), directeur de l'Observatoire du Collège Saint-Louis. — **Jersey** (Iles de la Manche).

ESPAGNE (21)

Madrid (11).

DUSMET Y ALONZO (J. M.), docteur en sciences naturelles, 7, plaza Santa Cruz.

FITA Y COLOMÈ S. J. (R. P. Fidel), calle de Isabel la Católica, 12.

GONZALEZ Y CASTEJON, major d'État-Major, professeur de S. M. le roi d'Espagne, real palacio.

GRINDA (Jesús), ingénieur des ponts et chaussées, Fuencarral, 74 y 76.

INIGUEZ Y INIGUEZ (Francisco), catedrático de Astronomia en la Universidad, director del observatorio astronomico.

MARTINEZ Y SAEZ (Francisco de Paula), professeur de zoologie au musée d'histoire naturelle, calle de San Quintin, 6.

DE OLAVARRIA (Martial), ingénieur en chef des mines, secrétaire de la commission de la carte géologique d'Espagne, Huertas, 82.

Son Exc. Mgr. RINALDINI, nonce apostolique.

SANZ (Pelegrin), ingeniero de caminos, calle de Lope de Vega, n°s 13 y 15-3ro.

DEL SOCORRO (José Maria Solano, M^{es}), professeur de géologie au musée d'histoire naturelle, calle de Jacometrezo, 41, bajo.

TORROJA Y CABALLÉ (Eduardo), architecte, professeur à la Faculté des sciences de l'Université, calle de Lope de Vega, n°s 13 et 15, c^{to} 3° dra.

COLEGIO DE ESTUDIOS SUPERIORES DE DEUSTO (R. P. J. Han. Obeso). — **Bilbao.**

SIRET (Louis), ingénieur. — **Cuevas.** (prov. Almeria).

CASARÈS (Firmino), farmacia, 93, Calle de San Andrès. — **La Coruna.**

ADAN DE YARZA (Ramon), ingénieur des mines. — **Lequeitio** (Vizcaya).

MIRANDA Y BISTUER (Julian), Calle Mayor, 43-1°, Arcipreste de la Santa Iglesia de **Lerida** (Cataluña).

BALBAS (Thomas), ingénieur des mines. — **San Sebastian.**

FERNANDEZ SANCHEZ (José), Catedrático de Historia Universal en la Universitad. — **Santiago** (Galice).

R. P. RECTOR del Colegio del Jesùs. — **Tortosa** (Tarragona).

VICENT, S. J. (R. P.), Colegio de San José. — **Valencia.**
RISUENO (Emiliano Rodriguez), Catedrático de Historia natural en la Universidad, calle Duque de la Victoria, 16, pral. — **Valladolid.**

ALLEMAGNE (1)

SCHMIDT (Alfred), chimiste de la maison E. Leybold's Nachfolger, 7, Bruderstrasse. — **Cologne.**

AUTRICHE (1)

FORNI (Cte Paul). — **Bozen** (Tyrol-Autriche).

GRAND-DUCHÉ DE LUXEMBOURG (3)

CLASEN (abbé B.-I.), curé-doyen d'**Echternach.**
FERRON (Eug.), commissaire du Gouvernement grand-ducal près les chemins de fer, 8, avenue de la Porte-Neuve. — **Luxembourg.**
SOISSON (G.), ingénieur, docteur en sciences, professeur à l'Athénée grand-ducal, rue Joseph II. — **Luxembourg.**

HOLLANDE (3)

DRESSEL, S. J. (R. P.), professeur de physique au collège Saint-Ignace. — **Fauquemont** (Limbourg hollandais).
SCHOEMAKER (W.-J.), professeur à l'école moyenne. — **Nimègue** (Pays-Bas).
BOLSIUS, S. J. (R. P.), Kerkstraat, A. 14. — **Oudenbosch** (Pays-Bas).

ITALIE (5)

S. E. le cardinal Nava di Bontife. — **Catane.**
Cicioni (M° R. Giulio Prior), professeur au Séminaire de **Perugia** (Italie).
Patroni (Monsign. Giuseppe), doct. in filosofia, in teologia ed in ambe le leggi, 47, piazza del Gesu. — **Rome.**
Mgr Charles de T'Serclaes, président du collège belge. — **Rome.**
Vannutelli (S. Ém. le cardinal Séraphin). — **Rome.**

SICILE (3)

Ganganelli (Mgr S.), président du Grand Séminaire. — **Caltanisetta.**
di Bartolo (Canonico Salvatore), Ruggiero Settimo, 71. — **Palermo.**
Grandmont (Alphonse), avocat. — **Taormina.**

SUISSE (3)

Daniels (Dr Fr.), professeur à l'Université catholique de **Fribourg.**
Kirsch (Mgr J.-P.), professeur à l'Université. — **Fribourg.**
de Weck (abbé A.), missionnaire apostolique. — **Fille-Dieu** sous Romont (canton de Fribourg).

MADAGASCAR (1)

Camboué, S. J. (R. P. Paul), missionnaire apostolique. — **Tananarive** (Madagascar).

AMÉRIQUE (7)

CANADA (1)

Mgr La Flamme, université de Laval. — **Québec.**

ÉTATS-UNIS (4)

Kirsch (R. P. Alexandre-M.), C. S. C. — **Notre-Dame, Indiana.**
Zahm (R. P. J.-A.), C. S. C. — **Notre-Dame. Indiana.**
Bouquillon (abbé Th.), Catholic University of America. — **Washington** (Brookland, D. C.).
Hagen, S. J. (R. P.), Georgetown College Observatory. — **Washington. D. C.**

MEXIQUE (2)

Illescas Juan calle de la Compania, 16. — **Puebla** (vià **New-York**).
Spina, S. J. (R. P. Pedro), Colegio catolico del **Sagrado Corazón de** Jesus, Sacristia de Capucinas, núm. 5. — **Puebla.**

SESSION DU 25 OCTOBRE 1900

A BRUXELLES

SÉANCES DES SECTIONS

Première section

M. De Tilly présente à la section un mémoire de M. de Sparre intitulé : *Sur l'emploi des Tables de Siacci pour résoudre les problèmes du tir, dans le cas des grands angles de projection et lorsque la vitesse est supérieure à 300 mètres.* Il analyse ce travail sur lequel il fera rapport dans la prochaine session.

Il est ensuite donné lecture d'une courte note de M. Leconte sur la construction des engrenages en tôle.

Le R. P. Bosmans demande à la section de pouvoir ajouter quelques notes historiques au travail qu'il a présenté à la section, le 25 avril dernier, sur un manuscrit inédit de Michel Coignet. La publication de l'histoire de la trigonométrie de Braunmühl, lui permettra de compléter son travail sur plusieurs points.

M. Mansion fait la communication suivante *sur un théorème de Möbius.*

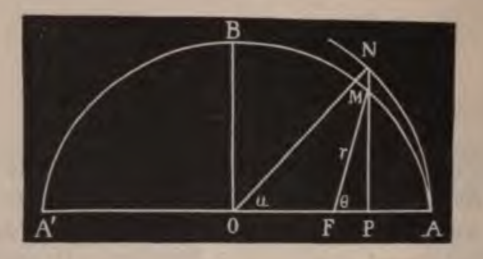
1. *Préliminaires.* Considérons une ellipse AMBA', de centre O, ayant pour demi-axes OA $= a$, OB $= b$ et pour excentricité OF $= c$. Posons

$$e = \frac{c}{a}, \qquad p = \frac{b^2}{a}.$$

Considérons, sur l'ellipse et sur le cercle concentrique de rayon a les points M et N ayant même projection P sur le grand axe et appelons r et θ les coordonnées polaires de M, l'axe polaire allant du foyer F au sommet A le plus voisin. Soient de même a et u les coordonnées polaires de N, le centre O de l'ellipse étant l'origine et l'axe polaire allant de O au foyer F. On a, comme l'on sait,

$$r \cos \theta = a (\cos u - e), \qquad r \sin \theta = b \sin u,$$

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta} = a (1 - e \cos u)$$



On trouve ensuite aisément, d'une manière élémentaire, 'pour l'aire S du secteur AMF,

$$S = \frac{1}{2} abt, \qquad t = u - k \sin u.$$

Les trois variables θ, u, t, appelées en astronomie, *anomalie vraie, anomalie excentrique* et *anomalie moyenne,* sont fonctions impaires l'une de l'autre; quand θ croît de 0 à 2π, il en est de même de u et de t et réciproquement.

Par suite, toute fonction de θ, de période 2π, est aussi une fonction de u ou de t, de période 2π. Si elle n'a pas un nombre infini de discontinuités ou de maxima et minima, elle peut être développée en série de Fourier.

2. *Développement de* $r \cos \theta$, $r \sin \theta$ *en séries de Fourier.* Les fonctions

$$r \cos \theta = a \cos u - ak, \qquad r \sin \theta = b \sin u$$

sont des fonctions périodiques de u et de t, la première paire, la

seconde impaire; elles satisfont d'ailleurs aux conditions suffisantes, pour qu'elles soient développables en séries de Fourier. On a donc

$$r\cos\theta = \frac{1}{2}A_0 + A_1\cos t + A_2\cos 2t + \text{etc.},$$

$$r\sin\theta = \qquad B_1\sin t + B_2\sin 2t + \text{etc.},$$

A_n, B_n étant des constantes non nulles que l'on sait déterminer.

Posons

$$\frac{1}{2}A_0 = a_0, \qquad A_n = a_n + b_n, \qquad B_n = a_n - b_n.$$

Nous pourrons écrire

$$r\cos\theta = a_0 + a_1\cos t + a_2\cos 2t + a_3\cos 3t + \cdots$$
$$+ b_1\cos(-t) + b_2\cos(-2t) + b_3\cos(-3t) + \cdots$$

$$r\sin\theta = a_1\sin t + a_2\sin 2t + a_3\sin 3t + \cdots$$
$$+ b_1\sin(-t) + b_2\sin(-2t) + b_3\sin(-3t) + \cdots$$

Si, parmi les coefficients a et b, il y en a de négatifs, par exemple, a_k et b_l, nous écrirons les termes où ils entrent comme il suit :

$$-a_k\cos(kt+\pi), \qquad -a_k\sin(kt+\pi)$$

$$-b_l\cos(-lt-\pi), \qquad -b_l\sin(-lt-\pi),$$

et les coefficients $(-a_k)$, $(-b_l)$ seront positifs.

Les quantités $r\cos\theta$, $r\sin\theta$ sont donc données par des formules de la forme

$$r\cos\theta = \mathbf{S}\,[r_1\cos n_1t + r_2\cos(n_2t+\pi) + r_3\cos(-n_3t)$$
$$+ r_4\cos(-n_4t-\pi)],$$

$$r\sin\theta = \mathbf{S}\,[r_1\sin n_1t + r_2\sin(n_2t+\pi) + r_3\sin(-n_3t)$$
$$+ r_4\sin(-n_4t-\pi)],$$

où r_1, r_2, r_3, r_4, sont des quantités positives.

3. *Théorème de Möbius.* Posons

$$x_1 = r_1 \cos n_1 t, \qquad y_1 = r_1 \sin n_1 t,$$
$$x_2 = r_2 \cos (n_2 t + \pi), \qquad y_2 = r_2 \sin (n_2 t + n),$$
$$x_3 = r_3 \cos (-n_3 t), \qquad y_3 = r_3 \sin (-n_3 t),$$
$$x_4 = r_4 \cos (-n_4 t - \pi), \qquad y_4 = r_4 \sin (-n_4 t - \pi);$$

(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4) seront les coordonnées de points pris sur les quatre cercles de rayon r_1, r_2, r_3, r_4. Quand t, et, par suite, θ et u varient de 0 à 2π, le point M décrit l'ellipse tout entière dans un sens que nous appellerons le sens *direct.* Dans la même hypothèse, le point (x_1, y_1) décrit n_1 fois le cercle de rayon r_1, dans le sens direct, à partir du point $(r_1, 0)$; le point (x_3, y_3) décrira n_3 fois le cercle de rayon r_3, dans le sens contraire, ou sens *rétrograde*, à partir du point $(r_3, 0)$. De même, le point (x_2, y_2) décrit n_2 fois le cercle de rayon r_2, dans le sens direct, mais à partir du point $(-r_2, 0)$ et le point (x_4, y_4) décrit n_4 fois le cercle de rayon r_4, dans le sens rétrograde, à partir du point $(-r_4, 0)$.

Soient

$$\xi = x_1 + x_2 + x_3 + x_4,$$
$$\eta = y_1 + y_2 + y_3 + y_4.$$

Comme Möbius l'a remarqué, le mouvement du point (ξ, η) sera la résultante des quatre mouvements circulaires dont il vient d'être question : ce point se mouvra, en sens rétrograde, sur un cercle C_4 de rayon r_4, le centre de C_4 se mouvant dans le sens direct sur le cercle C_3 de rayon r_3; le centre de C_3 se meut lui-même dans le sens rétrograde sur le cercle C_2 de rayon r_2, et, enfin, le centre de C_2 se meut dans le sens direct sur un cercle C_1 de rayon r_1. Ces mouvements commencent à l'une ou l'autre extrémité des diamètres des cercles parallèles aux abscisses, comme il a été dit plus haut, et sont uniformes si t varie d'une manière uniforme.

Ce que nous venons de dire s'applique, *mutatis mutandis*, au point M $(r \cos \theta, r \sin \theta)$. Il en résulte le théorème de Möbius : *Le mouvement elliptique képlérien équivaut à une infinité de mouvements uniformes circulaires.*

4. *Historique.* Möbius énonce, sans le démontrer, ce théorème sous une forme plus générale, en l'appliquant à un mouvement

quelconque, dans la préface de son livre : *Die Elemente der Mechanik des Himmels* (1843; voir p. 4 du t. IV des *Œuvres complètes*. Leipzig, Hirzel, 1887). — On trouve les valeurs des coefficients A, B (d'après Bessel, si nous ne nous trompons) dans le tome I de la *Mécanique céleste* de Tisserand (1889), ch. XII, XIII, XIV. La solution du problème de Képler, due à Lagrange, est dans la *Mécanique analytique*, t. II, sect. VII, ch. I, nos 21-23 et a passé de là dans la *Mécanique céleste* de Laplace et dans une foule de traités de mécanique. Möbius, dans l'ouvrage cité, p. 82, fait observer que si, dans la solution du problème de Képler, on ne conserve que la première puissance de k, on trouve des formules équivalentes à la théorie du mouvement des planètes de Copernic et de Ptolémée.

5. *Remarques* (*). Dans les sept systèmes de l'*ancienne astronomie* (dus à Philolaus, Eudoxe, Héraclide du Pont, Aristarque de Samos, Hipparque et Ptolémée, Copernic, Ticho Brahé) les mouvements des planètes sont circulaires ou composés de mouvements circulaires, *en nombre fini.*

D'après le théorème de Möbius, le mouvement elliptiqueképlérien équivaut à la combinaison d'un *nombre infini* de mouvements circulaires; c'est pourquoi l'on peut dire que Képler inaugure véritablement l'*astronomie moderne*, puisque sa découverte équivaut d'un seul coup à une infinité de perfectionnements successifs de la théorie des épicycles.

Il n'est peut-être pas inutile de remarquer qu'en pratique, les astronomes, au fond, emploient encore celle-ci quand ils se servent de développements trigonométriques limités.

M. Goedseels fait une communication *sur la méthode de Cauchy* pour la résolution des équations linéaires considérées dans la théorie des erreurs. Il montre que cette méthode est, au fond, une variante de la méthode de Tobie Mayer.

Cette communication donne lieu à des observations de la part de plusieurs membres de la section.

(*) Ces remarques ont été ajoutées à la note primitive par M. Mansion, à la demande de M. Pasquier.

Le R. P. Bosmans expose ensuite diverses notes relatives à l'histoire de la trigonométrie et, en particulier, à la construction des tables des fonctions circulaires. Il présente à la section une pseudo-seconde édition des célèbres tables de Viète.

La section décide que ces notes seront publiées dans les Annales avec son précédent travail sur Michel Coignet.

Deuxième section

M. de Hemptinne donne lecture de son rapport sur le Mémoire de M. Duhem, intitulé : *Les Théories de J. C. Maxwell,* Étude historique et critique.

Dans son introduction, M. Duhem, avec sa clarté habituelle, nous fait un court historique du développement des théories de l'électrostatique et de l'électrodynamique depuis Coulomb ; arrivé à l'œuvre de Maxwell, il fait remarquer qu'elle abonde en erreurs et en contradictions. M. Duhem n'est point de l'avis de M. Poincaré qu'il faut en prendre son parti. Notre devoir est, dit-il, de tâcher de déterminer exactement ces contradictions de l'œuvre de Maxwell et de voir s'il n'y a pas moyen de l'en débarrasser, c'est ce qui fait l'objet de son mémoire.

Dans la première partie, il s'occupe des électrostatiques de Maxwell; celui-ci, en effet, n'a pas écrit moins de trois électrostatiques basées sur des théories plus ou moins différentes. M. Duhem montre que toutes trois contiennent de nombreuses erreurs de signe et maintes contradictions; il prouve en outre que les deux premières sont illusoires parce qu'elles aboutissent à une équation qui, si on lui applique logiquement la théorie, est indéterminée.

Dans la deuxième partie il analyse l'électrodynamique et différents livres et mémoires de Maxwell.

M. Duhem serre de près les raisonnements du savant anglais ; il compare les théories d'un écrit avec celles d'un autre; il ne laisse rien échapper, scrute et interprète la pensée de l'auteur, tire les conséquences de ses théories et de ses équations.

Il montre les erreurs de logique, les fautes de signe et les contradictions. Enfin, dans le dernier chapitre M. Duhem fait de

même pour la théorie électromagnétique de la lumière où Maxwell, malgré ses erreurs, aboutit pourtant à des équations correctes et aux lois essentielles de cette théorie.

De son travail historique et critique M. Duhem conclut, d'une part, qu'il faut reconnaître que l'œuvre de Maxwell abonde en erreurs, d'autre part, qu'elle conduit à des résultats intéressants. Quel parti prendre? Il n'admet pas le procédé de Heaviside, Hertz et Cohn qui adoptent les équations de Maxwell sans s'inquiéter de ses théories. L'effort tenté par Boltzmann pour construire au moyen de conceptions nouvelles un système où les équations de Maxwell seraient logiquement enchaînées n'est pas non plus à l'abri de critiques parce qu'il conduirait les physiciens à abandonner des théories solidement établies. M. Duhem trouve un moyen terme, c'est d'adopter la théorie de Helmholtz, prolongement naturel des doctrines de Poisson, d'Ampère, de Weber, de C. Neumann, qui conduit logiquement des principes posés au commencement de ce siècle aux conséquences les plus séduisantes des théories de Maxwell.

La science et le talent de M. Duhem sont trop connus pour qu'il soit nécessaire d'insister sur les mérites de sa critique. Nous proposons à la seconde section de voter l'impression du mémoire dans les ANNALES de la Société et d'adresser des remerciements à l'auteur.

M. Mansion, second rapporteur, et le R. P. Thirion, troisième rapporteur se rallient aux conclusions de M. de Hemptinne.

Le R. P. Leray présente une note intitulée : *Calcul de la force d'entraînement exercée par une sphère tournante sur un atome quelconque.* Ce travail est renvoyé à l'examen de deux commissaires, M. le vicomte du Ligondès et M. Mansion.

M. Ferron présente un mémoire portant le titre de *Contributions à la théorie mathématique de la lumière et de la chaleur*. Sont nommés rapporteurs le R. P. Leray et le R. P. Thirion.

M. Louis Henry s'occupe principalement de la *volatilité* dans les composés carbonés *amidés*, renfermant le système $-\overset{|}{\underset{|}{C}}-NH_2$.

Il considère d'abord les *diamines normales* $(H_2N)CH_2 - (CH_2)_n - CH_2(NH_2)$.

Les points d'ébullition des termes de cette série homologue peuvent être regardés comme déterminés avec exactitude depuis C_2 jusqu'à C_5.

Étage C_2	. . . . Éb.	116°
C_3	. . . .	135°
C_4	. . . .	160°
C_5	. . . .	179°

Ce groupe peut être réparti en deux *séries*, l'une à nombre *pair*, l'autre à nombre *impair* d'atomes de carbone.

Série paire.				Série impaire.			
C_2 . .	Éb.	116°	> 44°	C_3 . .	Éb.	135°	> 44°
C_4 . . .		160°		C_5		179°	

L'addition d'un groupement $- CH_2 - CH_2 -$ détermine, dans l'un et l'autre cas, la même élévation, 44°, dans le point d'ébullition. Mais l'intercalation dans ce système bi-carboné $- CH_2 - CH_2 -$ d'un chaînon $- CH_2$ ne partage pas cette différence en deux parties égales. Il arrive ainsi que, dans le groupe total C_2 à C_5, on constate une alternance dans l'élévation graduelle du point d'ébullition suivant que l'on passe d'un terme *pair* à un terme *impair* et réciproquement, alternance qui se reproduit avec régularité.

C_2	. . . . Éb.	116°	
			> 19°
C_3	. . . .	135°	
			> 25°
C_4	. . . .	160°	
			> 19°
C_5	. . . .	179°	

M. L. Henry rappelle qu'il a déjà signalé un fait de ce genre, mais sur une échelle plus étendue, dans la série des *chlorures acides normaux* $H_3C - (CH_2)_n - COCl$.

Il considère ensuite les *amines-alcools*, renfermant le système $(H_2N)C - ... - C(OH)$.

Le seul composé de cette sorte connu jusqu'ici, du moins à l'état libre, est *l'Ethanol-amine* $(H_2N)CH_2 - CH_2(OH)$ Éb. 171° que M. Knorr a fait connaître en 1897 et qu'il a obtenue par la méthode de Wurtz, réaction de NH_3 sur *l'oxyde d'éthylène* $\begin{matrix} H_2C \\ | \\ H_2C \end{matrix} > O$

M.L. Henry fait connaître deux méthodes qui permettent d'obtenir, assez commodément, des *amines-alcools*, de structure bien certaine, c'est l'hydrogénation des *nitriles-alcools* et des *alcools nitrés*, composés qui font l'objet de ses recherches depuis longtemps. *Transformation de* NC en $H_2N - CH_2$

de $(NO_2)C$ - en $H_2N - C$ -

Les nitriles-alcools *discontinus*, du type $NC - (CH_x)_n - C(OH)$ sont hydrogénés par la méthode de Ladenburg, action vive de Na sur $H_5C_2 - OH$. Dans ce groupe, l'*alcool cyano-butylique* normal $NC - (CH_2)_2 - CH_2(OH)$ a été transformé en *butanol-amine* $(H_2N)CH_2 - (CH_2)_2 - CH_2(OH)$ Éb. 206°.

Les alcools nitrés sont réduits par l'étain et l'acide HCl. Dans ce groupe ont été transformés jusqu'ici :

1° Le *nitro-isopropanol* $CH_3 - CH(OH) - CH_2(NO_2)$ en *isopropanol amine* $CH_3 - CH(OH) - CH_2(NH_2)$ (par M. Edgar Peeters).

2° Le *nitro-propanol bi-primaire* $(HO)CH_2 - CH_2 - CH_2(NO_2)$ en *propanol-amine* du même genre $(HO)CH_2 - CH_2 - CH_2(NH_2)$.

3° Le *nitro-butanol* bi-secondaire $H_3C - CH(OH) - CH(NO_2) - CH_3$ en *butanol-amine* bi-secondaire $H_3C - CH(OH) - CH(NH_2) - CH_3$.

Sont constituées ainsi

a) La série des *alcools-amines normaux* depuis C_2 jusqu'à C_4 inclus.

$(HO)CH_2 - CH_2(NH_2)$ . . .	Éb.	171°
$(HO)CH_2 - CH_2 - CH_2(NH_2)$		187°-188°
$(HO)CH_2 - (CH_2)_2 - CH_2(NH_2)$ . . .		206°

b) La série de *méthylisation* de l'Éthanol-amine.

$(HO)CH_2 - CH_2(NH_2)$	Éb.	171°
$H_3C - CH(OH) - CH_2(NH_2)$		160°-161°
$H_3C - CH(OH) - CH(NH_2) - CH_3$ . .		160°

Les *amines-alcools* doivent être rangées parmi les composés les plus intéressants à étudier au point de vue de la question générale « *de la solidarité fonctionnelle dans les composés carbonés.* »

M. L. Henry expose les faits qui permettent de démontrer expérimentalement l'influence réciproque des composants *alcool* et *amine*.

Il s'occupe ensuite de cette influence dans ses relations avec la *volatilité* de ces composés, question intéressante, surtout si l'on tient compte de l'identité presque complète, quant au poids, des groupements - OH (17) et - NH_2 (16).

Les *amines-alcools* se font d'une manière générale remarquer par l'*élévation relative de leur point d'ébullition*. Celle-ci se constate à l'evidence si l'on compare les amines-alcools à d'autres dérivés hydroxylés à fonctions *multiples*, tels que les alcools nitrés, les alcools éther haloïde, les glycols, etc.

Le remplacement des radicaux - NO_2, Cl, - OH, etc. par - NH_2 détermine certaines modifications dans le point d'ébullition des composés simples remplissant les fonctions afférentes à ces radicaux ; ces modifications sont d'un tout autre ordre alors qu'elles se passent dans des composés à *fonction alcool*. Voici les exemples concernant l'étage C_2.

a) Radicaux - NO_2 et - NH_2.

$H_5C_2 - NO_2$	Éb.	113°	— 94°
$H_5C_2 - NH_2$		19°	
$(HO)C_2H_4 - NO_2$		194°	— 23°
$(HO)C_2H_4 - NH_2$		171°	

b) Radicaux Cl et NH_2.

$H_5C_2 - Cl$	Éb.	12°	+ 7°
$H_5C_2 - NH_2$		19°	
$(HO)C_2H_4 - Cl$		132°	+ 39°
$(HO)C_2H_4 - NH_2$		171°	

c) Radicaux - OH et - NH_2.

$H_5C_2 - OH$	Éb. —	78°	— 59°
$H_5C_2 - NH_2$ . . . . —		19°	
$(HO)C_2H_4 - OH$		196°	— 25°
$(HO)C_2H_4 - (NH_2)$		171°	

Il est intéressant de continuer la substitution de - NH_2 à - OH dans le glycol éthylénique.

$(HO)C_2H_4 - (NH_2)$ . . . Éb. 171° > — 55°
$(H_2N)C_2H_4 - NH_2$ . . . . . . 116°

On voit que les deux hydroxyles du glycol éthylénique sont sous ce rapport, malgré leur identité parfaite, bien loin d'être *équivalents*.

M. L. Henry trouve la raison de ces faits dans la *réaction combinative* du constituant *alcool* H_2C - OH avec le constituant *amine* $H_2C - NH_2$. Le retard relatif apporté dans le point d'ébullition mesure, dans une certaine mesure, l'effort de calorique nécessaire pour anéantir la combinaison de ces constituants et les séparer l'un de l'autre. Cette combinaison est un fait d'ordre expérimental : les *amines* se combinent aisément avec l'eau et avec les dérivés hydroxylés, de nature alcoolique, tels que H_3C - OH, H_5C_2 - OH etc., mais pas avec les éthers simples tels que $H_5C_2 - (OC_2H_5)$.

M. L. Henry se propose de revenir sur cet objet dans une prochaine séance de la section.

Le R. P. Thirion expose de nouvelles expériences de M. Van der Mensbrugghe faisant suite à la communication antérieure de celui-ci *sur une expérience d'hydrostatique.*

Troisième section

La séance s'ouvre par la lecture des rapports de M. le Chanoine de Dorlodot et de M. de la Vallée Poussin, sur un travail de M. le Chanoine Bourgeat :

Rapport de M. le Chanoine de Dorlodot : Dans le travail intitulé *La question des fossiles caractéristiques et son application à quelques formations géologiques,* M. le Chanoine Bourgeat émet, dans une première partie, des considérations générales sur l'inconvénient d'attribuer une valeur trop absolue aux fossiles dits caractéristiques des terrains. Dans une seconde partie, il applique ces considérations générales à deux exemples concrets : le calcaire carbonifère du bassin de Namur et les étages oxfordien et callovien de l'est du bassin de Paris.

Il est manifeste que le géologue est exposé à faire fausse route s'il admet *a priori* que toutes les couches contenant un même fossile *doivent* être de même âge, ou que la succession des fossiles *doit* avoir été la même partout. Nous ne savons rien sur ce point que nous n'ayons appris à l'école de la stratigraphie, et si l'étude de la succession des faunes, dont l'âge relatif est établi sans conteste par leur ordre régulier de superposition directement constatée, a permis d'établir des règles qui sont toujours vraies dans les grandes lignes, une étude plus détaillée montre aussi qu'elles cessent parfois de l'être, lorsqu'on veut les appliquer aux moindres subdivisions.

Quant aux applications, ma faible compétence ne me permet pas de porter un jugement sur la seconde, en présence de l'appréciation d'un savant si particulièrement expert en matière de jurassique. Mais, en ce qui concerne la première, je crois devoir faire les plus expresses réserves sur les conclusions de l'auteur. C'est bien la stratigraphie, en effet, qui nous enseigne que, partout où elles coexistent, la faune à *Productus giganteus* est *toujours* supérieure à la faune à *Spirifer tornacensis*. Des faits invoqués par l'auteur, je n'en retiens qu'un seul, parce que les autres sont, en général, inexactement ou incomplètement rapportés : l'absence de Tournaisien à Visé et la superposition des couches à *Productus giganteus* aux couches à *Rhynchonella cuboïdes,* sans qu'une lacune puisse être établie par des ravinements. C'est un argument sans doute : mais peut-il être opposé d'une façon bien convaincante à ce qu'établissent tous les faits constatés dans le reste de nos bassins? — A Miatchkovo, on voit reposer sur le calcaire carbonifère, resté horizontal, des marnes oxfordiennes, sans que l'on puisse voir de ravinements, même dans des coupes étendues. La chose est incontestablement plus étonnante qu'à Visé, où la lacune représente un espace de temps relativement court. — La superposition immédiate aux couches frasniennes, de calcaire identique par son aspect lithologique et par sa faune au *calcaire de Neffe,* qui, partout en Belgique et dans le nord de la France, est séparé des mêmes couches frasniennes par le Famennien et le Tournaisien, ne peut guère, vu la grande proximité des lieux, s'expliquer sans lacune; et la conclusion que le voisinage nous permet de déduire avec une extrême probabilité pour Visé, peut être étendue légitime-

ment, nous semble-t-il, aux faits identiques constatés, par exemple, dans le sud de l'Oural, où des roches présentant le même facies et la même faune que nos calcaires de Visé reposent immédiatement sur du calcaire qui ne diffère en rien de notre calcaire Frasnien dans la région où le facies calcareux de cet étage atteint, chez nous, son maximum de développement.

Malgré ces réserves de détail, j'estime que le travail de M. le chanoine Bourgeat mérite de figurer dans les publications de la Société scientifique, et j'en propose l'impression dans nos Annales.

Rapport de M. de la Vallée Poussin : Le travail de M. le Chanoine Bourgeat tend à démontrer que les fossiles caractéristiques d'un étage dans un pays donné peuvent descendre ou monter dans d'autres étages, dans des régions plus ou moins éloignées.

Nous pensons qu'il en est ainsi quelquefois. Il y a des fossiles qui sont dans ce cas, tandis qu'il en est qui restent sensiblement au même niveau dans des pays très distants l'un de l'autre ; par exemple les ammonites du lias qu'on retrouve dans le même ordre en Souabe d'une part et de l'autre dans l'Inde anglaise d'après Waagen .Je me rallie sur ces points aux conclusions de mon savant confrère M. de Dorlodot. Comme lui d'ailleurs, je pense que l'auteur fait des confusions relativement au carbonifère franco-belge. Néanmoins, je crois que la communication de M. Bourgeat offre de l'intérêt et mérite de figurer dans nos Annales.

Conformément à la décision des rapporteurs la section vote l'insertion aux Annales du mémoire de M. le chanoine Bourgeat.

Elle décide en même temps de communiquer à l'auteur les deux rapports qui viennent d'être lus sur son travail.

La section entend une communication du R. P. Dierckx sur *Un Essai de revision du genre* Penicillium Link :

Depuis deux ans j'ai entrepris, par la méthode des cultures pures, la monographie du genre *Penicillium* Link, auquel se rattachent les moisissures les plus communes.

Tous les types recueillis sur les matières organiques en décomposition, sur les fruits, les fromages et d'autres produits indigènes ou étrangers, sur les plaques de culture et dans les collections mycologiques sont repiqués et maintenus en séries parallèles et

pendant plusieurs générations successives, sur sept milieux de culture, dans des conditions rigoureusement identiques de nutrition, de température et de lumière.

Quand, après plusieurs repiquages, le type ne varie plus, le support, l'endroit et le revers des cultures sont figurés *en couleur* à tous les stades caractéristiques, de manière que pour chaque espèce supposée, l'on ait une quinzaine d'aquarelles d'après nature. De plus, un fragment du thalle est recueilli, fixé et dissocié pour les préparations microscopiques, au moment où la formation des capitules sporifères s'achève; les fructifications sont dessinées à l'appareil d'Abbe avec un grossissement *uniforme* de 500 diamètres (obj. apochr. 2.0 / 1.30 × oc. comp. 4 Zeiss), enfin les dimensions des spores, des stérigmates et des hyphes conidiennes sont prises au micromètre.

Cette méthode suivie pour plus de 3000 repiquages m'a conduit aux conclusions suivantes :

1. Pour le genre *Penicillium,* il n'est qu'exceptionnellement possible d'identifier sans culture préalable un type rencontré par hasard sur un support quelconque. En effet, l'aspect des moisissures varie beaucoup suivant les circonstances où on les observe.

2. Sur les milieux de culture choisis comme " réactifs ", les caractères observés sont de deux sortes. Après un, trois, dix passages, certains caractères qui paraissaient d'abord nettement distinctifs s'effacent : il y a des numéros de la série qui convergent jusqu'à se confondre. D'autres caractères, d'abord masqués par des influences de voisinage et de milieu, s'accusent bientôt et se conservent nettement tranchés, malgré l'identité absolue des conditions de culture sur des milieux riches : il y a des numéros de la série qui se maintiennent à égale distance les uns des autres, malgré tous les efforts pour les ramener à un seul et même type. Les différences sont d'ordre anatomique (mycelium et fructification conidienne), et d'ordre physiologique (mode de végétation, coloration du mycelium et des conidies, pigments répandus dans le milieu).

3. Nous considérons comme espèces ou comme sous-espèces les types présentant de ces différences *bien marquées* et *constantes* dans les conditions *rigoureusement comparables et bien déterminées.* Les nouveaux noms adoptés indiquent d'ordinaire un ou plusieurs caractères différenciels.

4. Il faut renoncer définitivement à l'identification des espèces observées en culture pure, avec les espèces des anciens auteurs. Les diagnoses données par eux sont absolument insuffisantes; elles conviennent la plupart *à tous les types* du genre ou à plusieurs d'entre eux. Tout contrôle est d'ailleurs impossible, car les échantillons d'herbier ne se prêtent plus ni à l'observation directe, ni à la culture.

5. Les caractères microscopiques des hyphes sporifères divisent nettement le genre *Penicillium* en deux sous-genres, les *Aspergilloïdes* et les *Eupenicillia.* Ils ne délimitent pas toujours les espèces. Aussi faut-il, dans les tableaux dichotomiques, utiliser concurremment les caractères physiologiques manifestés sur divers milieux, dans des conditions bien déterminées.

6. Nos principaux " réactifs " sont des mélanges nutritifs *artificiels,* transparents, mis en quantité constante dans des tubes à essais inclinés; on peut aisément les reproduire dans tout laboratoire microbiologique. Les tubes inclinés ont l'avantage de présenter une nourriture maigre en haut, abondante en bas. L'aspect de la culture varie en conséquence. Le tableau suivant cite nos milieux les plus importants; dans la suite ils seront désignés par des initiales.

M = moût de bière gélatiné gélosé.
R = liquide Raulin " "
H = liquide Hayduck " "
B = bouillon légèrement acide gélatiné gélosé.

Dans cette note préliminaire, nous ne citons que les tvpes que nous avons eus en observation.

I. ASPERGILLOIDES

Hyphes sporifères cloisonnées, simples ou *lâchement* rameuses; 4 - 10 stérigmates verticillés sur le sommet *non renflé* des hyphes.

Penicillium rubro-punctatum. Spores 2 - 3,5 μ. — Stérigmates 5 - 8. — Longueur de la fructification sous le cover 15 - 20 μ. Conidies bleu pur, puis vert foncé passant au brun.

Sur M (10e jour), petits *points rouges* au revers; sur R (5e jour), ligne brune médiane qui s'élargit. — Typique.

P. CANDIDO-FULVUM. Spores 3 μ. — Stérigm. 4 - 8 de 10×2 μ. — Fructif. ± 20 μ. Sur M, R, H revers incolore devenant rose *fauve*. Spores glauques, puis brunes avec reflets violacés. — Moins caractérisé.

P. AURANTIO-BRUNNEUM. Spores 2 - 3 μ. — Stérigm. 5 - 12. — Sur tous les supports ce type diffuse un pigment *orange* intense qui passe au *brun* et s'accentue au contact des acides. — Typique.

P. CITREO-ROSEUM. Sp. 3 μ. — Stérigm. 2 - 10 de 2 × 8 μ. — Fructif. 20 - 30 μ. Hyphes sporifères lâchement rameuses. Sur M, R, H, revers d'abord intensément *jaune-citron,* puis d'un *rose carminé* éclatant qui passe au brun. Spores bleu-vert puis gris-rosé. — Typique.

P. CARMINO-VIOLACEUM. Spores ovales 2 × 3 μ. — Stérigm. *pointus* 3 - 10. — Hyphes simples ou lâchement ramifiées. Le revers et le milieu d'abord rosés sur R, H, deviennent *carmin* intense avec tons *violets* sur R. Spores bleu-gris pâle, puis vert et brun, avec îlots rosés sur R. — Typique.

P. ROSEO-PURPUREUM. Peu sporifère. Spores 2 - 3 μ, très caduques. — Stérigm. 4 - 8. — Hyphes ordinairement simples. Thalle et spores *couleur chair* persistante avec reflets bleus fugaces. Revers et milieu M, R, H, d'abord jaune et *rose* puis *pourpre carminé* intense. — Typique.

P. CITREO-NIGRUM. Spores 2 - 3 μ. — Stérigm. 3 - 10 de ± 6×2 μ. — Hyphes simples ou lâchement ramifiées. Sur M, R, revers *jaune citron* avec dessins *noirs* qui teignent le milieu. Diffusion de pigment jaune. Spores bleu-olivâtre, ensuite blanc-gris saupoudrées de jaune. — Typique.

P. CORYLOPHILUM. Spores 2 - 3 μ. — Stérigm. 5 - 6. — Hyphes simples ou à 2 - 4 rameaux verticillés. — Revers jaune citron sur M et R, verdâtre sur H, peu coloré sur R. Spores bleu-vert se fonçant pour passer au brun. — Peu caractérisé.

II. EUPENICILLIA

Hyphes sporifères cloisonnées, à fourches terminales étagées parfois nombreuses, les rameaux de la fructification naissant du sommet des cellules, isolément et latéralement, ou symétriquement par paires, rarement par verticilles de 3 - 5, et se serrant

étroitement en un faisceau pénicilloïde. Stérigmates ordinairement peu nombreux (2 - 4) sur le sommet libre non renflé des rameaux secondaires.

P. Duclauxi Delacr.? Spores très caduques ovales apiculées 2,5 × 5 μ. — Stérigm. 3 - 5 de 18 × 3 μ très pointus. — Hyphes généralement trifurquées à ± 40 μ sous le sommet. — Sur M, R, H. P. *coremiums* cylindriques *rayonnants*, assez peu sporifères. Spores vertes sur R, gris-vert sur M, passant au brun violacé sur R et M. Revers et milieu jaune, rose puis carmin brunâtre intense. — Extrêmement polymorphe et typique.

P. olivaceum Wehm.? (= *P. aeruginosum* Dierckx). Spores très inégales, ovoïdes ou subcylindriques 5 × 3 - 8 × 6. — Stérigm. 1 - 2 de ± 12 × 4 μ. — Fructif. 60 μ. — Contours irréguliers et aspect massif. — Spores glauques passant au gris *farineux*. — Sur M, R, H, revers *moucheté de rouille,* devenant brun. Donne facilement des coremiums et des sclérotes granuleux brun foncé. — Extrêmement typique.

P. minio-luteum. Spores rares ovoïdes de 3×4 μ. — Stérigm. de 8×2 μ. — Fructifications *très grêles* de ± 40 μ. — Sur M, R, H, duvet blanc peu sporifère tacheté de vert-gris. Thalle coriace à revers *jaune-rouge de minium* qui tourne au brun-gris sale. — Extrêmement typique, sur gélatine non gélosée surtout.

P. congolense. Spores ovales de 2×3 μ. — Stérigm. 1 - 4 de ± 10×3 μ. — Fructif. 60 μ. — *Formes massives.* Thalle mince, peu consistant, poudreux. Spores vert-olivâtre assez stable. Revers et milieu colorés en brun-foncé. — Moins caractérisé.

P. elongatum. Spores ovales de 3,5×2 μ peu caduques. — Stérigm. 3 - 4. — Fructif. 60 μ plus svelte que chez le *P. glaucum.* Pousse très vite. Spores glauques, vert puis brun. Revers incolore puis brun. Sur B *revers orange* avec formation précoce d'une strie brune qui s'élargit et diffuse dans le milieu. Forme des coremiums et distille beaucoup d'eau. — Typique.

P. glaucum. Link? Spores de 4 - 5 μ. — Stérigm. 3 - 4 de ± 12×3 μ. — Fructif. ± 70 μ. — Spores glauques, puis vert-brun. Revers incolore puis fauve avec reflets rosés. — Assez peu caractérisé. Très commun.

P. atro-viride. Spores 3 - 4 μ. — Stérigm. 2 - 3. — Fructif. ± 70 μ. Aspect poudreux. Spores bleu pur, bleu-vert-brun, puis brun

violacé. Revers franchement *vert*, puis *vert-brun-noir*, la couleur diffuse. — Très typique.

P. VERRUCOSUM. Spores 3 - 4 μ. — Stérigm. 3 - 4 de 10×3 μ. — Fructif. ± 100 μ. Spores bleu-pâle, bleu-foncé, puis brun violâtre. Bientôt nouvelles pousses incolores en amas *verruqueux*. Au huitième jour sur R gélatiné non gélosé revers brun-rouge-rosé très typique passant rapidement au brun. — Bien caractérisé.

P. GRISEO-BRUNNEUM. Spores 3 μ, caduques. — Stérigm. 5 - 6 de 10×3 μ. — Fructif. ± 60 μ. Spores glauques passant au brun; revers incolore puis rose-brun sale. Tendance à pousser en choufleur. — Moins caractérisé.

P. BREVICOMPACTUM. Spores 3 μ assez persistantes. — Stérigm. 4 - 6 de 8×2 μ. — Fructif. ± 30 μ, *courte mais dense*, renfermant des verticilles de 3 - 5 branches et rappelant les capitules d'*Aspergillus*. — Spores d'abord bigarrées, passant au gris brun. — Typique sous le cover.

P. GRISEO-FULVUM. Spores 3 μ, peu abondantes et caduques. — Stérigm. 8 - 10 sur rameaux verticillés par 3 - 5 et renflés en massue. — Thalle blanc, lavé de bleu pur au début bientôt *gris, puis fauve* moucheté de blanc. Revers paille, rosé, brunâtre. — Typique.

P. BIOURGEI. Spores 3 - 4 μ assez persistantes. — Stérigm. 3 - 10. — Fructif. 60 - 160 μ à rameaux assez divergents. — Spores glauque foncé passant au brun sombre avec taches blanches. Revers incolore, rosé, brunâtre. Sur fromage diffusion de noir par places.

P. BRUNNEO-RUBRUM. Spores 3 μ assez adhérentes. — Stérigm. 3 - 4. — Fructif. ± 200 μ à ramifications dichotomes très lâches. — Surface sporifère rugueuse bleu pur, puis gris-rosé brun. — Revers jaune sur H; *sur R jaune citron, puis rouge brun stable.* — Typique surtout sur Raulin gélatiné non gélosé.

P. AURANTIO-CANDIDUM. Spores légèrement ovoïdes de 3 - 4 μ *peu abondantes*. — Stérigm. 3 - 4. — Fructif ± 160 μ. — Duvet *blanc persistant* lavé de bleu ou de gris. — Sur R revers intensément orangé; sur pain entre deux plaques de verre, plages orangé rose au sixième jour. — Très caractérisé.

P. AURANTIO-GRISEUM. Spores caduques 3 - 4 μ. — Stérigm. 2 - 4 de 10×3 μ. — Fructif. 50 μ. — Sur M revers longtemps orangé : sur H bigarré, rouge-jaune-vert, puis gris. Spores d'abord glauques, puis gris de poussière moucheté de blanc. — Typique.

P. HIRSUTUM. Spores 3 - 4 μ. — Stérigm. 2 - 4. — Fructif. 60 μ. — La membrane des hyphes est *velue* sur sa face externe. Spores bleu, vert foncé, puis brun violacé où se reforment des îlots jaune, blanc. — Assez variable.

P. GRISEO-ROSEUM. Peu sporifère. Spores 3 μ. — Stérigm. 3 - 7 de 10×3 μ. — Fructif. 60 μ. Sur M et R spores bleu pur, bientôt lavé de jaune et de rose, parfois intense avec tache gris-brun Revers peu coloré.

M. F. Meunier fait part de ses dernières recherches sur quelques Cecidomyidae et Mycetophilidae de l'ambre et il décrit un nouveau genre et une nouvelle espèce de Cecidomyidae du copal de l'Afrique. MM. le Chanoine de Dorlodot et M. Proost acceptent de faire l'examen de ce travail.

M. Proost signale à la section le développement extraordinaire du *philante apivore* dans les sables bruxelliens de la vallée de la Senne et de la Dyle, développement consécutif à la multiplication des ruches dans cette région.

Le philante apivore, vulgairement appelé loup des abeilles, est une guêpe fouisseuse, voisine des *cerceris*, dont M. Proost a décrit les mœurs dans la REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES.

Tandis que les *cerceris* s'attaquent de préférence aux charançons ou aux abeilles solitaires de la famille des *halictes* (*) pour approvisionner leur nid, les *philantes* s'adonnent presque exclusivement à la chasse des abeilles domestiques, qu'elles paralysent sans les tuer au moyen d'un poison subtil introduit dans les centres moteurs avec une habileté d'anatomiste consommé. Il faut environ une demi-douzaine d'abeilles pour nourrir chaque larve de *philantus* et lui permettre d'atteindre son complet développement.

Ce *loup des abeilles* s'est multiplié cette année au point d'expulser presque tous les autres crabronides des régions qu'il habite.

(*) Ce cerceris, introuvable dans certaines régions sablonneuses, abonde ailleurs, comme à Tilly, Marbisoux. Il en est de même du *Cerceris des charançons*, très commun dans la ville de Louvain, rare dans d'autres régions voisines d'une constitution géologique analogue.

M. Proost signale ensuite les effets des gelées nocturnes de la mi-juin sur la pousse d'août. L'aoûtage de plusieurs arbres a été singulièrement entravé par suite de ce phénomène anormal. En effet, cette gelée avait été si intense qu'elle avait détruit en certains endroits non seulement les fanes des pommes de terre, mais les feuilles de plusieurs essences rustiques, comme les aulnes, les peupliers, les tilleuls et jusqu'aux nouvelles feuilles de certains chênes. Au mois d'août, l'arrêt de circulation de la sève s'est manifesté par l'atrophie ou le desséchement précoce des feuilles des mêmes arbres, particulièrement des peupliers de Canada. Au premier aspect, ces feuilles recroquevillées paraissaient atteintes par un parasite animal ou végétal. Mais l'examen microscopique qui en a été fait à Gembloux, a permis de constater qu'il n'en est rien et qu'il faut attribuer le phénomène à la misère physiologique de la plante.

M. Proost montre une dépouille de serpent trigonocéphale capture aux environs de Prétoria, il s'agit du *poff-adder (clotho arietans)* vulgairement appelé *blou-blou* par les Cafres. Ce serpent, épais et aux mouvements relativement lents, mord en se lançant à rebours sur le passant qui le dérange, contrairement aux autres trigonocéphales qui attaquent de front : il est voisin du *nacht-adder*, serpent de nuit, dont le venin, sans être mortel, engendre des souffrances cruelles avec engorgement des ganglions lymphatiques et fièvre intense Au dire des voyageurs qui ont été mordus, ces souffrances durent ordinairement neuf jours, après lesquels le mal disparaît instantanément. Il existe encore chez les Boers un serpent cracheur, *spouwerslange*, qui peut lancer, dit-on, son venin dans l'œil à une distance de deux mètres et un serpent fascinateur d'oiseaux *(boom-slange)* atteignant trois mètres de longueur, d'une livrée verte et grise, inoffensif pour l'homme. Ce serpent est très agile, mais sa rapidité n'égale pas celle du *memba*; d'un brun ferrugineux cette espèce atteint quatre mètres et poursuit les chasseurs cafres à la course.

Heureusement, ces serpents n'attaquent l'homme que quand on les dérange et s'abritent d'habitude sous des buissons épineux. Il en est de même du serpent d'or ou [illegible] (couleuvre coiffée).

Les [illegible] des Cafres abritent une couleuvre domestique qui

chasse les rats sans s'attaquer à l'homme; les Zoulous la nomment *ischlouzély*. Enfin, il existe en Cafrerie et au Transvaal plusieurs variétés de boas de grandes dimensions mais qui ne chassent guère que de petits animaux.

M. Proost montre également plusieurs insectes du Transvaal, notamment une fourmi blanche femelle remplie d'œufs dont le poids atteignait celui de vingt mille termites ouvriers environ. On sait que les termites sont des insectes *névroptères*, dont les mœurs sociales sont analogues à celles des fourmis et qu'ils élèvent, dans les déserts des régions intertropicales des deux mondes, des édifices en forme de pains de sucre ou de champignons qui atteignent parfois des dimensions considérables. En Australie, Monseigneur Salvado a rencontré plus de quatre-vingts de ces termitières sur moins d'un mille carré.

Aux îles Maurice, il a fallu remplacer l'ameublement en bois des églises par le fer, les autels, les confessionnaux et les chaires de vérité étant littéralement réduits en poussière par ces insectes qui ne révèlent leur présence à l'extérieur qu'au moment où les charpentes s'écroulent. Le bois de fer seul résiste, dit-on, à leurs attaques. Leur rôle dans la nature est de déblayer le sol des végétaux morts ou corrompus.

La reine termite en question a été trouvée dans une chambre royale d'une longueur de 15 centimètres autour de laquelle circulaient incessamment les ouvrières pour nourrir la pondeuse et recueillir ses œufs qu'elle pond à jet continu.

En terminant, M. Proost signale à la section un rapport de M. Van den Broeck, géologue de l'État, sur l'analyse des limons et la carte agronomique. M. Van den Broeck est d'accord avec M. Proost sur la nécessité de compléter les données des géologues par les analyses du sol par la plante et les analyses chimiques. M. le professeur de la Vallée Poussin partage cette manière de voir, mais il estime que l'échelle des cartes géologiques est insuffisante pour les cartes agronomiques, une même commune présentant souvent les sols les plus variés.

M. Proost répond que l'administration de l'agriculture préconise et encourage depuis longtemps la confection de ce genre de cartes et que les écoles libres d'agriculture subsidiées par l'État ont

exposé, depuis dix ans, dans diverses expositions agricoles ou universelles des échantillons qui leur ont valu les plus flatteuses distinctions.

Le rapport de M. Van den Broeck sera reproduit intégralement dans le prochain bulletin de la Revue agronomique de l'Institut agricole de l'Université de Louvain.

A la fin de la séance, le secrétaire de la section donne communication de deux travaux de M. Monier. Le R. P. Deschamps, S. J. et M. le Docteur Henseval sont nommés commissaires pour l'examen du mémoire: *Contribution à l'étude de l'action physiologique de l'alcool.*

La seconde note de M. Monier *Sur la glycolise du foie*, n'est que l'introduction d'un travail, dont les expériences ne sont pas terminées. La section décide de différer la nomination des rapporteurs jusqu'à la session de janvier 1901, époque à laquelle le mémoire complet lui sera soumis.

Quatrième section

M. le Dr Ach. Dumont entretient la section du *Traitement de l'asystolie.*

L'auteur fait d'abord une courte étude de l'asystolie elle-même. Il s'étend un peu sur ses divers symptômes : fatigue dans la marche, dans l'ascension d'un escalier ou d'une côte, sensations diverses à la région précordiale, irrégularité et inégalité du pouls, apparition de l'œdème aux membres inférieurs, respiration pénible même à l'état de repos, agitation du malade. Il explique ensuite que le malade asystolique doit tenir son thorax vertical parce qu'ainsi la cage thoracique peut prendre sa plus grande ampliation pour faciliter l'hématose et favoriser la circulation pulmonaire. Les malades éprouvent des insomnies impossibles à vaincre par un hypnotique : ils ont des troubles des fonctions gastriques, la sécrétion urinaire est diminuée. L'œdème enfin fait des progrès considérables se répandant dans les cavités séreuses et dans l'épaisseur des organes.

Pour remédier à cette pénible situation, la digitale est une arme précaire contre l'action défaillante du cœur. Les médicaments ne produisent plus d'effets à cause du mauvais état général de l'organisme.

Il n'y a qu'une indication à remplir, c'est de diminuer à tout prix l'obstacle à la circulation en donnant issue au liquide qui noie l'organisme et dont l'insuffisance du cœur accroît chaque jour le flot montant.

L'auteur fait table rase de tous les médicaments cardiaques et diurétiques proprement dits : les drastiques donnent de bons effets, mais il faut préférer des incisions à la partie inférieure de la jambe. Ces incisions se pratiquent en s'entourant de tous les soins de propreté, au moyen d'une lancette qu'on enfonce à un centimètre de profondeur et dans toute sa largeur. Il s'écoule pendant plusieurs jours une énorme quantité de liquide de ces incisions. Sous cet effet tous les symptômes s'améliorent : on a l'illusion de la guérison.

M. Dumont cite ensuite plusieurs cas cliniques intéressants à l'appui de son procédé, qui lui a toujours donné du succès. — Il estime qu'il faut ne pas attendre un œdème plus prononcé pour pratiquer ces incisions.

Ce travail donne lieu à une discussion à laquelle prennent part MM. les Drs Swolfs, Warlomont, qui font valoir réciproquement la valeur de la saignée et des stimulants. M. le Dr Cuylits croit qu'il convient de citer le mérite des injections de morphine, qui sont rationnelles eu égard aux accidents symptomatiques et systématisent les battements. La morphine agit comme tonique du cœur par son action sur les ganglions qui innervent le cœur : en congestionnant la base du cerveau, elle excite le cœur.

La communication de M. le Dr Dumont paraîtra *in extenso* dans la seconde partie des ANNALES.

M. le Dr Van Hoeck rapporte plusieurs cas de *diabète* en insistant sur les différences de régime à accorder à ces malades.

M. le Dr Delcroix montre des radiographies intéressant des cas rares de *luxations de l'épaule* chez des enfants.

Le Dr Cuylits entretient la section de l'épidémie actuelle de fièvre typhoïde qui règne à Molenbeek-Saint-Jean et du régime de la Senne et du canal qui s'y rattache étroitement.

Que la cause première de l'épidémie ait été l'état de siccité de la Petite Senne répandant pendant de longues semaines ses effluves fétides, il n'y a aucun doute. Mais l'épidémie est encore disséminée par groupes dans Molenbeek et si, ici encore, le point de départ est la Petite Senne, d'autres causes telles que les eaux de puits insalubres, l'accumulation de gens malpropres dans des réduits étroits et inhabitables y participent.

La question se complique singulièrement quand il s'agit de savoir comment rendre à la Petite Senne l'eau qui lui manque, comment surélever l'eau dans le canal de Charleroi, qui lui aussi par le fait de l'abaissement de ses eaux a mis à nu des berges putrides et développé la fièvre typhoïde le long du quai des Charbonnages.

Il suffit de faire baisser les vannes du barrage du midi pour déceler la complexité et l'organisation invraisemblable du régime des eaux dans le bas de la ville.

Abaisser ces vannes, c'est alimenter la Petite Senne qui en a bien besoin, mais c'est du coup priver la ville des chasses d'eau qu'exigent ses grands collecteurs des boulevards du centre, c'est rendre invraisemblable l'état de la Senne à travers l'agglomération dans la partie non voûtée, c'est entraver le service des chemins de fer à la gare du Nord car toutes les machines s'alimentent au château d'eau de cette gare et ce château d'eau puise toutes ses ressources dans cette Senne que l'on met à sec, c'est en même temps forcer au chômage toutes les fabriques qui s'alimentent à la Senne en deçà et au delà de ce château.

Et le canal ? Le canal, sous peine de diminuer son niveau d'eau, doit s'alimenter à la Petite Senne. Et la Petite Senne, sous peine de rester ce cloaque infect que nous avons vu, doit être largement pourvue. Il faut que les vannes du midi soient baissées, il faut qu'elles soient levées. C'est le problème de la porte « il faut qu'elle soit ouverte ou fermée ! »

Et ces vannes peut-on au moins les approprier pour départager les eaux ? Impossible, répondent les services techniques.

A côté de ces difficultés techniques, que de problèmes juri-

diques ! Le canal appartient actuellement à la Société des Installations maritimes. Mais celle-ci doit-elle par cela même entretenir les berges ; ces berges lui appartiennent-elles ? à qui les rives de la Petite Senne, cours d'eau non navigable ? Aux riverains, disent quelques-uns. Mais en cas d'insalubrité, c'est la commune qui doit y ordonner des travaux sous la surveillance de la province.

M. Cuylits envisage ces diverses difficultés pour dire en conclusion les propositions provisoires et définitives qu'en sa qualité de rapporteur il a exposées à la Commission médicale provinciale.

Ces conclusions jusqu'ici ont été adoptées par les divers comités compétents qui ont été consultés.

Cinquième section

La séance est ouverte à 9 h. 1/2 sous la présidence de M. le professeur Ernest Dubois, président.

M. Emile Vliebergh expose à la section les résultats d'une étude très consciencieuse sur la *Fixation du taux des fermages en Irlande*, et sur l'histoire presque inconnue en Belgique, de ces luttes agraires qui remontent jusqu'au XIIe siècle. La législation qui régit les rapports entre landlords et tenanciers agricoles commence à partir de 1860 et s'est développée jusqu'en 1896. La loi agraire la plus importante est celle de 1881. Elle consacre les réclamations populaires connues sous le nom de *System of the 3 F's : Fair rent*, droit pour le tenancier, comme pour le propriétaire, de faire fixer de quinze en quinze années le taux du fermage par la commission agraire instituée par la loi ; — *Fixity of tenure*, droit du fermier de demeurer locataire de la ferme aussi longtemps qu'il paiera le fermage fixé par la commission ; — *Free Sale*, droit pour le tenancier de vendre son droit de bail à un successeur de son choix, que le propriétaire est obligé d'accepter comme fermier. Les lois postérieures n'ont fait que développer le principe de la loi de 1881, soit en l'appliquant à de nouvelles catégories de fermiers, soit en simplifiant la procédure.

On évalue les tenanciers irlandais au nombre de 425 000, dont 77 % ont profité de la loi des 3 F. Cette législation n'est pas parfaite, et son application laisse parfois à désirer ; mais la situation

exceptionnelle de l'agriculture irlandaise l'avait rendue nécessaire. Elle peut soulager provisoirement la crise; elle ne saurait la résoudre définitivement. Tout le monde est d'accord en Irlande pour n'attendre cette solution que de la propriété paysanne.

Le gouvernement aide le paysan à devenir propriétaire de la ferme qu'il occupe en lui avançant le capital d'achat avec facilité de le rembourser en annuités à très long terme. L'avantage de la fixation du taux des fermages est d'amener plus facilement le landlord à vendre aux tenanciers les terres qu'ils occupent en quelque sorte malgré lui.

M. Edmond Carton de Wiart voulut bien communiquer à la cinquième section des notes très intéressantes, recueillies au cours d'un récent *Voyage au Brésil*, accompli dans un but d'études approfondies. Au point de vue politique, la situation de la grande république sud-américaine est loin d'être brillante : la décentralisation y est poussée à ce point que chacune des 21 provinces ou états qui composent la fédération est en fait absolument indépendante de l'autorité du gouvernement central; la vie parlementaire s'épuise en luttes stériles entre des syndicats d'intérêts personnels, pour le plus grand détriment de l'intérêt général; quant à la magistrature et aux fonctionnaires, mieux vaut n'en rien dire. L'absence complète d'énergie et de sentiment du devoir civique dans cette population bâtarde, ne permet pas d'espérer une réorganisation prochaine de la vie politique. Au point de vue économique, on ne peut pas dire que le Brésil soit actuellement prospère; les incessantes fluctuations du change enlèvent toute sécurité aux transactions commerciales, et cette instabilité est elle-même une conséquence de la déplorable administration du pays.

Cependant, il ne faut pas désespérer de l'avenir du Brésil: ses richesses minières sont immenses et n'attendent que les voies de communication qui doivent en rendre l'exploitation à fleur de terre extrêmement rémunératrice; les réserves de caoutchouc des provinces du Nord et du Centre sont incalculables, mais là encore les moyens de transport font défaut. Ce serait une spéculation hardie, mais très probablement heureuse, que d'entreprendre au Brésil la construction de chemins de fer ou l'organisation d'un service de navigation fluviale dans le genre de ce qui a été fait

par les Belges au Congo. Les Belges sont très appréciés au Brésil, on en rencontre partout ; la Belgique arrive au quatrième rang parmi les nations qui font le commerce avec le Brésil. Un fait important pour l'avenir est l'extension croissante de l'influence déjà très considérable que possèdent au Brésil les Allemands, les Américains du Nord et les Anglais, entre les mains de qui se trouve le grand commerce. Les Italiens y sont nombreux mais sans influence, car ils n'y exercent que les petits métiers. Chose curieuse, on rencontre au Brésil assez bien de Syriens, commerçants heureux et généralement riches.

ASSEMBLÉE GÉNÉRALE

L'assemblée générale a eu lieu à 2 h. 1/2 à l'Hôtel Ravenstein, sous la présidence de M. Goedseels, administrateur-inspecteur de l'Observatoire Royal de Belgique.

M. Léon De Lantsheere, professeur à l'Université de Louvain et membre de la Chambre des Représentants, y a fait une conférence sur l'*Histoire naturelle de la peine*. En voici le résumé :

Les institutions juridiques peuvent être étudiées à deux points de vue différents. On peut les considérer comme un ensemble de règles qui s'appliquent à des cas donnés. Rechercher cette application dans les hypothèses les plus variées est l'office propre du juriste. Mais on peut les envisager aussi comme des phénomènes naturels qui prennent naissance dans la société. A ce titre, on peut se demander quelles conceptions diverses ont présidé à leur formation, quel esprit les anime chez différents peuples, quelle est leur succession; on peut se proposer même de trouver les lois qui président à leur évolution. C'est ainsi qu'on peut essayer d'étudier la peine au point de vue purement naturel, comme un simple fait social. On tâchera alors d'en déterminer les caractères essentiels, d'en définir les formes diverses, de fixer les phases qui ont présidé à ses transformations.

Une théorie en faveur actuellement prétend être arrivée à découvrir cette loi. On peut la résumer comme suit. A l'origine se trouve la vengeance, qui a sa racine biologique dans le mouvement réflexe

et instinctif de défense, propre à tous les êtres vivants. La vengeance, individuelle, familiale ou collective se transforme peu à peu en talion; puis se développe en un système plus ou moins compliqué de composition pécuniaire. Enfin l'État finit par absorber en lui le soin de la défense sociale, les vengeances privées disparaissent et la vindicte publique subsiste seule désormais. Ces idées semblent ne pas tenir compte de tous les faits; elles négligent bien des facteurs importants dans l'histoire de la peine. On a tâché de les compléter de diverses manières. Les travaux de MM. Durckheim, Mauss, Tarde, Steinmetz, Makarewicz, Löffler, etc., fournissent à cet égard des indications précieuses.

Il est nécessaire avant tout de définir exactement ce qu'on entend par *peine*. C'est toujours une réaction sociale exercée par une autorité sociale sur un individu soumis à cette autorité sociale. Tout au contraire, la vengeance suppose une réaction qui s'exerce entre des êtres complètement indépendants entre eux. La vengeance est une réaction qui se produit entre souverains, au sens originaire du mot. Elle est représentée aujourd'hui par la guerre, qui en est un succédané. Les différentes phases qu'a traversées la vengeance ne sont donc nullement des transformations graduelles de la vengeance en peine; elles ne sont que les stades successifs de l'extinction de la vengeance. Celle-ci peut coexister avec le système pénal et y suppléer parfois: mais les deux institutions ne se confondent pas; l'une se développe à l'inverse de l'autre. Les éléments primitifs de la peine sont les peines familiales, celles appliquées par le chef de tribu, les peines religieuses et les rites expiatoires. Ils coexistent dans presque toutes les sociétés primitives. L'évolution de la peine résulte de la prédominance que prend l'un ou l'autre de ces éléments, combinée avec les changements ou la disparition de la vengeance privée. Il n'est pas possible de déterminer la loi de ces changements graduels : cette loi dépend de l'évolution générale de la société, qui modifie dans un sens variable les conditions qui font disparaître ou prédominer telle ou telle forme de peine.

Après la conférence, M. Goedseels remercie et félicite le conférencier, et déclare close la session d'octobre 1900.

SESSION DU JEUDI 31 JANVIER 1901

A BRUXELLES

SÉANCES DES SECTIONS

Première section

M. Goedseels fait connaître une simplification de la méthode de Cauchy pour la résolution des équations linéaires, en nombre surabondant, de la théorie des erreurs. Après discussion, la section vote l'impression de cette note de M. Goedseels dont voici le texte :

« Nous nous proposons d'indiquer dans ce travail une simplification de la méthode de Cauchy.

A cet effet, nous rappellerons d'abord la méthode en l'appliquant à des équations de condition à trois inconnues

$$(1) \qquad \begin{array}{l} a_{11} x + b_{11} y + c_{11} z + m_{11} = 0, \\ a_{12} x + b_{12} y + c_{12} z + m_{12} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{1n} x + b_{1n} y + c_{1n} z + m_{1n} = 0, \end{array}$$

sans entrer dans aucune justification au sujet des calculs.

La première équation finale s'obtient en rendant tous les coefficients de x positifs, et, en additionnant ensuite les équations de condition membre à membre.

Nous représenterons cette première équation finale par

$$(2) \qquad a_1 x + b_1 y + c_1 z + m_1 = 0.$$

On déduit de là

$$(3) \qquad x = - y \frac{b_1}{a_1} - z \frac{c_1}{a_1} - \frac{m_1}{a_1}$$

On introduit ensuite cette valeur de x dans chacune des équations (1), et l'on trouve une série d'équations de la forme

$$y\left(b_{1s} - a_{1s}\frac{b_1}{a_1}\right) + z\left(c_{1s} - a_{1s}\frac{c_1}{a_1}\right) + \left(m_{1s} - a_{1s}\frac{m_1}{a_1}\right) = 0$$

s variant de 1 à n.

Nous désignerons ces équations par

$$b_{2s}y + c_{2s}z + m_{2s} = 0,$$

On traite ces nouvelles équations de la même manière que l'on a traité les équations (1). On trouve ainsi la deuxième équation finale

$$b_2 y + c_2 z + m_2 = 0, \tag{4}$$

et ainsi de suite.

La méthode de Cauchy adopte pour valeurs des inconnues les solutions des équations (2), (4), etc... dont le nombre est évidemment égal à celui des inconnues.

C'est dans la formation des équations finales qui suivent l'équation (2), que réside notre simplification.

Il est facile de voir que si l'on fait la somme des coefficients tels que $b_{1s} - a_1 \frac{b_1}{a_1}$ on obtient

$$b_1 - a_1\frac{b_1}{a_1} = 0.$$

Mais, cette somme peut être décomposée en deux parties renfermant l'une, les coefficients de la série $b_{11}, b_{12}, b_{13}, \ldots$ correspondant aux équations multipliées par -1 ; et l'autre, les coefficients restants. On a donc, en désignant ces deux parties respectivement par b'' et b',

$$b' + b'' = 0.$$

On a, en outre,

$$b_2 = b' - b''.$$

Donc

$$b_2 = 2b' = -2b''.$$

La même propriété

$$c_2 = 2c' = -2c''; \qquad m_2 = 2m' = -2m''$$

existe pour les autres termes qui figurent dans l'équation (4). Il résulte de là qu'il est inutile d'additionner ensemble toutes les équations telles que

$$b_{2i}\,y + c_{2i}\,z + m_{2i} = 0,$$

après avoir rendu tous les coefficients de y positifs, et qu'on peut former l'équation (4) en additionnant seulement soit les équations où il y a des coefficients positifs, soit les autres équations.

Il est à peine besoin de remarquer qu'on additionnera, dans la pratique, le groupe qui renferme le moins d'équations.

La même simplification se présente pour la formation des équations finales suivantes.

Exemple. Soient les équations :

$$\begin{aligned} x + y + z + 1 &= 0, \\ 2x - 2y + 2z - 1 &= 0, \\ 3x + y - z &= 0, \\ 2x - 2y + 3z + 2 &= 0. \end{aligned}$$

La première équation finale est

$$8x - 2y + 5z + 2 = 0.$$

On en déduit

$$x = \frac{1}{4}y - \frac{5}{8}z - \frac{1}{4}.$$

Introduisant cette valeur dans les équations de condition, on trouve

$$\begin{aligned} \frac{5}{4}y + \frac{3}{8}z + \frac{3}{4} &= 0, \\ -\frac{6}{4}y + \frac{6}{8}z - \frac{6}{4} &= 0, \\ \frac{7}{4}y - \frac{23}{8}z - \frac{3}{4} &= 0, \\ -\frac{6}{4}y + \frac{14}{8}z + \frac{6}{4} &= 0. \end{aligned}$$

La somme des termes de chaque colonne est égale à zéro. Par conséquent, il suffit d'additionner la première équation et la troisième, ou la deuxième et la quatrième. On trouve ainsi

$$3y - \frac{20}{8}z = 0,$$

d'où

$$y = \frac{10}{12}z.$$

En introduisant cette valeur de y dans les quatre équations précédentes on trouve

$$\frac{68}{48}z + \frac{3}{4} = 0$$

$$-\frac{24}{48}z - \frac{6}{4} = 0$$

$$-\frac{68}{48}z - \frac{3}{4} = 0$$

$$\frac{24}{48}z + \frac{6}{4} = 0$$

Ici encore, la somme de la première et de la quatrième équation

$$\frac{92}{48}z + \frac{9}{4} = 0$$

conduit au même résultat que si l'on avait changé les signes des équations où z a un coefficient négatif et additionné ensuite les quatre équations. „

M. Pasquier fait les communications suivantes :

1° Il attire l'attention sur un abaque, construit par M. Suttor et destiné à déterminer la puissance des machines à vapeur.

Cet abaque, qui a paru dans le cours autographié de l'auteur (*)

(*) Louvain, chez Giele, 1900.

et dans les MÉMOIRES DE L'UNION DES INGÉNIEURS DE LOUVAIN (*), a été dressé entre les limites, déjà très étendues, que voici :

La puissance de la machine varie de 1 à 2000 chevaux;

Le nombre de coups de piston par minute, de 40 à 400;

Le volume engendré par le piston par course, de 1 à 2000 litres;

La longueur de la course, de $0^m,25$ à $1^m,8$;

Le diamètre du piston, de $0^m,1$ à $1^m,5$;

La tension de la vapeur entrant au cylindre, de 4 à 13 atmosphères;

Le degré d'admission, de 0,025 à 0,9;

La contrepression, en kilogrammes par centimètre carré, de 0,1 à 1,033.

Jusqu'en ces derniers temps, l'application, d'ailleurs très fréquente, de la formule sur laquelle M. Suttor a fondé son abaque nécessitait des calculs passablement fastidieux et pénibles. Dorénavant, ces calculs seront complètement épargnés aux ingénieurs de l'État, chargés du service des machines à vapeur, spécialement à ceux des chemins de fer, du corps des mines et du corps des ponts et chaussées, les administrations dont relèvent ces ingénieurs ayant eu soin de mettre entre leurs mains, dès son apparition, l'abaque que vient de dresser M. Suttor.

2° M. Pasquier signale une note de M. d'Ocagne *sur la résolution nomographique de l'équation du 7e degré*, insérée dans les COMPTES RENDUS DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS, 17 septembre 1900.

Dans cette note, l'auteur montre que cette résolution est nomographiquement possible, contrairement à ce qu'on aurait pu penser à la suite d'une communication faite par M. Hilbert au Congrès des mathématiciens à Paris, au mois d'août dernier : la divergence apparente des deux auteurs provient de ce que la solution, indiquée par M. d'Ocagne, adopte un mode de représentation nomographique que M. Hilbert n'avait pas en vue.

3° M. Pasquier note l'introduction en Espagne, à partir du 1er janvier, de l'heure de Greenwich. Il espère que cette nouvelle adhésion amènera définitivement le vote du Sénat français en faveur du projet de loi Boudenot, adopté à l'unanimité par la

(*) Quatrième fascicule, 1900.

Chambre des députés depuis le 24 février 1898 et ayant pour objet d'unifier l'heure française avec les heures de presque tous les pays civilisés.

4° M. Pasquier signale la fondation récente d'un Cercle mathématique d'étudiants à l'Université de Louvain; l'existence de ce Cercle, à l'état de projet depuis une couple d'années, est spécialement due à M. Van Emelen, docteur en sciences, l'un des membres assidus de la première section.

5° M. Pasquier propose de fixer une date à laquelle *les principes de la mécanique* seraient soumis à une nouvelle discussion.

La section décide que cette question sera mise à l'ordre du jour de la session de Pâques.

M. Dutordoir donne lecture de la communication suivante de M. Mansion *sur la géométrie non euclidienne chez Gauss.*

1. *Préliminaires.* La Société royale des Sciences de Goettingue a publié récemment le huitième volume des *Œuvres* de Gauss où l'on a réuni (pp. 157-268) tout ce que le grand géomètre a écrit sur les premiers principes de la géométrie : comptes rendus, lettres et notes inédites.

Nous nous proposons, dans la présente note, de montrer, d'après des passages de ce volume des Œuvres de Gauss (*) et de divers articles de MM. Stäckel et Engel dans les MATHEMATISCHE ANNALEN 1° que la géométrie non euclidienne a été trouvée indépendamment de toute influence étrangère par ceux qui y sont arrivés avant Riemann : Gauss (1777-1855), Schweikart (1780-1859), Lobatchefsky (1793-1856), Jean Bolyai (1802-1860), 2° que pour Gauss les idées de Kant sur l'espace sont incompatibles avec l'existence de la géométrie non euclidienne.

Par géométrie non euclidienne, nous entendons ici celle de Lobatchefsky où la somme des trois angles d'un triangle est inférieure à deux droits.

2. *Notations.* Pour abréger, nous désignons par les lettres S, D, L_1, L_2, H, T, M, P, K les théorèmes ou groupes de théorèmes suivants :

(*) Les renvois à ce volume sont indiqués, dans ce qui suit, par la lettre G suivie du n° de la page.

S. *Théorème de Saccheri* (1733). Deux droites d'un plan, en géométrie non euclidienne, se rencontrent, sont asymptotes, ou ont une perpendiculaire commune à partir de laquelle elles divergent.

D. *Théorème du déficit ou de Lambert* (1766, publié en 1786). L'aire d'un triangle est proportionnelle à son déficit angulaire, c'est-à-dire à la différence entre deux droits et la somme de ses angles.

L_1, L_2. *Les deux théorèmes de Legendre.* 1° La somme des angles d'un triangle n'est pas supérieure à deux droits (1798; G, 192). 2° La somme des angles de tous les triangles est égale à deux droits, si elle l'est dans un seul (1808, publié en 1833).

H. La géométrie des *horicycles* sur une *horisphère* est euclidienne.

T. Trigonométrie lobatchefskienne.

M. Formules générales pour la *mesure* des longueurs, des aires et des volumes.

P. Principes fondamentaux relatifs aux figures géométriques primitives : sphère, cercle, plan, droite.

K. Contrairement à l'opinion de Kant, l'espace n'est pas une forme innée de l'entendement; la géométrie emprunte comme la mécanique quelque chose à l'observation.

3. *Connaissances de Gauss en géométrie non euclidienne jusqu'en 1816.* Les recherches de Gauss sur les principes de la géométrie datent en partie de 1792 (G, 238, 221, 213, 200). On peut conjecturer qu'il connaît dès lors S, sujet sur lequel on a retrouvé quelques indications dans ses papiers (163-164, 202-209) et qui est d'ailleurs le préliminaire indispensable de tout le reste.

Gauss est arrivé au théorème D en 1794 (G, 266) : on possède plusieurs indications sur la manière dont il le démontrait (G, 220-229).

En 1797, il a prouvé la possibilité du plan (G, 162) et l'on a une esquisse de sa démonstration ainsi que celle de diverses propositions du commencement de la géométrie (G, 193-199, 200).

En 1799, Gauss écrit dans son journal : *in principiis geometriae egregios progressus fecimus* (G, 162). Il est probable que c'est à cette époque qu'il a vu de mieux en mieux les conséquences du théorème D (G, 159-160, 165-166). C'est au moyen de l'une de ces conséquences qu'il réfute la première démonstration du postulatum due à Legendre (G, 167-169).

Gauss a aussi indiqué sans peine les défauts de trois autres démonstrations du postulatum dues à W. Bolyai (G, 160-162), Schwab et Metternich (G, 170-174); mais il n'est pas difficile de réfuter ces démonstrations, même si l'on ne connaît pas les théorèmes S et D.

4. *Connaissances de Gauss en géométrie non euclidienne de 1816 à 1832.* Gauss n'a pas trouvé en une fois tous les principes de la géométrie non euclidienne (G, 200, 213, 221). Il est probable que c'est vers 1816 qu'il est arrivé à la trigonométrie non euclidienne, T. En effet, 1° Wachter (1792-1817) (*), qui l'a vu en 1816, et qui lui envoie en décembre une mauvaise théorie des parallèles, lui parle du théorème H qu'il a trouvé par induction, et, à ce propos, il fait mention de la géométrie non euclidienne et de la *trigonométrie transcendante* de Gauss (175-176).

2° Gerling (1788-1864) apprend à Gauss en 1819, que Schweikart a trouvé à Kharkof, entre 1812 et 1816, un système de géométrie non euclidienne, dont il lui envoie un résumé contenant S, D partiellement, et K. Gauss s'en réjouit et lui dit qu'il connaît cette géométrie; il a été plus loin que Schweikart; il sait résoudre, à une constante près, *tous* les problèmes de cette géométrie. Cela implique évidemment la connaissance de T (G, 178-182).

3° Un passage de la réfutation de la théorie des parallèles de Müller (1822) présuppose la connaissance de T (G, 183-185; dernières lignes de la page 184, ligne 1 de la page 185) (**).

4° En 1824, Gauss écrit à Taurinus sur la géométrie non euclidienne et lui dit de nouveau qu'il sait résoudre tous les problèmes y relatifs (G, 187-189).

5° On peut aussi citer des lettres de Gauss à Bessel et à Schumacher (G. 200-201, 210-219), mais elles pourraient être récusées. En effet, Taurinus a publié en 1826, ses *Geometriae prima elementa,* et il les a très probablement envoyés à Gauss. Or on y trouve S, D, T et partiellement M, bien que Taurinus ne croie pas à la géométrie non euclidienne.

(*) Mathematische Annalen, LIV, pp. 50-51.

(**) Voir notre article sur ce point dans le Jahresbericht der Deutsche Mathematiker-Vereinigung, VII, pp. 156-158.

5. *Gauss et Lobatchefsky.* Lobatchefsky a trouvé en 1816 L_1, L_2 (*), en 1826, S, D, H, T, M, K; il publie ses recherches en 1829-1830, puis sous une forme plus complète en 1835-1838, en y joignant P. Jusqu'à sa mort, il n'a cessé de répandre ses idées dans diverses publications. Gauss a eu, après 1832, connaissance de *tous* les écrits de Lobatchefsky; il déclare sa méthode différente de la sienne; il le fait nommer correspondant de la Société royale des sciences de Goettingue (G. 232, 235-239).

6. *Gauss et les Bolyai.* 1° Gauss n'a pas communiqué ses idées sur la géométrie à Wolfgang Bolyai (1775-1856), père de Jean; il se contente de réfuter sa mauvaise théorie des parallèles (G, 159-162); 2° Jean Bolyai trouve la géométrie non euclidienne en 1823 et, dès 1825, elle a sa forme définitive en magyar (MATHEMATISCHE ANNALEN, XLIX, p. 154-157); 3° Elle est publiée (1832) sous forme d'*Appendix* au premier volume du *Tentamen* de son père. L'*Appendix* contient S, D, H, T, M, K; le *Tentamen* P; 4° Aussitôt que Gauss reçoit l'*Appendix,* il écrit à Gerling : *Je tiens ce jeune géomètre Bolyai pour un* GÉNIE DE PREMIER ORDRE (G, 220). Il écrit ensuite à W. Bolyai que le livre de son fils est admirable et que la méthode et les résultats coïncident absolument avec sa méthode et ses résultats; il exhorte Jean Bolyai à pousser plus loin les recherches sur les volumes. Enfin, il déclare qu'il est désormais inutile que lui, Gauss, écrive sur la géométrie non euclidienne, puisque le fils de son vieil ami l'a devancé d'une manière si remarquable (220-229, 231-235).

7. *Gauss et Kant.* Aucun des inventeurs de la géométrie non euclidienne n'a vu aussi clairement que Gauss l'inanité des vues de Kant sur l'espace (G, 169, 172, 177, 182, 187-189, 200-201, 224, passim 240-249, 268). On trouve aussi un passage essentiel sur ce sujet, dans le tome II des Œuvres de Gauss, p. 177 (**).

(*) Vassilief, *Journal de Schlömilch,* t. XL, Supplément, pp. 229-230; ou JAHRESBERICHT DER DEUTSCHEN MATHEMATIKER VEREINIGUNG, IV, pp. 88-90.

(**) Quelques passages du tome VIII que nous n'avons pas cités plus haut contiennent L, et des théorèmes voisins (G, 190-192), la réfutation d'une démonstration du postulatum due à Lubsen (G, 230-231), enfin des notes de géométrie différentielle sur la sphère, difficiles à apprécier sous la forme fragmentaire où Gauss les a laissées.

Il est ensuite donné lecture du rapport suivant de M. De Tilly sur le Mémoire intitulé : *Sur l'emploi des tables de Siacci pour résoudre les problèmes du tir, dans le cas des grands angles de projection et lorsque la vitesse est supérieure à 300 mètres,* par M. le comte de Sparre.

L'auteur de ce Mémoire a étudié, pour les différentes vitesses comprises entre 300 et 1500 mètres par seconde, la marche du facteur $F(v)$, qui dépend de la vitesse, dans l'expression de la résistance de l'air au mouvement des projectiles.

Il en a déduit une loi, vraiment simple et remarquable, exprimée par la formule

$$F(v) = av + b,$$

c'est-à-dire par une expression linéaire, dans laquelle a est nécessairement positif, mais b est négatif.

En comparant les valeurs de $F(v)$, calculées au moyen de la formule ci-dessus, à celles qui sont données dans une note de M. Siacci (dont les travaux font autorité en Balistique), on remarque que l'erreur relative commise en substituant les unes aux autres n'atteint jamais un centième.

M. de Sparre fait observer, avec raison, que la loi de la résistance de l'air n'est pas connue avec une approximation plus grande, et que d'ailleurs l'erreur commise sera inférieure à l'influence de la variation de la densité de l'air avec l'altitude. On peut donc, dans les limites de vitesse indiquées, employer cette formule linéaire aussi bien que n'importe quelle autre formule.

On sait, depuis d'Alembert, que le problème balistique se réduit aux quadratures lorsque la résistance de l'air s'exprime par un binôme de la forme $av + b$; mais il ne suffit pas de réduire le problème aux quadratures; il faut diriger les opérations de manière à aboutir à des résultats pratiques, remplacer les quadratures par des tables, et autant que possible par des tables déjà construites.

C'est ce que l'auteur a réalisé, au moyen d'une méthode d'approximation dans laquelle il néglige le carré de la *variation* de l'inclinaison et qui ramène à l'emploi des tables de Siacci.

Il termine son Mémoire par une application numérique au tir d'un projectile lancé sous un grand angle de projection et avec une grande vitesse initiale.

J'ai l'honneur de proposer l'insertion du Mémoire de M. de Sparre dans les publications de la Société.

Cette proposition est adoptée. Le Mémoire de M. le comte de Sparre sera publié dans la seconde partie des ANNALES.

Le R. P. Bosmans fait une communication préliminaire, qu'il développera dans une session ultérieure, sur la Trigonométrie de Ticho-Brahé et sur ses procédés de calcul.

Deuxième section

—

M. le Secrétaire donne lecture d'une lettre du R. P. Leray qui, sur les occupations très nombreuses dont il est chargé en ce moment, s'excuse de ne pouvoir accepter les fonctions de commissaire pour l'examen du mémoire de M. Ferron : *Contributions à la théorie mathématique de la lumière et de la chaleur.*

Le R. P. Thirion, second commissaire pour l'examen du même mémoire, adresse également une lettre dans laquelle il prie la section de bien vouloir lui adjoindre un second rapporteur pour le même mémoire.

La section désigne M. A. Witz, qui accepte cette mission.

M. Louis Henry est inscrit pour une communication *Sur la volatilité comparée dans les séries des dérivés hydrocarbonés des hydrures* H_nX *des divers types.*

Il rappelle d'abord que les hydrocarbures peuvent être regardés comme les composés primordiaux de la chimie organique. Les composés carbonés en général s'y rattachent directement; ils peuvent être regardés comme en dérivant par une substitution plus ou moins complète à l'hydrogène de radicaux X, simples ou composés. Ces radicaux X ne sont en général que des fragments des

divers hydrures H_nX : ils en représentent la molécule moins un ou plusieurs atomes d'hydrogène.

Hydrures.	Radicaux dérivés.
HCl	Cl
H_2O	HO -, O<
H_3N	H_2N -, HN<, N<̣

M. Henry restreindra son examen aux dérivés des hydrocarbures saturés C_nH_{2n+2} ou des *paraffines,* et dans ceux-ci aux dérivés dits *normaux* qui se rattachent aux *paraffines normales* elles-mêmes de la formule générale $H_3C - (CH_2)_n - CH_3$, lesquelles renferment la chaîne carbonée la plus simple C - C - C - C - . . . , etc. c'est-à-dire la chaîne rectiligne, sans ramifications d'aucune sorte. Il aura exclusivement en vue les *dérivés mono-substitués* ou *mono-atomiques, primaires,* de la formule générale $XCH_2 - (CH_2)_n - CH_3$.

L'hydrogène étant l'élément dont le poids atomique est le plus faible et en même temps l'élément gazeux *par excellence* — Éb. — 238°, il s'ensuit que tout dérivé $C_nH_{2n+1}X$ de substitution d'un hydrocarbure est moins volatil que l'hydrocarbure primitif lui-même.

CH_4	Éb. — 164°	H_3CCl	Éb. — 23°
		$H_3C - OH$	+ 66°
		$H_3C - NH_2$	— 6°
		$H_3C - SH$	+ 6°

Il s'agit de rechercher, autant que faire se peut, les règles ou les lois qui régissent ce fait général sur l'importance duquel il serait superflu d'insister.

On peut étudier la *volatilité comparée* des dérivés $C_nH_{2n+1}X$ à deux points de vue distincts :

A. La volatilité dans les dérivés *de même nature* $C_nH_{2n+1}X$ aux divers étages de la série de carburation des paraffines.

B. La volatilité dans les dérivés $C_nH_{2n+1}X$ de *nature différente,* dans les mêmes conditions.

A. — Volatilité comparée dans les dérivés d'un MÊME ORDRE $C_nH_{2n+1}X$.

On peut établir à ce sujet les propositions générales suivantes :

1° La diminution de volatilité déterminée dans un hydrocarbure C_nH_{2n+2} par l'introduction d'un radical X à la place de H est d'autant plus considérable que le poids moléculaire de l'hydrocarbure est plus faible ou, ce qui revient au même, que l'élévation déterminée dans le poids moléculaire de l'hydrocarbure par cette substitution, est plus considérable.

2° Toutes choses égales d'ailleurs, cette diminution de volatilité se montre, dans bien des cas, proportionnelle à l'augmentation dans le poids moléculaire.

Les *éthers chlorhydriques* primaires et normaux $C_nH_{2n+1}X$ offrent un exemple intéressant de cette relation.

Étage C_3

	P. M.		Éb. absolu.	
C_3H_8	44	> 34,5	233°	> 85°
C_3H_7Cl	78,5		318°	
Augmentation °/o	78,40		36,47	

Étage C_4

C_4H_{10}	58	> 34,5	274°	> 77°
C_4H_9Cl	92,5		351°	
Augmentation °/o	60		28,10	
Selon la proportion en C_3			27,91	

Étage C_5

C_5H_{12}	72	> 34,5	311°	> 69°
$C_5H_{11}Cl$	106,5		380°	
Augmentation °/o	48		22,18	
Selon la proportion en C_3			22,32	
— — en C_4			22,48	

M. L. Henry fait remarquer à cette occasion que les dérivés $XCH_2 - (CH_2)_n - CH_3$, de même que les paraffines elles-mêmes, ne sont réellement et strictement comparables au point de vue moléculaire qu'à partir de l'étage C_3 inclus. Les termes en C_2 et en C_1 surtout, l'éthane et le méthane, occupent une place à part et s'éloignent de leurs congénères ; leurs formules représentatives font bien ressortir cette différence

$$
\begin{array}{l}
XCH_3 \\
XCH_2 - CH_3 \\
XCH_2 - CH_2 - CH_3 \\
XCH_2 - CH_2 - CH_2 - CH_3 \\
\ldots\ldots\ldots \\
XCH_2 - (CH_2)_n - CH_3.
\end{array}
$$

Aussi la substitution d'un radical X à H détermine-t-elle aux étages C_1 et C_2 des élévations dans les points d'ébullition qui ne sont pas en rapport avec celles que détermine la même substitution à partir de l'étage C_3.

Voici ce qu'il en est pour la substitution chlorée.

Étage C_1

	P. M.		Éb. absolu	
CH_4	16	> 34,5	109°	> 141°
CH_3Cl	50,5		250°	
Augmentation °/o	215,62		129,35	

Étage C_2

C_2H_6	30	> 34,5	183°	> 102°
C_2H_5Cl	64,5		285°	
Augmentation °/o	115		55,73	
Selon la proportion en C_1			122,31	

Étage C_3

Augmentation °/o	36,47
Selon la proportion en C_1	83,39
— — en C_2	37,39

Les poids moléculaires des *paraffines* C_nH_{2n+2} de même que les poids moléculaires de leurs dérivés en général $C_nH_{2n+1}X$ constituent une progression arithmétique dont la raison est 14, - CH_2. Cette différence constante entre deux termes voisins représente une augmentation proportionnelle dans le poids moléculaire d'autant moins considérable que l'on s'élève plus haut dans l'échelle de carburation.

Il résulte de là

3° Que les différences de volatilité que l'on constate entre une paraffine C_nH_{2n+2} et son dérivé de substitution $C_nH_{2n+1}X$, de même que les différences de volatilité entre deux paraffines voisines C_n et C_{n+1}, ou leurs dérivés de substitution correspondants, vont en s'affaiblissant à mesure que l'on s'élève davantage dans l'échelle de carburation.

Voici ce qu'il en est depuis l'étage C_1 jusqu'à l'étage C_8 inclus, pour les paraffines normales et leurs dérivés chlorés primaires $ClCH_2 - (CH_2)_n - CH_3$.

Paraffines normales $CH_3 - (CH_2)_n - CH_3$	Ébullition.		Différence.	Dérivés chlorés $ClCH_2 - (CH_2)_n - CH_3$	Ébullition.	
CH_4	— 164°	> 79°	141°	CH_3Cl	— 23°	> 35°
C_2H_6	— 85°	> 45°	97°	C_2H_5Cl	+ 12°	> 34°
C_3H_8	— 40°	> 41°	86°	C_3H_7Cl	+ 46°	> 31°
C_4H_{10}	+ 1°	> 37°	76°	C_4H_9Cl	+ 77°	> 29°
C_5H_{12}	+ 38°	> 33°	68°	$C_5H_{11}Cl$	+ 106°	> 27°
C_6H_{14}	+ 71°	> 28°	62°	$C_6H_{13}Cl$	+ 133°	> 26°
C_7H_{16}	+ 99°	> 26°	60°	$C_7H_{15}Cl$	+ 159°	> 20°
C_8H_{18}	+ 125°		54°	$C_8H_{17}Cl$	+ 179°	

On remarquera même que les différences constatées entre termes voisins ou correspondants vont aussi en s'atténuant à mesure que l'on s'élève plus haut dans l'échelle de carburation.

On aperçoit ainsi combien est étroite la relation qui existe dans les séries de carburation entre la *volatilité* et le *poids moléculaire.*

B. — Volatilité comparée dans les dérivés D'ORDRE DIVERS $C_nH_{2n+1}X$.

1° On observe entre les dérivés substitués d'ordre divers $XCH_2 - (CH_2)_n - CH_3$ des rapports de volatilité du même ordre que ceux que l'on constate entre les hydrures dont les radicaux substituants X sont les fragments.

La substitution de ces radicaux à H détermine dans les paraffines une élévation dans le point d'ébullition d'autant plus considérable que les hydrures correspondants sont eux-mêmes moins volatils.

A ce titre, les alcools $C_nH_{2n+1} - OH$ occupent une place à part parmi les dérivés de substitution $C_nH_{2n+1}X$ en général et se font remarquer, comme l'eau parmi les hydrures, par l'élévation relative de leur point d'ébullition.

HH	Éb.	— 238°	H_3CH	Éb.	— 164°
HCl		— 84°	$H_3C - Cl$		— 23°
$H - NH_2$		— 33°	$H_3C - NH_2$		— 6°
$H - SH$		— 63°	$H_3C - SH$		+ 6°
$H - OH$		+ 100°	$H_3C - OH$		+ 66°

2° Les différences de volatilité existant entre dérivés XC_nH_{2n+1} correspondants, tout en étant de même ordre en général, sont toutefois loin d'être de même valeur absolue que celles que l'on constate entre les hydrures correspondants.

Dans la plupart des cas elles sont moins considérables qu'entre ceux-ci où elles atteignent leur maximum.

HCl	Éb. — 84°	> 184°	H_3CCl	— 23°	> 89°
$H - OH$	+ 100°		$H_3C - OH$	+ 66°	
$H - NH_2$	— 33°	> 133°	$H_3C - NH_2$	— 6°	> 72°
$H - OH$	100°		$H_3C - OH$	+ 66°	
$H - SH$	— 63°	> 163°	$H_3C - SH$	+ 6°	> 60°
$H - OH$	+ 100°		$H_3C - OH$	+ 66°	

Dans d'autres cas au contraire elles sont plus considérables.

Ainsi en est-il dans les dérivés haloïdes ordinaires (Cl, Br, I) :

HCl	Éb. — 84°	> 16°	H_3C - Cl	Éb. — 23°	> 27°
HBr	— 68°	> 32°	H_3C - Br	+ 4°	> 38°
HI	— 36°		H_3C - I	+ 42°	

3° Quelle qu'en soit la nature par rapport aux hydrures correspondants, les différences s'atténuent, à mesure que l'on s'élève dans l'échelle de carburation.

Ainsi en est-il de la volatilité des éthers haloïdes par rapport à celle des hydracides halogénés aux divers étages. Ex. :

Étage C_2

H_5C_2Cl	Éb. 12°	> 27°
H_5C_2Br	39°	> 33°
H_5C_2I	72°	

Étage C_5

$H_{11}C_5$ - Cl	Éb. 106°	> 22°
$H_{11}C_5$ - Br	128°	> 27°
$H_{11}C_5$ - I	155°	

Étage C_7

$H_{15}C_7$ - Cl	Éb. 159°	> 19°
$H_{15}C_7$ - Br	178°	> 25°
$H_{15}C_7$ - I	203°	

A cette occasion, M. L. Henry attire l'attention sur les différences de volatilité que l'on constate entre les *hydroxydes* (alcools) et les *hydrosulfures* (mercaptans) aux divers étages de la série de carburation. La différence énorme de volatilité que l'on constate entre l'eau et l'hydrogène sulfuré

HOH	Éb. 100°	> + 163°
HSH	— 63°	

contrairement aux rapports naturels de volatilité qui existent entre O et S. O Éb. - 181°; S Éb. 448°, tient à la présence de

l'hydrogène. Maintenue dans une certaine mesure entre les hydroxydes et les hydrosulfures, elle disparaît dans les *oxydes* et les *sulfures* entre lesquels se constatent les rapports normaux de volatilité.

O_2C	Éb. — 78°
S_2C	+ 45°
$(H_3C)_2O$	— 13°
$(H_3C)_2S$	+ 38°

Il arrive ainsi que la richesse en hydrogène diminuant dans les paraffines à mesure qu'elles sont moléculairement plus carbonées, les différences de volatilité entre les alcools et les mercaptans s'atténuent à mesure que l'on s'élève dans l'échelle de carburation.

Alcools		Différences	Mercaptans	
H_3C - OH	Éb. 66°	60°	H_3C - SH	Éb. 6°
H_5C_2 - OH	78°	42°	H_5C_2 - SH	36°
H_7C_3 - OH	97°	30°	H_7C_3 - SH	67°
H_9C_4 - OH	116°	19°	H_9C_4 - SH	97°
$H_{11}C_5$ - OH (actif)	128°	10°	$H_{11}C_5$ - SH	118°
. . . . . .	. . . .	. . . .	. . . . . .	. . . .
$H_{15}C_7$ - OH	175°	± 0.	$H_{15}C_7$ - SH	176°-175°.

Il est probable que dans les étages supérieurs, plus fortement carbonés, les différences de volatilité changent de signe. C'est dans le but de contrôler expérimentalement la vérité de cette prévision que M. L. Henry a préparé le *mercaptan octylique* normal C_8H_{17} - SH. Il a trouvé que ce produit bout à 198°-200°, à peu de chose près comme l'*alcool octylique lui-même.* N'ayant pas eu à sa disposition des alcools plus carbonés, il n'a pas été à même de pousser assez loin ses investigations concernant cette intéressante question.

4° L'élévation déterminée dans le point d'ébullition d'une paraffine par la substitution à H d'un radical X, tient, pour une part,

à l'augmentation que détermine cette substitution dans le poids moléculaire. Mais elle se rattache à d'autres circonstances encore, et notamment au *degré d'énergie* de ce radical et par conséquent, à l'intensité du phénomène thermique qui accompagne la fixation de ce radical sur C à la place de H.

Diverses circonstances le démontrent.

a) A la suite de la substitution à H de radicaux X, fonctionnellement équivalents, mais de poids atomique divers, et d'énergie négative diverse, les élévations dans les points d'ébullition d'une paraffine tout en étant plus considérables, au point de vue absolu, au fur et à mesure que ces radicaux ont un poids atomique plus élevé, diminuent cependant d'intensité, toutes choses égales d'ailleurs, c'est-à-dire proportionnellement aux augmentations dans les poids moléculaires, à mesure que ces radicaux sont moins énergiques, dans leur caractère négatif.

Ainsi en est-il dans les éthers haloïdes, - Cl, - Br, - I.

H_3CH	Éb. — 164°	+ 141°
H_3C - Cl	— 23°	168°
H_3C - Br	+ 4°	206°
H_3C - I	+ 42°	

Les chiffres 141°, 168°, 206°, qui représentent, au point de vue absolu, les élévations dans le point d'ébullition du méthane résultant de la substitution à H, de Cl, Br, et I sont, proportionnellement aux augmentations dans le poids moléculaire de CH_4, des quantités de plus en plus faibles.

Transformation de CH_4 en	Augmentation °/₀ dans le poids moléculaire	Augmentation °/₀ dans le point d'ébullition absolu, considéré en lui-même	Augmentation °/₀ dans le point d'ébullition absolu, selon la proportion	
H_3CCl	215,62	129,35		
H_3CBr	493,75	154,58	de Cl	296,19
H_3CI	787,50	190,82	de Cl	472,41
			de Br	246,54

Il y aurait à faire une constatation du même genre en ce qui concerne la volatilité de HCl Éb. - 84°, de HBr Éb. - 65°, HI Éb. - 34° par rapport à celle de HH Éb. - 238°.

b) Des radicaux de poids à peu de chose près égaux, mais d'intensité négative diverse, déterminent par leur substitution à H, des dérivés $C_nH_{2n+1}X$, fort rapprochés quant à leur poids moléculaire, mais fort éloignés quant à leurs points d'ébullition.

Il en est ainsi des radicaux - OH et - NH_2

$$-OH = 17; \qquad -NH_2 = 16.$$

On sait quelle différence existe entre les alcools et les amines primaires, au point de vue de la volatilité.

	PM.	Éb.	
H_3CH	16	— 164°	
H_3C-NH	31	— 6°	> 72°
H_3C-OH	32	+ 66°	

Il est important de faire remarquer, une fois encore, que ces différences s'atténuent à mesure que l'on s'élève dans l'échelle de carburation.

H_5C_2-OH	Éb. 78°	> 59°
$H_5C_2-NH_2$	19°	
H_9C_4-OH	116°	> 40°
$H_9C_4-NH_2$	76°	
$H_{13}C_6-OH$	157°	> 29°
$H_{13}C_6-NH_2$	128°	
$H_{17}C_8-OH$	195°	> 21°
$H_{17}C_8-NH_2$	174°	

5° L'influence du poids du radical substituant est encore mise en évidence par les différences de volatilité que l'on constate entre les dérivés correspondants, formés par la substitution à H

de radicaux divers X et X', faisant partie d'hydrures de volatilité à peu près semblable.

Ainsi en est-il des *amines mono-substituées* C_nH_{2n+1} - NH_2 par rapport aux *éthers iodhydriques* $C_nH_{2n+1}I$.

H - I	Éb. — 34°	I	=	127
H - NH_2	— 33°	H_2N	=	14

Les *iodures d'alcools* sont beaucoup moins volatils que les *amines correspondantes*.

Étage C_1

	Éb.	Différences	
H_4C	— 164°	+ 206°	> 48°
H_3C - I	+ 42°	+ 158°	
H_3C - NH_2	— 6°		

Étage C_2

	Éb.	Différences	
H_6C_2	— 85°	+ 157°	> 53°
H_5C_2 - I	+ 72°	+ 104°	
H_5C_2 - NH_2	+ 19°		

Étage C_3

	Éb.	Différences	
H_8C_3	— 40°	+ 142°	> 53°
H_7C_3 - I	+ 102°	+ 89°	
H_7C_3 - NH_2	+ 49°		

. . . .

Étage C_6

	Éb.	Différences	
$H_{14}C_6$	+ 69°	+ 110°	> 49°
$H_{13}C_6$ - I	+ 179°	+ 61°	
$H_{13}C_6$ - NH_2	+ 130°		

On voit que ces différences restent à peu de chose près les mêmes aux divers étages de la série de carburation, quoique les radicaux I et - NH_2 représentent des fractions fort différentes du poids moléculaire des composés où l'on en constate la présence.

On voit d'ailleurs que les diminutions déterminées dans la volatilité d'un hydrocarbure par les radicaux I et - NH_2 remplaçant H, sont loin, dans leurs différences, d'être proportionnelles aux différences dans les poids des radicaux I et - NH_2. L'influence du caractère négatif, plus accentué dans - N que dans I se fait une fois encore sentir.

6° Je ferai remarquer enfin qu'il arrive que des radicaux *divers*, différents de poids et différents d'énergie chimique, déterminent parfois des dérivés correspondants, d'une volatilité presque identique, aux différents étages de la série de carburation.

Ainsi en est-il de Br et de - SH, fragments d'hydrures très rapprochés dans leurs points d'ébullition.

HBr	Éb. — 65°	H_2S	Éb. — 63°
Br	= 80°	SH	= 33°

Les *bromures d'alcools* $C_nH_{2n+1}Br$ ont à peu de chose près le même point d'ébullition que les *mercaptans* correspondants C_nH_{2n+1} - SH.

H_3C - Br	Éb. + 4°5	H_3C - SH	Éb. + 6°
H_5C_2Br	+ 39°	H_5C_2 - SH	+ 36°
H_7C_3Br	+ 71°	H_7C_3 - SH	+ 68°
H_9C_4Br	+ 100°	H_9C_4 - SH	+ 98°
$H_{15}C_7Br$	+ 178°5	$H_{15}C_7$ - SH	+ 175°
$H_{17}C_8Br$	198°-200°	$H_{17}C_8$ - SH	+ 198°

En résumé, on voit qu'il y a à tenir compte en ce qui concerne la volatilité comparée dans les dérivés $C_nH_{2n+1}X$, de trois circonstances fondamentales : le poids des radicaux substituants X, leur degré d'énergie négative et finalement la volatilité des hydrures H_nX dont ces radicaux sont des fragments.

M. Kennis fait ensuite sa communication sur un *mode de production de gaz pauvre destiné à fournir la lumière par incandescence, le chauffage et la force motrice.* Il s'attache d'abord à montrer dans la constitution de la flamme papillon du gaz de houille, l'explication de ce fait que cette flamme est à une température notablement plus basse que celle des gaz pauvres. Il fait ensuite ressortir

l'économie considérable réalisée par le gaz à l'eau tant au point de vue de l'établissement de l'usine qu'à celui de la faible consommation de charbon.

A ces avantages, tous les chimistes présents à la séance opposent l'effrayante toxicité de l'oxyde de carbone dont la teneur est élevée dans le gaz à l'eau.

M. Kennis fait observer que ce gaz est employé à l'hôpital de Vienne à l'entière satisfaction de tous.

Les membres cités plus haut estiment que l'on ne peut guère comparer un établissement, comme un hôpital de grande ville, surveillé par une multitude de savants, à une commune où le gaz est livré à l'usage d'une foule ignorante et négligente.

La discusion continuera à la prochaine réunion de la section.

M. Georges Lemoine a constaté que le chlorure de méthyle se décompose complètement lorsqu'on le fait passer sur du carbure de calcium chauffé au rouge sombre. Il se produit du chlorure de calcium mêlé d'un dépôt de charbon et il se dégage un gaz combustible qui n'est absorbé ni par le brome ni par l'acide sulfurique bi-hydraté, ni par le chlorure cuivreux : il donne en brûlant de l'eau et de l'acide carbonique. Ce gaz sera analysé ultérieurement.

M. L. Henry termine la séance en donnant des renseignements circonstanciés sur la Fondation Nobel. Il annonce qu'il se propose de faire un article dans la Revue des Questions scientifiques sur cette institution, unique dans l'histoire des sciences.

Troisième section

La section prend connaissance des rapports de M. le chanoine de Dorlodot et de M. Proost, sur le mémoire de M. Meunier : *Recherches sur quelques Cecidomyidae et Mycetophilidae de l'ambre.*

Rapport de M. le Chanoine de Dorlodot. Le mémoire de M. Fern. Meunier intitulé : *Nouvelles recherches sur quelques Cecidomyidae et Mycetophilidae de l'ambre, etc.,* est le résultat d'observations faites sur un très grand nombre de spécimens. Ce mémoire, qui

a demandé à l'auteur une grande somme de travail, paraît fait avec soin. Il contient beaucoup de faits nouveaux et intéressants. J'en propose avec plaisir l'insertion dans nos *Annales,* ainsi que des deux planches, fort bien dessinées, qui l'accompagnent.

Je ne puis néanmoins me dispenser d'accentuer une observation, qui a été présentée déjà par M. de la Vallée Poussin, lorsque M. Meunier a résumé son travail en séance. Les dépôts renfermant les célèbres gisements d'ambre des environs de Koenigsberg, appartiennent à l'oligocène ou à l'éocène le plus supérieur. L'auteur considère néanmoins l'ambre lui-même comme d'âge *paléocène.* Il serait à désirer que l'auteur exprimât, dans son texte, ou en note, les raisons qui lui font adopter, sur l'âge de l'ambre, une manière de voir opposée à l'opinion commune. Sans quoi il s'expose à faire naître dans l'esprit du lecteur un sentiment de surprise et même de défiance.

Rapport de M. Proost. Je me rallie aux conclusions de M. le professeur H. de Dorlodot. J'ajouterai que le mémoire de M. F. Meunier témoigne de brillantes facultés d'observation, et j'estime que la Société scientifique de Bruxelles ne saurait trop encourager des travaux de l'espèce.

Un mémoire communiqué par M. F. Meunier : *Contribution à la faune des Mymaridae ou atomes ailés du succin* est envoyé à l'examen de M. le chanoine de Dorlodot.

Le R. P. Bolsius fait une communication préliminaire sur l'*Haementeria costata,* et sur la fécondation hypodermique; il se propose de développer ultérieurement cette étude.

Le R. P. Hahn et M. le docteur Henseval sont chargés de l'examen de deux travaux de M. M. Monier sur la glycolyse du foie et sur un sérum contre le syngame de la trachée (maladie des oiseaux).

A la demande de M. Monier, la section accepte l'insertion au bulletin de la séance de la note ci-dessous transmise le 8 janvier 1901.

« Il y a quelque temps, M. Ch. Richet de Paris, démontra

l'efficacité dans la tuberculose du suc de viande crue, obtenu sous forte pression, mais il ne fit point connaître le principe actif de ce produit. En répétant les expériences de l'éminent physiologiste, j'ai reconnu que le suc de viande de bœuf, séché à la température ordinaire, gardait ses propriétés bienfaisantes, tandis qu'il les perdait irrévocablement, chauffé au delà d'une quarantaine de degrés. Ces propriétés sont caractéristiques des ferments solubles. Conduit par ces faits, je suis parvenu à isoler, sous forme d'une fine poudre blanche, du suc de viande de bœuf extrait sous pression, un ferment soluble que je considère comme étant le principe actif de cet extrait de viande. „

Quatrième section

—

La séance s'ouvre à 10 heures. La section avait à son ordre du jour deux communications, l'une de M. le Docteur Laruelle à propos du *Traitement de la blennorrhagie,* l'autre de M. le Docteur De Lantsheere sur l'*examen des yeux dans les traumatismes oculaires.*

Cinquième section

—

La séance est ouverte à 9 1/2 heures, sous la présidence de M. Léon Joly, vice-président.

M. Leplae, professeur à l'Université catholique de Louvain, fait une conférence sur *Les emplois industriels de l'alcool,* éclairage, chauffage, force motrice.

Cette conférence paraîtra dans la seconde partie du tome XXV des Annales. En voici un résumé :

Les industries qui de nos jours ont fait entrer l'alcool dans leurs moyens de production deviennent de plus en plus nombreuses, au point que l'on est obligé pour les distinguer de les classer en catégories. Il y a, en effet, des industries qui transforment l'alcool en un autre produit industriel : il y en a qui l'emploient dans une

phase de leur fabrication pour le régénérer ensuite ; d'autres enfin l'utilisent comme véhicule permanent.

Mais l'alcool employé dans l'industrie doit être dénaturé. Ainsi le veut l'État guidé par des raisons fiscales et dans le but d'éviter la fraude. De là l'importance de la dénaturation et des dénaturants. Ceux-ci varient d'après les pays. En Allemagne, on emploie quatre parties de méthylène pour une partie de bases pyridiques ; en France, on emploie le méthylène ; en Suisse, l'éthylméthylacétone.

C'est en Allemagne surtout que l'alcool industriel a pris le plus grand développement. La cause en est à la fois agricole et militaire. Plus de 100 000 hectares de terres allemandes produisent uniquement la pomme de terre d'où l'on extrait l'alcool dénaturé et celui-ci en cas de guerre et de blocus des ports allemands acquerrait la plus grande importance vu les nombreux usages auxquels on peut le faire servir.

L'alcool dénaturé est, en effet, employé pour l'éclairage et le chauffage ; mais c'est surtout dans les moteurs à alcool, où il agit comme producteur de force motrice, que son histoire se montre intéressante par les grands et rapides progrès qu'il y a faits.

ASSEMBLÉE GÉNÉRALE

L'assemblée générale se tient à 2 1/2 heures à l'Hôtel Ravenstein, sous la présidence de M. G. Lemoine, membre de l'Institut et président de la Société scientifique pour l'année 1900-1901.

M. le Président rappelle d'abord les pertes cruelles que la Société vient de faire dans la personne de trois de ses membres : MM. Hermite, Vicaire et Orban de Xivry décédés tous trois dans le courant du mois de janvier 1901.

La parole est ensuite donnée au R. P. Hahn, S. J., professeur à la Faculté des sciences du Collège Notre-Dame de la Paix à Namur.

L'être vivant, qu'est-il ? Individu ou colonie ? Tel est le sujet de sa conférence. En voici le résumé :

Sur cette question, les biologistes professent les opinions les plus différentes. Les uns reconnaissent dans l'être vivant un principe d'unité, les autres prétendent que chaque être vivant est décomposable en plusieurs autres reliés entre eux comme les membres d'une colonie. On va même jusqu'à rendre chaque cellule autonome et l'animal ou la plante ne serait plus qu'un agrégat de cellules.

La solution de la question ne paraît pas devoir être la même pour tous les êtres vivants.

Chez les animaux supérieurs construits sur le type de l'homme et possédant les mêmes organes des sens que lui, il faut admettre un principe simple et inétendu.

Chez l'homme, en effet, les perceptions sensitives ne peuvent s'expliquer si elles n'affectent pas un sujet qui soit toujours identiquement le même et n'ait pas de parties. La conscience nous atteste directement cette identité du *moi* dans les perceptions sensitives. De plus, s'il y avait autant de sujets qu'il y a de sensations distinctes, il serait impossible de comparer les sensations entre elles. Car pour comparer, il faut que le même sujet perçoive les objets qu'il compare entre eux.

En particulier, la perception des formes suppose que le même sujet ait perçu chacun des traits distinctifs de cette forme. Car s'il y avait autant de sujets différents dans la vision d'une forme qu'il y a de traits dans cette forme, aucun d'eux ne pourrait percevoir l'harmonie de l'ensemble ou la proportion des parties, puisqu'il ne percevrait qu'une des parties.

Or ce n'est pas seulement l'homme qui perçoit par l'œil la forme des objets, mais aussi les animaux supérieurs. Ces animaux possèdent, en effet, le même organe de vision que l'homme, et de plus, ils sont capables de se diriger par la forme seule des objets même en dehors de toute autre sensation possible d'odeur, de saveur, comme le prouve le manège d'un chat en présence de sa forme reflétée dans un miroir.

Outre cette unité dérivée de la présence d'un principe simple, l'animal supérieur en possède une autre dans son organisme même. Non seulement, tous les organes concourent au même but, mais si nous en croyons une nouvelle théorie, les cellules qui les constituent seraient loin d'être autonomes. D'un bout de l'organisme à

l'autre, leur protoplasme formerait un tout continu, soit par une union directe, soit par des pores de passage qui existeraient dans les membranes de séparation.

Malgré son individualité, l'animal peut perdre de sa substance et, d'un autre côté, se prêter à des fusions.

Après un laps de temps variable, l'animal abandonne tout son corps particule par particule et en revêt un nouveau. Il peut même éprouver des mutilations considérables sans cesser d'être vivant.

La portion éliminée peut elle-même rester vivante; tel est le cas des ovules et des spermatozoïdes.

Les globules blancs du sang, issus primitivement de l'organisme, ont aussi la faculté de devenir libres et de former une colonie avec l'animal, à qui ils servent de balayeurs en enlevant les détritus, de policiers en détruisant les microbes vivants, de fossoyeurs en ensevelissant les microbes morts.

Les parties séparées du corps restent temporairement vivantes, même lorsqu'elles sont détachées artificiellement. Chez une grenouille, la tête, le cœur, les membres isolés manifestent des phénomènes vitaux.

D'autre part l'individualité des animaux supérieurs n'empêche pas les fusions. Sans parler de la fusion du spermatozoïde avec l'ovule, l'ovule lui-même, chez les mammifères, se greffe sur la mère et les deux êtres vivent en commun. C'est le plus bel exemple d'une colonie véritable chez les animaux supérieurs.

Les monstres doubles forment également une colonie, mais moins parfaite. Il est douteux parfois s'ils proviennent de la fusion de deux germes ou de la division accidentelle d'un seul.

Tous ces cas ne prouvent point cependant que le principe psychique, c'est-à-dire celui qui préside aux actions appelées psychiques par tous les auteurs (sensations et mouvements volontaires), puisse se diviser ou se fusionner.

Quand la partie détachée ou fusionnée ne possède point de nerfs, elle n'a pas de principe psychique et dès lors il n'y a pas lieu de parler de division ou de fusion de principe psychique. Tel est le cas des leucocytes, des ovules et des spermatozoïdes. Leur vie est purement physiologique.

L'ovule est cependant destiné à avoir un principe psychique puisque plus tard il jouira de véritables sensations.

Il ne l'a pas cependant au début avant sa fécondation, puisque suivant la nature du spermatozoïde l'ovule d'une jument, par exemple, peut devenir deux animaux bien différents, un cheval ou un mulet.

Il ne l'a pas immédiatement après sa fécondation, car les deux globules de segmentation, obtenus par sa première division, peuvent devenir chacun un individu, comme Herlitzka entre autres l'a démontré en isolant ces deux globules.

Quand la partie détachée contient des nerfs, comme dans le cas de la grenouille décapitée, les actions qu'on observe sont purement physiologiques et ne nécessitent pas un principe psychique. Rien, en effet, ne démontre qu'elles soient accompagnées de perceptions proprement dites, et elles doivent être assimilées aux réflexes aveugles et inconscients si nombreux dans les actes de la vie végétative.

Allons à l'autre extrême de la série biologique, les animaux tout à fait inférieurs ou les plantes. Il n'y a plus de principe simple, puisque ces êtres sont dénués de perceptions proprement dites. Ils ne sont donc plus des individus au même titre que les animaux supérieurs. Ce qui est constant chez eux, c'est la tendance pendant toute la vie à reproduire la même forme extérieure, malgré les changements perpétuels de leurs molécules. Cette tendance peut servir de fondement à une individualité d'un genre inférieur, qu'on devrait plutôt appeler une individualité morale, analogue à celle qu'on attribue à une société ou à une nation.

On les considérera comme individus, lorqu'ils vivent isolés, ou lorsque vivant en communauté avec d'autres, ils sont cependant capables de pourvoir immédiatement à leur subsistance si les communications viennent à être rompues. Sinon, il est plus rationnel de les traiter comme des organes.

Entre les êtres vivants supérieurs et inférieurs, se trouve toute une catégorie d'animaux dont la condition est parfois difficile à déterminer parce qu'il n'est pas manifeste qu'ils possèdent des sensations proprement dites. Leurs réactions pourraient être interprétées comme de simples réflexes physiologiques semblables à ceux qui chez nous échappent à la conscience.

C'est l'existence de tels êtres qui ne permet point aux biologistes de prendre la sensation comme base de la classification des êtres

vivants en plantes et animaux. Il a fallu recourir à des caractères plus tangibles, la présence d'une cavité digestive et la nature des aliments, sous peine de laisser la classification indécise.

Mais ces caractères sont provisoires et fondés uniquement sur l'impossibilité où nous sommes de constater directement la nature des opérations intérieures de l'être vivant. Ce qui élève vraiment certains êtres vivants au-dessus des autres, ce qui établit une distinction nette entre le règne animal et le règne végétal, c'est la présence d'une individualité capable de percevoir par des sens, de diriger ses mouvements par ses sensations, une individualité susceptible de passions, respirant l'audace ou sujette à la peur, nourrissant des sentiments de fureur et de vengeance, mais manifestant aussi de l'attachement, de l'amour et du dévouement.

SESSION DES 9, 10, 11 AVRIL 1901

A BRUXELLES

SÉANCES DES SECTIONS

Première section

Mardi, 9 avril 1901. M. le secrétaire donne lecture des lettres par lesquelles M. le vicomte de Salvert, M. le comte de Sparre et M. d'Ocagne expriment leurs regrets de ne pouvoir assister à la session jubilaire de la Société.

La section procède au renouvellement de son bureau. Sont élus

Président :	M. FR. DANIELS,
Vice-Présidents :	MM. CH.-J. DE LA VALLÉE POUSSIN,
	CL. DUSAUSOY,
Secrétaire :	M. H. DUTORDOIR.

La section propose ensuite pour sujet de concours pour l'an prochain la question suivante : *Faire une étude approfondie des travaux de Simon Stevin sur la mécanique, en les comparant aux travaux antérieurs d'Archimède et aux travaux presque contemporains de Galilée, de Pascal et d'autres savants de la même époque.*

D'après le nouvel article 14 du règlement des concours, les mémoires en réponse à cette question doivent être envoyés au secrétariat avant le 1er octobre 1902. Les mémoires en réponse à la question posée en 1900 (ANNALES, t. XXIV, 1re partie, p. 111) doivent être envoyés au secrétariat avant le 1er octobre 1901.

M. De Tilly fait rapport sur le mémoire de M. Goedseels *sur les fonctions des moyennes arithmétiques et leurs erreurs moyennes,*

présenté à la section le 25 avril 1900. Il propose à la section de voter l'impression de ce mémoire, quand il se sera mis d'accord avec l'auteur sur certaines modifications de forme à y apporter. Ces conclusions sont adoptées.

M. De Tilly fait ensuite la communication suivante *sur les Principes fondamentaux de la Mécanique :*

Bien que l'ordre du jour de la séance porte que je ferai une communication sous le titre précité, je ne me suis pas fait inscrire pour une communication semblable.

J'ai exposé d'une manière assez complète mes idées sur les principes fondamentaux de la mécanique, principalement en ce qui concerne le mouvement absolu et le mouvement relatif, dans le tome XXIV des ANNALES de la Société et je n'aurais à y revenir que si ces idées étaient combattues.

Toutefois, me basant sur la correspondance que j'ai échangée avec mon honorable et savant confrère M. Mansion, je me placerai ici dans l'hypothèse où l'on combattrait la distinction que j'ai faite entre les systèmes de comparaison immobiles et les autres, au point de vue de la règle du parallélogramme des forces, et où l'on prétendrait que l'on peut toujours admettre cette règle, fût-ce comme simple convention ou définition, même par rapport à un système de comparaison quelconque.

Le physicien anglais Tait a dit que l'on peut tout admettre, tant que l'on ne fait pas d'expériences. Bien que j'aie cité cet aphorisme dans un de mes ouvrages, parce qu'il est présenté sous une forme brève et frappante, je crois que pour le rendre complètement exact, il faut le modifier quelque peu.

Tant que l'on ne fait pas d'expériences, on peut admettre toutes les propositions qui ne sont pas contradictoires entre elles.

Or, je prétends que l'admission de la règle du parallélogramme, relativement à un système quelconque, implique contradiction. Pour que cette contradiction ne se manifestât point, dans un Traité de mécanique basé sur un pareil principe, il faudrait s'interdire absolument de parler du mouvement relatif, c'est-à-dire qu'il faudrait écarter le chapitre le plus intéressant de la mécanique.

Considérons, en effet, deux systèmes de comparaison invariables, liés chacun à trois axes rectangulaires.

Admettons que les deux systèmes d'axes restent parallèles, l'un des deux n'ayant, par rapport à l'autre, qu'une translation suivant l'axe des x. Nous ne représenterons que les axes des x des deux systèmes (X_1 et X_2) et nous appellerons ω l'accélération du système X_2 par rapport au système X_1.

X_1 ————————————

$X_2 \xrightarrow{\omega}$ ————————————

Si un point matériel M a une accélération ω_1 suivant les x, relativement à X_1, et une accélération ω_2 relativement à X_2, on aura :

$$\omega_1 = \omega_2 + \omega,$$

ce que nous formulerons en disant :

On passe de X_2 à X_1 en ajoutant ω à l'accélération;

On passe de X_1 à X_2 en retranchant ω de l'accélération.

Supposons maintenant que deux forces, P et Q, dirigées toutes les deux suivant les x, agissent simultanément sur le point matériel M.

P agissant seule donnerait l'accélération π par rapport à X_2 et $\pi + \omega$ par rapport à X_1.

Q agissant seule donnerait l'accélération ξ par rapport à X_2 et $\xi + \omega$ par rapport à X_1.

Si maintenant, faisant agir simultanément P et Q, on admet la règle du parallélogramme (ou simplement le cas particulier de l'addition des forces de même sens) par rapport au système X_1, c'est par rapport à ce système-là que les accélérations s'ajoutent. L'accélération par rapport à X_1 est donc $\pi + \xi + 2\omega$ et l'accélération par rapport à X_2 est $\pi + \xi + \omega$.

Si, au contraire, on admet l'addition des forces par rapport au système X_2, l'accélération par rapport à X_2 est $\pi + \xi$ et l'accélération par rapport à X_1, $\pi + \xi + \omega$.

Mais admettre la règle par rapport aux deux systèmes à la fois est impossible, puisque les résultats sont contradictoires.

Cependant les deux systèmes sont quelconques, et dans la manière de voir de mes adversaires, ils devraient jouir des mêmes propriétés. D'après moi, au contraire, en admettant le parallélogramme pour le système X_1, on cesse de considérer ce système comme étant absolument quelconque, on lui attribue une propriété particulière que le système X_2 ne peut pas posséder en même temps, et cette propriété particulière est ce que j'appelle l'*immobilité*.

M. Mansion fait la communication suivante *sur les Principes de la Mécanique :*

Nous avons exposé notre manière de voir relativement à ces principes dans un article sur un livre de M. Pirmez (*) et dans des séances antérieures de la section, savoir : A. ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES, 1892, t. XVI, 1re partie, pp. 81-85 (25 avril 1892). B. IBID., 1895, t. XIX, 1re partie, pp. 56-58 (31 janvier 1895). C. IBID., 1896, t. XX, 1re partie, pp. 19-20 (24 octobre 1895). D. IBID., p. 56 (30 janvier 1896).

Nous allons résumer ces communications en y ajoutant une remarque sur le théorème de Coriolis, à l'encontre de la manière de voir de M. De Tilly.

1. Par définition, *tout mouvement est relatif.* Un point E est dit en mouvement *par rapport* à un tétraèdre invariable ABCD, lorsque deux ou plusieurs des distances EA, EB, EC, ED changent (A, I; C, 1°; B et D en entier).

2. On ne donne pas de nom à la cause d'un mouvement uniforme suivant une ligne droite par rapport au tétraèdre invariable (A, II, 1).

On appelle *force,* au sens métaphysique, toute cause d'altération d'un mouvement rectiligne uniforme; *force,* au sens mathématique, la limite EF, en grandeur et en direction, du rapport de la déviation du mouvement rectiligne uniforme à la moitié du carré du temps pendant lequel cette déviation se produit, ce temps ayant pour limite zéro. Les forces mathématiques sont *relatives* au tétraèdre invariable (A, II, 2; C, 2°, I).

Le principe de l'inertie (*si un point en mouvement par rapport au tétraèdre invariable, n'est soumis à aucune force par rapport à ce tétraèdre, il se meut indéfiniment en ligne droite avec une vitesse constante et réciproquement*) est une autre forme de la définition de la force (A, II, 3 ; C, 2°, I).

En physique, on a constaté qu'il y avait des mouvements non uniformes en ligne droite, par rapport à un tétraèdre invariable;

(*) De l'unité des forces de gravitation et d'inertie. Examen critique. Gand, Hoste. 1882 (Extrait de la REVUE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE EN BELGIQUE, t. XXV, pp. 129-141, mai 1882).

autrement dit qu'il y avait des forces; autrement dit encore, que le principe de l'inertie s'applique dans la nature (C, 2°, I).

3. Un point en repos par rapport à un tétraèdre invariable n'est soumis à aucune force mathématique, bien qu'il puisse être soumis à plusieurs forces au sens métaphysique, ou *efforts*, qui se neutralisent. Un point en mouvement par rapport à un tétraèdre invariable n'ayant qu'un mouvement, qu'une déviation n'est jamais soumis qu'à une seule force mathématique, bien que le mouvement puisse provenir de plusieurs efforts exercés sur le point (A, III, 1).

Au lieu de dire qu'un point E est soumis à une force mathématique EF, on dit qu'il est soumis à deux forces EG, EH, si EF est la *diagonale* du parallélogramme EGFH. Cette convention de langage est équivalente à ce que l'on appelle le *principe de l'indépendance des effets des forces* (A, III, 2; C, 2° II).

En physique (électricité), quand la déviation produite par deux forces (au sens métaphysique), agissant simultanément sur un point n'est pas la résultante des déviations qui seraient produites séparément par chacune de ces forces, on dit que ces forces ont changé, ont influé l'une sur l'autre (A, III, 3; C, 2°, II).

4. Le principe général de la mécanique analytique de Lagrange est au fond une définition d'un *système* de *n* points soumis aux *mêmes* forces que *n* points libres (A, IV; C, 2°, III).

On a constaté que ce principe était applicable dans l'étude de la nature lorsque l'on parvenait à supprimer les liens d'un système de *n* points; mais pas plus que pour le principe 3, il n'est toujours applicable (C, 2°, III).

5. Si un tétraèdre A'B'C'D' se meut par rapport au tétraèdre ABCD, *le théorème de Coriolis* permet de déduire la déviation du mouvement de E par rapport à A'B'C'D', de celle de E, A', B', C', D' par rapport à ABCD.

Quel que soit le nombre des forces, au sens métaphysique, qui produisent les mouvements de A', B', C', D', E par rapport à ABCD, le calcul de la force mathématique à laquelle est soumis E par rapport à A'B'C'D' se fait toujours de même; le principe 3 est vrai par rapport à ce nouveau système comme par rapport à l'ancien.

En particulier, soit un point E se mouvant sur la droite AB indéfinie de manière que la loi de ce mouvement soit exprimée par

une relation AE $= x =$ une certaine fonction du temps; soit A′ un point ayant une abscisse variable X, aussi fonction du temps; la loi du mouvement de E par rapport à A′ sera donnée par A′E $= \xi = x - X$ et l'on dira qu'il est soumis à une forme x'' par rapport à A, $\xi'' = x'' - X''$ par rapport à A′ (x'', X'', ξ'' désignant des dérivées secondes par rapport au temps).

Si l'on pose $x = a + b + c$, on a $\xi = a + b + c - X$ et on peut dire que E est soumis à trois forces a'' b'', c'', par rapport à A, à quatre a'', b'', c'', $-X''$ (et non à trois $a'' - X''$, $b'' - X''$, $c'' - X''$) par rapport à A′.

6. Dans ce qui précède, pas plus que dans les notes antérieures citées plus haut, nous ne nous sommes occupés du principe de l'égalité de l'action et de la réaction (qui équivaut au fond à une définition de la masse), ou des équations de la mécanique plus générales que celles de Lagrange. Mais on peut y étendre les principes défendus ici : 1° tout mouvement est relatif à un tétraèdre invariable; 2° les principes de la mécanique rationnelle sont des définitions; 3° mais on a choisi ces définitions de manière que souvent, sinon toujours, ce qui a été défini en mécanique rationnelle se présente réellement dans la nature (A, V; C, 2° III).

M. Pasquier présente, au sujet des principes de la mécanique, les observations que voici :

1. Avec Duhamel, MM. Poincaré, Duhem, Mansion, etc., il estime que nous ne pouvons constater que des mouvements *relatifs* et que, comme l'a montré M. Poincaré, quand un phénomène comporte une explication mécanique, il en comporte une infinité.

2. De toutes ces explications, la plus simple, qui est souvent aussi la plus féconde, est généralement considérée comme la vraie explication du phénomène. Par exemple, quand on étudie l'ensemble des mouvements des corps de notre système solaire, on arrive à l'explication la plus simple en regardant le soleil comme immobile et en rapportant les mouvements au *solide stellaire* ou *aux axes absolument fixes : dans ces conditions,* les mouvements constatés obéissent aux lois de Képler ou mieux à la gravitation universelle découverte par Newton. Cette explication doit être considérée comme l'une des vérités scientifiques les

mieux établies, si la vérité scientifique est le mode le plus simple d'expliquer l'ensemble des faits étudiés.

3. D'après le procédé suivi par M. Pasquier, les axes dits absolument fixes s'introduisent dans la science en raison de la simplicité plus grande qu'acquièrent les lois, quand les mouvements constatés sont rapportés à ces axes.

4. A propos de la force, il y a lieu d'en distinguer nettement la notion mathématique et la notion physique : c'est ainsi que la concordance entre les résultats des observations et les déductions de la gravitation universelle est exclusivement mathématique et Newton ne croyait pas que la gravitation soit *physiquement* vraie. — Ce qui vient d'être dit de la gravitation peut se répéter pour la rotation de la terre : les choses se passent comme si cette rotation existait en même temps que la gravitation, mais aucun phénomène mécanique ne peut en *démontrer* la réalité *physique.*

5. Suivant les circonstances, donc suivant le but que l'on poursuit, suivant la question à résoudre, il y a lieu, en mécanique, de considérer les forces, tantôt par rapport à certains axes, tantôt par rapport à d'autres, tantôt au point de vue mathématique seul, tantôt au point de vue physique. C'est ainsi que s'il s'agit de mouvements célestes, on rapporte le mouvement tantôt au solide stellaire, tantôt aux axes dits immobiles dans l'espace, ou bien à des axes passant tantôt par le centre de gravité du système solaire, tantôt par le centre du soleil, etc., etc.; s'il s'agit de mouvements qui se produisent à la surface de la terre, le plus souvent on rapporte les mouvements à des axes liés invariablement à la terre, mais quelquefois aussi, par exemple, pour le pendule et le gyroscope de Foucault, il convient de rapporter le mouvement au système des étoiles ou aux axes absolument fixes. C'est ainsi encore que s'il s'agit uniquement de poser des formules, il suffit ordinairement de considérer la force au point de vue mathématique, mais il est souvent commode, pour l'interprétation des résultats fournis par le calcul, d'introduire la notion physique de la force, quand même cette force physique pourrait n'être que fictive.

6. C'est en se plaçant au point de vue des faits, le seul qui soit du domaine de la mécanique et de l'astronomie, qu'il y a lieu de considérer les principes de la mécanique.

Les idées de système immobile dans l'espace, de forces consi-

dérées comme causes *naturelles* de l'accélération, de points débarrassés de l'action de toute force, constituent des idées métaphysiques, des abstractions qui peuvent être exactes, mais qui, s'il est possible de s'en passer, ne doivent pas être mises à la base d'une science partiellement expérimentale comme l'est la mécanique. Dans cet ordre d'idées, qui est préconisé par M. De Tilly, la gravitation est nécessairement une force physique, tandis que l'observation ne la fournit que comme force mathématique.

7. Les principes de la mécanique sont expérimentaux et se rapportent à la force physique.

8. Le principe de l'indépendance des forces n'est nécessaire que pour le passage des forces physiques simultanées à leur résultante et réciproquement; il n'intervient pas quand on reste sur le terrain purement mathématique.

Par exemple, les attractions dont il est question dans la loi de la gravitation universelle sont purement mathématiques et les principes de mécanique n'interviennent en aucune manière dans le résultat. Il en est autrement quand on veut regarder ces attractions comme des forces physiques; on admet alors, en fait, en même temps, le principe de l'indépendance des effets des forces. Plus généralement, ce principe est à la base de toutes les équations du mouvement, dès qu'il s'agit d'un mouvement considéré comme dû à plusieurs forces physiques.

9. La vérification expérimentale *directe* des principes de la mécanique ne peut être réalisée; on ne peut en obtenir qu'une vérification *indirecte* par la conformité des résultats d'observation avec les résultats auxquels conduisent les principes fondamentaux eux-mêmes. Cette vérification indirecte elle-même ne peut être rigoureuse, car la conformité dont il vient d'être question — pour autant qu'elle soit complète — constitue uniquement la vérification, *dans leur ensemble*, et des principes fondamentaux et des lois physiques spéciales admises dans le cas particulier étudié. En d'autres termes, tout ce qu'on peut conclure, par exemple, lors de l'étude des mouvements des corps de notre système planétaire *et quand on considère la gravitation comme force physique*, c'est que *le principe de l'indépendance des effets des forces étant admis*, ces mouvements sont le plus simplement expliqués par la loi de la gravitation universelle.

En somme, les principes fondamentaux de la mécanique sont plutôt des *postulats,* analogues au postulatum d'Euclide; rigoureusement ils ne peuvent être séparément vérifiés, moins encore que le postulatum d'Euclide.

10. Le fait que les principes de la mécanique sont simples ainsi que les lois physiques auxquelles ils conduisent constitue une preuve *scientifiquement* suffisante de la vérité et de ces lois physiques et de ces principes eux-mêmes.

11. Par suite de leur nature purement expérimentale, on doit être disposé à abandonner l'un ou l'autre de ces principes le jour où les conséquences qu'on en déduirait logiquement seraient sûrement en contradiction avec l'expérience ou l'observation.

12. Les principes de la mécanique conviennent aux mouvements et aux forces considérés par rapport au solide stellaire, ou mieux par rapport aux axes absolument fixes.

13. Si le principe de l'indépendance et celui de l'égalité de l'action et de la réaction existent par rapport à un premier système d'axes, rigoureusement ils ne peuvent plus exister par rapport à un second système d'axes qui serait animé d'une accélération par rapport au premier.

Toutefois si, comme M. Pasquier l'admet avec MM. De Tilly et Vicaire, les principes de l'indépendance et de l'égalité de l'action et de la réaction existent par rapport aux axes pour lesquels a lieu la loi de la gravitation universelle, ces principes seront encore vrais, *en général,* par rapport au solide terrestre, à la seule condition de maintenir toutes les forces absolues autres que la gravitation et de remplacer celle-ci par la pesanteur terrestre. *En général*, à cause de la force centrifuge composée à laquelle il faudrait théoriquement avoir égard, mais qui, d'ordinaire, est pratiquement négligeable.

14. En résumé, M. Pasquier estime avec M. Mansion que les faits, donc les mouvements relatifs, constituent le seul point de départ scientifiquement admissible en mécanique. Son procédé, exclusivement fondé sur l'expérience et l'observation et qui paraît sensiblement différent de celui de M. De Tilly, l'amène cependant à reconnaître, avec ce dernier, que les axes dits absolument fixes jouissent, en mécanique physique, de propriétés remarquables et que c'est en particulier par rapport à ces axes qu'existent les principes fondamentaux de la mécanique.

Ces trois communications donnent lieu à un échange de vue auquel prennent part la plupart des membres de la section.

Mercredi, 10 avril 1901. Le R. P. Bosmans, S. J. s'excuse de ne pouvoir assister aux séances de la section. En conséquence, sa communication *sur la trigonométrie de Ticho Brahé* est remise à la session d'octobre.

M. Dutordoir communique à la section un travail de M. Neuberg intitulé : *Sur le quadrilatère complet.*

M. Mansion est nommé commissaire pour examiner ce mémoire.

M. Fr. Daniëls, professeur à l'Université de Fribourg (Suisse) fait une première communication *sur un système de coordonnées sphériques homogènes.*

1. Un vecteur **r** partant du centre d'une sphère (de rayon = 1) détermine sur sa surface un *point* R; tout multiple positif de **r** détermine le même point. De même une *droite* sphérique (L) est déterminée par un vecteur perpendiculaire (**l**), également partant du centre.

2. Trois points $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$, qui ne sont pas dans la même droite, déterminent un triangle sphérique (côtés : a_1, a_2, a_3, ou a_{23}, a_{31}, a_{12}; angles extérieurs A_1, A_2, A_3, ou A_{23}, A_{31}, A_{12}; hauteurs h_1, h_2, h_3). Les vecteurs des trois côtés $\mathbf{l}_1$, $\mathbf{l}_2$, $\mathbf{l}_3$ donnent le triangle polaire (côtés A_1, A_2, A_3; angles extérieurs a_1, a_2, a_3).

Des relations, fournies par les propriétés des produits interne et externe :

$$(a) \qquad \mathbf{r}_i\mathbf{r}_k = \cos a_{ik}; \qquad \mathbf{l}_i\mathbf{l}_k = \cos A_{ik}; \qquad \mathbf{r}_i^2 = \mathbf{l}_i^2 = 1;$$

$$\mathbf{l}_i\mathbf{r}_i = \sin h_i; \qquad \mathbf{l}_i\mathbf{r}_k = 0.$$

$$(b) \quad \sin a_1 . \mathbf{l}_1 = \mathrm{V}\mathbf{r}_2\mathbf{r}_3; \quad \sin a_2 . \mathbf{l}_2 = \mathrm{V}\mathbf{r}_3\mathbf{r}_1; \quad \sin a_3 . \mathbf{l}_3 = \mathrm{V}\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2$$

$$(c) \quad \sin A_1 . \mathbf{r}_1 = \mathrm{V}\mathbf{l}_2\mathbf{l}_3; \quad \sin A_2 . \mathbf{r}_2 = \mathrm{V}\mathbf{l}_3\mathbf{l}_1; \quad \sin A_3 . \mathbf{r}_3 = \mathrm{V}\mathbf{l}_1\mathbf{l}_2$$

on tire facilement les formules connues de la trigonométrie sphérique :

$$\sin a_1 \sin a_2\, \mathbf{l}_1\mathbf{l}_2 = V\mathbf{r}_2\mathbf{r}_3 . V\mathbf{r}_3\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2\mathbf{r}_3 . \mathbf{r}_3\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_1\mathbf{r}_2 ;$$

$$\sin A_1 \sin A_2\, \mathbf{r}_1\mathbf{r}_2 = V\mathbf{l}_2\mathbf{l}_3 . V\mathbf{l}_3\mathbf{l}_1 = \mathbf{l}_2\mathbf{l}_3 . \mathbf{l}_3\mathbf{l}_1 - \mathbf{l}_1\mathbf{l}_2 .$$

$$\sin a_1 \sin a_2 \cos A_3 = \cos a_1 \cos a_2 - \cos a_3 ;$$

$$\sin A_1 \sin A_2 \cos a_3 = \cos A_1 \cos A_2 - \cos A_3 ;$$

tandis que les premières équations (b) et (c) donnent

$$\sin a_1 \sin h_1 = \mathbf{r}_1 V\mathbf{r}_2\mathbf{r}_3 ; \qquad \sin A_1 \sin h_1 = \mathbf{l}_1 V\mathbf{l}_2\mathbf{l}_3$$

c'est-à-dire que les valeurs $\sin a_i \sin h_i$ et $\sin A_i \sin h_i$ sont indépendantes de i.

3. Le vecteur $\mathbf{r}$ d'un point quelconque peut être mis sous la forme :

$$\sigma\mathbf{r} = \mu_1 x_1 \mathbf{r}_1 + \mu_2 x_2 \mathbf{r}_2 + \mu_3 x_3 \mathbf{r}_3 ;$$

μ_i étant des constantes données, σ un facteur de proportionnalité *et* x_1, x_2, x_3 *les coordonnées du point.*

En multipliant par $\mathbf{l}_i$, on trouve successivement

$$\sigma . \mathbf{r}\mathbf{l}_i = \mu_i x_i . \mathbf{r}_i\mathbf{l}_i ,$$

$$\sigma . \sin \xi_i = \mu_i x_i \sin h_i ,$$

$$x_i = \frac{\sigma . \sin \xi_i}{\mu_i \sin h_i} ;$$

donc les coordonnées x_i sont proportionnelles à $\frac{\sin \xi_i}{\mu_i \sin h_i}$, ξ_i étant la distance sphérique du point au côté a_i.

Le vecteur ($\mathbf{l}$) d'une droite quelconque peut être écrit :

$$\pi\mathbf{l} = \nu_1 u_1 \mathbf{l}_1 + \nu_2 u_2 \mathbf{l}_2 + \nu_3 u_3 \mathbf{l}_3$$

ν_i étant des constantes données, π un facteur de proportionnalité *et* u_1, u_2, u_3 *les coordonnées de la droite.*

En multipliant par $\mathbf{r}_i$, on trouve successivement

$$\pi . \mathbf{l}\mathbf{r}_i = \nu_i u_i \mathbf{l}_i\mathbf{r}_i ,$$

$$\pi \sin \delta_i = \nu_i u_i \sin h_i ,$$

$$u_i = \frac{\pi \sin \delta_i}{\nu_i \sin h_i} ;$$

donc les coordonnées de la droite sont proportionnelles à $\frac{\sin \delta_i}{\nu_i \sin h_i}$, δ_i étant la distance de la droite au sommet A_i.

4. Pour que le point $\Sigma\mu_i x_i \mathbf{r}_i$ soit sur la droite donnée $\Sigma \nu_i u_i \mathbf{l}_i$, il faut et il suffit, que leur produit interne ou scalaire

$$\Sigma \nu_i \mu_i \sin h_i .\, u_i x_i$$

soit égal à zéro. L'équation de la droite devient, pourvu que $\nu_i \mu_i \sin h_i$ soit constant,

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0.$$

Pour que la droite $\Sigma \nu_i u_i \mathbf{l}_i$ passe par le point donné $\Sigma\mu_i x_i \mathbf{r}_i$ il faut et il suffit que leur produit scalaire

$$\Sigma\mu_i \nu_i \sin h_i .\, x_i u_i$$

soit égal à zéro. L'équation du point devient, pourvu que $\nu_i \mu_i \sin h_i$ soit constant :

$$x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3 = 0.$$

Nous remplirons cette condition en faisant :

$$\mu_i = 1 ; \qquad \nu_i = \sin A_i .$$

Les vecteurs du point $\Sigma\beta_i u_i = 0$ et de la droite $\Sigma b_i x_i = 0$ seront donc $\sigma\mathbf{r} = \beta_1 \mathbf{r}_1 + \beta_2 \mathbf{r}_2 + \beta_3 \mathbf{r}_3$ et $\pi \mathbf{l} = \sin A_1 .\, b_1 \mathbf{l}_1 + \sin A_2 .\, b_2 \mathbf{l}_2 + \sin A_3 .\, b_3 \mathbf{l}_3$, les facteurs de proportionnalité $\sigma^2 = \Sigma\beta_i\beta_k \cos a_{ik}$ et [illegible] $\sin A_i \sin A_k .\, b_i b_k .\cos A_{ik}$, $(i, k = 1, 2, 3)$.

Les droites (L), (L'), (L' + λL") par un point et les points $\mathbf{r}'$, $\mathbf{r}''$, [illegible] sur une droite ont les rapports $\dfrac{\sin (L' L''')}{\sin (L'' L''')} = - \lambda$, [illegible] λ ; et il est facile de démontrer les théorèmes de Pappus, Carnot et Ceva.

[illegible] aux coordonnées générales : $\sigma \mathbf{r} = \Sigma\mu_i x_i \mathbf{r}_i$ et [illegible] et nommons $\Sigma\mu_i \mathbf{r}_i$ le point-unité, $\Sigma\nu_i \mathbf{l}_i$ la droite-unité. Comme en général la droite conjuguée du point $\mu_1 x_1' \mathbf{r}_1 +$ [illegible] passant par $\mu_1 x_1' \mathbf{r}_1 - \mu_2 x_2' \mathbf{r}_2$, $\mu_2 x_2' \mathbf{r}_2 - \mu_3 x_3' \mathbf{r}_3$, [illegible] a pour équation $\dfrac{x_1}{x_1'} + \dfrac{x_2}{x_2'} + \dfrac{x_3}{x_3'} = 0$, la droite conjuguée du point-unité (1, 1, 1) sera $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Celle-ci [illegible] avec la droite-unité $\Sigma\mu_i \nu_i \sin h_i .\, x_i = 0$, dès qu'on prend [illegible] h_i constante.

[illegible] *points remarquables du triangle sphérique. Le point* [illegible] *des médianes* $\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3$ coïncide avec le point-unité, quand on suppose, comme nous le faisons, $\mu_i = 1$, [illegible] droite conjuguée $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ qui est en même

temps la droite-unité, possède le vecteur $\pi \mathbf{l}_0 = \sin A_1 . \mathbf{l}_1 + \sin A_2 . \mathbf{l}_2 + \sin A_3 . \mathbf{l}_3$ ou $\sin A_1 \cos (S - A_1)\, \mathbf{r}_1 + \sin A_2 \cos (S - A_2)\, \mathbf{r}_2$ $\sin A_3 \cos (S - A_3)\, \mathbf{r}_3$, et comme ce point ($\mathbf{l}_0 \mathbf{r}_1$ étant égal à $\mathbf{l}_0 \mathbf{r}_2$ et $\mathbf{l}_0 \mathbf{r}_3$) est à égale distance des trois sommets, c'est *le centre du cercle circonscrit.* De même $\sin A_1 . \mathbf{r}_1 + \sin A_2 . \mathbf{r}_2 + \sin A_3 . \mathbf{r}_3$ est *le centre du cercle inscrit* étant à distance égale de $\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2$ et $\mathbf{l}_3$. Le point conjugué isogonal de (x_1, x_2, x_3) est $\left(\frac{\sin^2 A_1}{x_1}, \frac{\sin^2 A_2}{x_2}, \frac{\sin^2 A_3}{x_3}\right)$. Les coordonnées du *point de Lemoine* sont donc proportionnelles à $\sin^2 A_1$, $\sin^2 A_2$, $\sin^2 A_3$; les distances aux trois côtés à $\sin A_1$, $\sin A_2$, $\sin A_3$. Le *point de rencontre des hauteurs* est $\operatorname{tang} A_1 . \mathbf{r}_1 + \operatorname{tang} A_2 . \mathbf{r}_2 + \operatorname{tang} A_3 . \mathbf{r}_3$, etc.

7. Projetons du centre de la sphère le triangle $A_1 A_2 A_3$, le point R $(x_1 x_2 x_3)$ et la droite sphérique L $(u_1 u_2 u_3)$ sur le plan tangent à la sphère au centre du cercle circonscrit, et nommons le triangle plan obtenu A'_1, A'_2, A'_3, ses hauteurs h'_1, h'_2, h'_3, le point R′ et la droite L′. On démontre, que ξ'_1, ξ'_2, ξ'_3 étant proportionnelles aux distances du point R′ aux côtés du triangle plan, et $\delta'_1, \delta'_2, \delta'_3$, aux distances de la droite L′ aux sommets du même triangle, on a

$$x_1 : x_2 : x_3 = \frac{\xi'_1}{h'_1} : \frac{\xi'_2}{h'_2} : \frac{\xi'_3}{h'_3} \quad \text{et} \quad u_1 : u_2 : u_3 = \delta'_1 : \delta'_2 : \delta'_3.$$

L'équation de la droite à l'infini, qui correspond à la droite-unité $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ est donc $\frac{\xi'_1}{h'_1} + \frac{\xi'_2}{h'_2} + \frac{\xi'_3}{h'_3} = 0$ ou $\xi'_1 \sin A'_1 + \xi'_2 \sin A'_2 + \xi'_3 \sin A'_3 = 0$.

Jeudi, 11 avril 1901. M. Pasquier communique à la section les *remarques* suivantes *sur un théorème de Möbius*, à propos de la note de M. Mansion relative à ce théorème (*).

1. M. Mansion a bien montré que vu le genre de termes dont $r \cos \theta$ et $r \sin \theta$ *peuvent* se composer, le mouvement elliptique képlérien équivaut sûrement, comme Möbius l'avait annoncé, à une infinité de mouvements circulaires uniformes. Mais il peut

(*) ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES, 1901, t. XXV, 1re partie, pp. 71-75.

être intéressant de faire voir que les quatre espèces de termes, qui entrent ainsi *théoriquement* dans $r \cos \theta$ et $r \sin \theta$, se réduisent *pratiquement* à deux espèces.

2. Dans le cas où l'on néglige dans ξ et η, les puissances de e supérieures à la seconde, ce qui conduit à remplacer $\sqrt{1-e^2}$ par $1 - \frac{1}{2}e^2$, les développements de $\frac{\xi}{a}$ et de $\frac{\eta}{a}$ se réduisent, en effet, à :

$$\frac{\xi}{a} = -\frac{3}{2}e + \left(1 - \frac{3}{8}e^2\right)\cos \zeta + \frac{e}{2}\cos 2\zeta + \frac{3}{8}e^2 \cos 3\zeta$$

$$\frac{\eta}{a} = \left(1 - \frac{7}{8}e^2\right)\sin \zeta + \frac{e}{2}\sin 2\zeta + \frac{3}{8}e^2 \sin 3\zeta.$$

On en conclut que, quand on se borne à conserver dans les développements de ξ et de η les deuxièmes puissances de l'excentricité, le mouvement elliptique képlérien équivaut à la combinaison de quatre mouvements circulaires uniformes, trois de sens direct et un de sens rétrograde.

3. Si l'on tient compte dans ξ et η des quatrièmes puissances de l'excentricité, on trouve de même, pour $\frac{\xi}{a}$ et $\frac{\eta}{a}$, les développements que voici :

$$\frac{\xi}{a} = -\frac{3}{2}e + \left(1 - \frac{3}{8}e^2 + \frac{5}{192}e^4\right)\cos \zeta + \left(\frac{e}{2} - \frac{e^3}{3}\right)\cos 2\zeta$$
$$+ \left(\frac{3}{8}e^2 - \frac{45}{128}e^4\right)\cos 3\zeta + \frac{1}{3}e^3 \cos 4\zeta + \frac{125}{384}e^4 \cos 5\zeta,$$

$$\frac{\eta}{a} = \left(1 - \frac{7}{8}e^2 + \frac{17}{192}e^4\right)\sin \zeta + \left(\frac{e}{2} - \frac{7}{12}e^3\right)\sin 2\zeta +$$
$$\left(\frac{3}{8}e^2 - \frac{69}{128}e^4\right)\sin 3\zeta + \frac{1}{3}e^3 \sin 4\zeta + \frac{125}{384}e^4 \sin 5\zeta.$$

Dans ce cas, il y a cinq coefficients a, soit cinq circonférences $C'_1, C''_1, C'''_1, C^{iv}_1, C^{v}_1$, de rayons respectifs $a\left(1 - \frac{5}{8}e^2 + \frac{11}{192}e^4\right)$,

$\frac{1}{2}ae - \frac{11}{24}ae^3$, $\frac{3}{8}ae^2 - \frac{57}{128}ae^4$, $\frac{1}{3}ae^3$, $\frac{125}{384}ae^4$, et où les durées de révolution sont entre elles comme $1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{4} : \frac{1}{5}$. Des cinq coefficients b, deux sont nuls; par suite de l'existence des trois autres, il y a lieu, pour reproduire le mouvement elliptique képlérien à l'aide d'une succession de mouvements circulaires uniformes, de considérer en même temps qu'un mouvement direct sur les cinq circonférences dont il vient d'être question, un mouvement rétrograde sur trois circonférences C_3', C_3'', C_3''', de rayons respectifs $a\left(\frac{1}{4}e^2 - \frac{1}{32}e^4\right)$, $\frac{1}{8}ae^3$, $\frac{3}{32}ae^4$. Les durées de révolution sur ces derniers cercles sont d'ailleurs les mêmes respectivement que les durées de révolution sur les cercles C_1', C_1'', C_1'''.

Si l'on fait une application à Mercure, qui est celle des planètes principales pour laquelle l'excentricité, égale à 0,20, acquiert la plus grande valeur, on trouve, en faisant $a = 1$ et en se bornant aux dix-millièmes, que les rayons des cercles C_1', C_1'', C_1''', C_1^{IV}, C_1^{V}, parcourus en sens direct, sont respectivement égaux à

0,9751, 0,0963, 0,0143, 0,0027, 0,0005

et les rayons des cercles C_3', C_3'', C_3''' parcourus en sens rétrograde, respectivement égaux à

0,0100, 0,0010, 0,0001.

M. F. Folie présente à la section un Mémoire intitulé : *Simple recherche trigonométrique de la nutation eulérienne de l'axe instantané* et en fait l'analyse.

La section décide que ce travail, où l'auteur a condensé beaucoup de ses recherches antérieures, et où il a fait connaître la bibliographie de la question, sera imprimé dans la seconde partie des ANNALES de manière à pouvoir servir de base à une discussion ultérieure, s'il y a lieu.

M. Mansion présente à la section une *Démonstration du théorème de Jacques Bernoulli.* — M. Neuberg est nommé commissaire pour examiner ce travail.

Il est donné lecture des rapports de M. le comte de Sparre et de M. de la Vallée Poussin sur le Mémoire de M. le vicomte de Salvert intitulé : *Sur une classe de quadratures de fonctions elliptiques par rapport au module.* La section vote l'impression du Mémoire dans les ANNALES, lorsque l'auteur en aura fait une nouvelle rédaction plus condensée, sans y rien supprimer d'essentiel, en partageant d'ailleurs le mémoire entre deux volumes du recueil de la Société.

M. de la Vallée Poussin présente à la section une note intitulée : *Sur les relations qui existent entre les racines d'une équation algébrique et celles de sa dérivée.* — M. Mansion est nommé commissaire pour examiner ce travail. La section décide qu'il pourra être inséré dans le dernier fascicule du tome XXV des ANNALES, si le rapport du commissaire est favorable.

M. Ferron fait une conférence sur les grandes arches en pierre et notamment sur les arches jumelles gigantesques du nouveau viaduc du Luxembourg. Un résumé de cette conférence sera publié dans la REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES.

M. Mansion fait une communication *sur les pseudométagéométries de Cayley et de Lie.* I. Von Staudt a établi les principes de la géométrie projective indépendamment du postulatum d'Euclide, mais en se basant, au fond, sur les notions d'espace à trois dimensions, de plan et de droite, lesquelles impliquent, qu'on le veuille ou non, la notion géométrique par excellence, celle de *distance.*

Cayley et ses continuateurs ont déduit des principes de von Staudt un ensemble de propriétés de points par rapport à une figure (définie elle-même par la géométrie projective) appelée *l'absolu*, composée de deux points, d'une conique ou d'une quadrique. Ces propriétés constituent la *géométrie cayleyenne.*

A presque toutes les propositions de la métagéométrie (physique mathématique générale des distances) correspondent des propositions de la géométrie cayleyenne. Celle-ci constitue donc une *interprétation presque générale* de la métagéométrie, mais elle n'est pas plus la métagéométrie elle-même que les autres interprétations géométriques de la métagéométrie ou de ses parties (interprétation due à Lobatchefsky et Bolyai, de la géométrie

euclidienne plane sur les horisphères; interprétation due à Beltrami, de la géométrie lobatchefskienne sur la pseudosphère euclidienne; interprétation due à Barbarin, de toute géométrie plane, sur des surfaces de chacune des trois géométries).

On sait d'ailleurs, par la théorie des ensembles, que toutes les propriétés de l'espace à trois dimensions, et même toutes les propriétés (réellement ou symboliquement) quantitatives de l'Univers, peuvent se représenter géométriquement sur une droite aussi petite que l'on veut. Cependant personne ne songera à dire que la géométrie de la droite est une géométrie de l'espace ou une théorie de l'Univers.

Nous concluons de là que la géométrie cayleyenne est une interprétation géométrique presque parfaite de la métagéométrie, ce n'est pas la métagéométrie elle-même.

II. Lie a étudié dans sa *Theorie der Transformationsgruppen* (t. III, ch. V), un problème d'*analyse*, soulevé par Riemann et Helmholtz, à propos des principes de la géométrie et il semble l'avoir résolu complètement. Mais ni Riemann, ni Helmholtz, ni Lie ne donnent une signification géométrique aux coordonnées des êtres analytiques qu'ils appellent points (*). Par suite, leurs recherches ne semblent avoir de géométrique que la terminologie (**) et la théorie de l'espace analytique de Riemann, de Helmholtz et de Lie ne pourra être appelée une *métagéométrie* que lorsque l'on y aura introduit une interprétation géométrique des quantités qui y entrent. C'est d'ailleurs, au fond, l'opinion de Lie lui-même : „ Wir können diese Vorbemerkungen nicht schliessen, dit-il, ohne ausdrüchlich zu betonen, dass die folgenden Untersuchungen *nicht* den Anspruch erheben, philosophische Speculationen über die Grundlagen der Geometrie zu sein, sie wollen nicht mehr sein, als ein sorgfältige gruppentheoretische Behandlung des gruppentheoretische Problems das wir als das Riemann-Helmholtzsche Problem bezeichnet haben „ (ouvrage cité, p. 398).

(*) C'est l'inverse pour M. De Tilly quoi qu'en dise Lie (ouvrage cité, p. 525).

(**) Cette observation ne s'applique pas à la remarque vraiment géométrique de Riemann, d'où est sortie la géométrie riemannienne : le concept de l'espace implique non qu'il est infini, mais qu'il est illimité. (*Werke*, 1re édition, *Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen*, III, § 2, dernier alinéa, p. 266).

Enfin M. Goedseels donne lecture d'une *seconde note sur la méthode de Cauchy*. Soient n équations de condition

$$
(1) \qquad
\begin{aligned}
A_{11}x + B_{11}y + D_{11} &= 0, \\
A_{12}x + B_{12}y + D_{12} &= 0, \\
\dots\dots\dots\dots \\
A_{1n}x + B_{1n}y + D_{1n} &= 0;
\end{aligned}
$$

et

$$
(2) \qquad
\begin{aligned}
\alpha_{11}x + \beta_{11}y + \delta_{11} &= 0, \\
\alpha_{12}x + \beta_{12}y + \delta_{12} &= 0, \\
\dots\dots\dots\dots \\
\alpha_{1r}x + \beta_{1r}y + \delta_{1r} &= 0,
\end{aligned}
$$

dans lesquelles les coefficients de x ont été rendus positifs et qui ont été rangées de telle sorte que

$$\frac{A_{11}}{B_{11}} > \frac{A_{12}}{B_{12}} \cdots > \frac{A_{1n}}{B_{1n}} > \frac{\alpha_{11}}{\beta_{11}} > \frac{\alpha_{12}}{\beta_{12}} > \cdots > \frac{\alpha_{1r}}{\beta_{1r}}$$

Posons

$$(3) \quad A_1 = SA_{1s},\ B_1 = SB_{1s},\ D_1 = SD_{1s},\ \alpha_1 = S\alpha_{1t},\ \beta_1 = S\beta_{1t},\ \delta_1 = S\delta_{1t},$$

et supposons les groupes (1) et (2) formés de manière que

$$\frac{B_{1s}}{A_{1s}} > \frac{B_1 + \beta_1}{A_1 + \alpha_1},$$

$$\frac{\beta_{1t}}{\alpha_{1t}} < \frac{B_1 + \beta_1}{A_1 + \alpha_1}.$$

Pour obtenir sa première équation finale, Cauchy additionne ensemble toutes les équations (1) et (2). Il trouve ainsi

$$(4) \qquad (A_1 + \alpha_1)x + (B_1 + \beta_1)y + (D_1 + \delta_1) = 0.$$

Pour obtenir sa deuxième équation finale, Cauchy remplace dans les équations (2) et (3), x par sa valeur

$$(5) \qquad x = -\frac{B_1+\beta_1}{A_1+\alpha_1}y - \frac{D_1+\delta_1}{A_1+\alpha_1},$$

tirée de l'équation précédente.

Il obtient ainsi deux séries d'équations de la forme

$$(6) \qquad y\left(B_{1s}-A_{1s}\frac{B_1+\beta_1}{A_1+\alpha_1}\right)+\left(D_{1s}-A_{1s}\frac{B_1+\beta_1}{A_1+\alpha_1}\right)=0,$$

$$(7) \qquad y\left(\beta_{1t}-\alpha_{1t}\frac{B_1+\beta_1}{A_1+\alpha_1}\right)+\left(\delta_{1t}-\alpha_{1t}\frac{B_1+\beta_1}{A_1+\alpha_1}\right)=0,$$

qu'on peut écrire comme il suit :

$$A_{1s}x+B_{1s}y+D_{1s}-\frac{A_{1s}}{A_1+\alpha_1}\left\{x(A_1+\alpha_1)+y(B_1+\beta_1)+(D_1+\delta_1)\right\}=0,$$

$$\alpha_{1t}x+\beta_{1t}y+\delta_{1t}-\frac{\alpha_{1t}}{A_1+\alpha_1}\left\{x(A_1+\alpha_1)+y(B_1+\beta_1)+(D_1+\delta_1)\right\}=0.$$

Cauchy rend ensuite positifs tous les coefficients de y dans les équations (6) et (7), et forme sa deuxième équation finale en additionnant les équations (6) et (7) membre à membre.

Or, on a, par hypothèse,

$$\frac{B_{1s}}{A_{1s}} > \frac{B_1+\beta_1}{A_1+\alpha_1}, \qquad \frac{\beta_{1t}}{\alpha_{1t}} < \frac{B_1+\beta_1}{A_1+\alpha_1},$$

d'où

$$B_{1s}-A_{1s}\frac{B_1+\beta_1}{A_1+\alpha_1} > 0, \qquad \beta_{1t}-\alpha_{1t}\frac{B_1+\beta_1}{A_1+\alpha_1} < 0.$$

Le procédé de Cauchy revient donc à multiplier les équations (7') par — 1, et à les additionner ensuite aux équations (6').

Mais, nous avons montré, dans notre première note relative à la méthode de Cauchy (ANNALES, 1901, t. XXV, 1re partie, p. 99), qu'on peut se borner à additionner ou bien les équations (6'), ou bien les équations (7').

Si l'on se borne, par exemple, à additionner les équations (6'), on trouve pour deuxième équation finale

$$(8)\quad A_1x + B_1y + D_1 - \frac{A_1}{A_1+\alpha_1}\left\{x(A_1+\alpha_1) + y(B_1+\beta_1) + (D_1+\delta_1)\right\} = 0,$$

ou, d'après (4)

$$(9)\qquad A_1x + B_1y + D_1 = 0,$$

Retranchant cette dernière équation de (4), on obtient

$$(10)\qquad \alpha_1x + \beta_1y + \delta_1 = 0.$$

La méthode de Cauchy revient donc à adopter les équations (9) et (10) pour équations finales.

En appliquant aux solutions de ces équations le raisonnement que nous avons fait pour la méthode de Tobie Mayer (ANNALES, t. XXIV, 2e partie, pp. 37-58), on peut montrer : 1° que ces solutions peuvent être mises sous la forme

$$\frac{SA}{SB}$$

dans laquelle $\frac{A}{B}$ prend pour valeurs les *uv* solutions que l'on obtient en combinant une équation quelconque du groupe (2) avec une équation quelconque du groupe (3) ; 2° que tous les dénominateurs B sont positifs; 3° que $\frac{SA}{SB}$ est une moyenne entre les *uv* valeurs de $\frac{A}{B}$.

La méthode de Cauchy conduit donc à des solutions moyennes, dans le cas de deux inconnues, comme celle de Tobie Mayer, et comme celle des moindres carrés. Mais elle embrasse au plus $\frac{1}{4}n^2$ valeurs, maximum de $u.v = u(n-u)$, tandis que la méthode

des moindres carrés en embrasse un nombre supérieur, savoir $\frac{1}{2} n (n - 1)$. On peut donc soutenir que la méthode des moindres carrés vaut mieux.

Mais nous avons montré, à propos de la méthode de Mayer, que celle-ci n'exclut de la formation de la moyenne que des valeurs qui peuvent être très erronées. Le même raisonnement s'applique à la méthode de Cauchy. On peut donc aussi soutenir que l'exclusion de certaines valeurs de la formation des moyennes par la méthode de Cauchy constitue un avantage de cette méthode plutôt qu'un inconvénient.

Cette communication donne lieu, entre l'auteur et divers membres de la section, à une discussion à la suite de laquelle est votée l'impression de la note au bulletin de la séance.

Deuxième section

Mardi 9 avril 1901. La section procède d'abord au renouvellement de son bureau. Sont élus :

Président : M. Louis HENRY.
Vice-Présidents : MM. VAN DER MENSBRUGGHE ET DE HEMPTINNE.
Secrétaire : Le R. P. LUCAS, S. J.

M. Ernest Gerard présente un galvanoscope qu'il a imaginé et construit de ses propres mains, sous différentes formes, d'après le principe du galvanomètre apériodique Deprez-d'Arsonval. Le couple résistant y est constitué par les fils conducteurs, qui sont ici des bouts de cannetille des brodeurs, fil d'or ou d'argent doré, tortillé en une spirale d'un diamètre intérieur d'un demi-millimètre, et extérieur de trois quarts de millimètre environ.

La souplesse et l'élasticité de ces fils permettent d'atteindre un degré de sensiblilité extrême, avec un retour parfait au zéro, l'appareil pouvant servir de galvanomètre pour un ordre de courants très faibles.

Dans l'un des types (fig. 1) le cadre mobile M est suspendu aux bouts de cannetille C, C', accrochés eux-mêmes aux extrémités des fils qui amènent le courant.

Dans l'autre type (fig. 2) le cadre est suspendu à un fil de cocon N et les bouts de cannetille *i*, *i'*, qui y sont appendus par

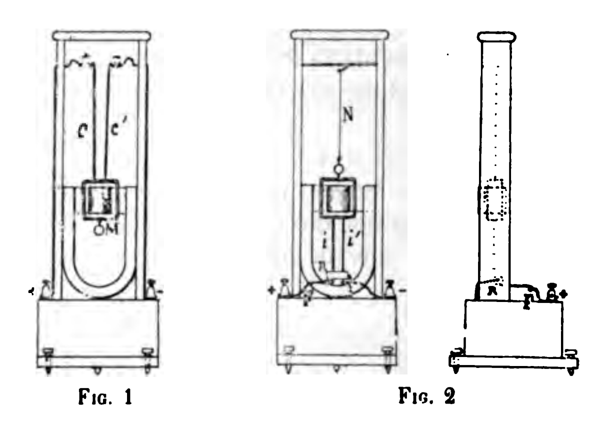


Fig. 1 Fig. 2

dessous, passent sous un petit rouleau R et sont tendus par les fils courbés F en relation avec les bornes de l'instrument. Pour fixer la cannetille à ses extrémités on y insère à frottement des pointes métalliques.

M. Gérard démontre par quelques expériences la grande sensibilité de ce système, qui lui a servi notamment dans des mesures délicates de très fortes résistances.

M. Louis Henry expose qu'il a entrepris une enquête sur l'action qu'éprouvent les éthers des acides organiques de la part des hydracides halogénés. Il s'occupera spécialement pour le moment de l'action de l'*acide bromhydrique gazeux sur les dérivés éthyléniques de quelques acides gras.*

L'intérêt tout spécial que présentent les dérivés éthyléniques en général, et la facilité avec laquelle se fait l'acide bromhydrique gazeux, si remarquable par l'intensité de son aptitude réactionnelle ont dirigé dès l'abord son attention sur ce point particulier.

La *diacétine éthylénique* $C_2H_4(C_2H_3O_2)_2$ peut être regardée comme le type de ce genre de composés.

L'acide bromhydrique gazeux s'absorbe dans la *diacétine* éthylénique comme dans l'eau. Sans se colorer, le liquide s'échauffe fortement et augmente notablement de volume.

Une demi-molécule, soit 75 grammes ou 70 cc., à 18°, se sont échauffés jusqu'à 80°-90° et occupaient alors 93 cc. L'absorption cesse avec une molécule d'acide HBr.

Le liquide est un mélange équi-moléculaire d'acide acétique libre, assez pur pour être cristallisable et de *bromo-acétine éthylénique* $BrCH_2 - CH_2(C_2H_3O_2)$. La séparation de ces deux corps est aisée, soit par la distillation fractionnée, soit par l'eau qui dissout seulement $C_2H_4O_2$.

La *bromo-acétine éthylénique* est un liquide d'agréable odeur, bouillant à 162°-163°, d'une densité 1,524 à 9°. Il contraste singulièrement avec le *bromo-acétate d'éthyle,* son isomère $CH_3 - CH_2 - O - CO - CH_2Br$, qui est un liquide piquant, excitant le larmoiement. La position différente du *brome* vis-à-vis de l'*oxygène* dans ces deux corps explique cette différence

$$Br\,CH_2 - CH_2 - O - CO - CH_3$$
$$CH_3 - CH_2 - O - CO - CH_2\,Br.$$

Le brome du composant éther haloïde $Br\overset{|}{C}H_2$ de la *bromo-acétine* se fait remarquer par une recrudescence d'aptitude réactionnelle; c'est ainsi qu'il fait aisément la double décomposition avec les sels potassiques des acides gras pour former des *acétines mixtes.* M. L. Henry signale parmi celles-ci

la *formo-acétine,* $C_2H_4 < \begin{matrix} CHO_2 \\ C_2H_3O_2 \end{matrix}$

l'*acéto-isobutyrine* $C_2H_4 < \begin{matrix} C_2H_3O_2 \\ C_4H_7O_2 \end{matrix}$

l'*acéto-isovalérine* $C_2H_4 < \begin{matrix} C_2H_3O_2 \\ C_5H_9O_2 \end{matrix}$ etc.

Sous l'action de l'eau, le composant acéto-éthylénique $H_2C(C_2H_3O_2)$ est atteint en premier lieu, il en résulte de la *monobrom-*

hydrine $BrH_2C - CH_2(OH)$ et de l'acide acétique. Mais la réaction est trop vive et le composant *éther haloïde* $BrCH_2$ est entraîné à y prendre part à son tour. Il se forme ainsi du glycol, dont on a recueilli au cours de diverses opérations une quantité notable.

La réaction de l'alcool méthylique est plus nette; sans qu'il faille chauffer bien fort ni pendant longtemps, la *bromo-acétine* se saponifie. Il se produit ainsi de l'acétate de méthyle et de la *monobromhydrine éthylénique* $(HO)CH_2 - CH_2Br$.

Le rendement de l'opération est d'environ 80 %. L'action de l'*alcool ordinaire* légèrement aqueux est beaucoup moins avantageuse.

Il est regrettable que la réaction du bibromure d'éthylène $H_4C_2 - Br_2$ sur l'acétate potassique soit toujours complète, quelle que soit la quantité réagissante de celui-ci. Si elle pouvait donner lieu à la *bromo-acétine* $C_2H_4Br(C_2H_3O_2)$, la préparation de la *mono-bromhydrine* $C_2H_4(OH)Br$ se trouverait raccourcie d'une opération.

L'action de l'iodure de sodium sur le produit brut de l'action de HBr sur la diacétine fournit de l'*iodo-acétate d'éthylène* $ICH_2 - CH_2 (C_2H_3O_2)$, liquide d'une densité 2,441 à 20°, bouillant à 184° sous la pression ordinaire. Alors que l'on fait agir simultanément l'iodure sodique et l'alcool méthylique, on arrive en fin de compte à la *mono-iodhydrine éthylénique* $(HO)CH_2 - CH_2I$.

A cette occasion, M. Louis Henry rectifie une erreur qui s'est glissée dans la description qu'il a donnée autrefois de ce corps. Sa densité est non pas 2,1649 à 18°6, mais 2,905 à 20°.

On voit que l'acide HBr chasse immédiatement la moitié de l'acide acétique de la diacétine éthylénique. Il était intéressant de connaître quelle serait l'action de ce même acide sur les *acétines mixtes*, correspondant à deux acides différents. Deux cas sont possibles.

a) Acide *moins* carboné que l'acide acétique. C'est ce qui se présente dans la *formo-acétine* $C_2H_4 < {CHO_2 \atop C_2H_3O_2}$. L'expérience a constaté que c'est l'*acide formique* qui est mis en liberté. Il se forme du *bromo-acétate d'éthylène*.

b) Acide *plus* carboné que l'acide acétique. C'est ce qui existe dans l'*isovaléro-acétine* $C_2H_4 < {C_5H_9O_2 \atop C_2H_3O_2}$. Ici c'est l'acide acétique

qui est mis en liberté, il se forme du *bromo-isovalérate* $BrCH_2$-CH_2 ($C_5H_9O_2$) Éb. 195°.

On peut conclure de là qu'en général *c'est l'acide le moins carboné qui est mis en liberté.*

Sous ce rapport, *l'action de* HBr *est analogue à celle de l'eau.* On sait, en effet, que les éthers des acides gras sont d'autant plus aisément décomposables par l'eau qu'ils correspondent à un acide moins riche en carbone.

Dans une communication ultérieure, M. Louis Henry s'occupera *a*) de l'action comparative des divers hydracides HCl, HBr et HI sur un même dérivé éthylénique; *b*) de l'action comparative d'un même hydracide sur les dérivés éthyléniques correspondant aux divers acides gras $C_nH_{2n}O_2$.

Il se propose d'étendre également ses investigations sur les dérivés *d'ordre aldéhydique* $HC < {X \atop X}$, simples et mixtes, sur les dérivés *glycoliques continus*, mais non symétriques tels que les dérivés propyléniques CH_3 - CHX - CH_2X et sur les dérivés *discontinus*, tels que les dérivés *triméthyléniques* XCH_2 - CH_2 - CH_2X, etc. Mais pour résoudre ces questions, il est nécessaire d'appeler à l'existence un bon nombre de composés encore inconnus jusqu'ici.

En attendant, M. Louis Henry fait remarquer les progrès réels qu'il a réalisés dans la préparation du glycol éthylénique et de plusieurs de ses dérivés fondamentaux.

Partant du *bibromure d'éthylène* H_4C_2 - Br_2, on obtient aisément la *diacétine éthylénique* $C_2H_4(C_2H_3O_2)_2$ en le faisant agir sur l'acétate potassique fondu en présence d'un peu d'acide acétique.

Sous l'action des alcalis libres ou des terres alcalines, seules, la diacétine se saponifie facilement en produisant du glycol que l'on extrait sans difficulté par la distillation sous pression raréfiée.

Avec le chlorure de soufre, le glycol fournit, dans des conditions très avantageuses à tous égards, la *monochlorhydrine éthylénique* $C_2H_4(OH)Cl$ (méthode de Carius).

Avec la diacétine éthylénique, on obtient avec la plus grande facilité, par HBr gazeux, le *bromo-acétate* d'éthylène C_2H_4 - Br ($C_2H_3O_2$), qui permet d'obtenir si aisément les *mono-bromhydrine* $C_2H_4(OH)Br$ et *iodhydrine* $C_2H_4(OH)I$ *éthyléniques.*

M. Alex. de Hemptinne fait une communication ***sur les vitesses de réaction.***

La nature des actions catalytiques et de l'influence du milieu, dans le problème des vitesses de réaction, est encore peu connue; ce n'est qu'à l'aide d'un grand nombre de données expérimentales que l'on parviendra à déterminer la raison de ces influences; dans ce but j'ai fait quelques recherches sur la saponification de l'acétate de méthyle et l'acétate d'éthyle dans de l'acide chlorhydrique décime normal et dans des mélanges de cet acide avec de l'alcool méthylique, éthylique et de l'acétone.

La vitesse de la réaction se calcule de la manière suivante: Soit B la masse d'eau, A la quantité d'éther, k le coefficient de vitesse de saponification, k_1 celui relatif à la vitesse avec laquelle l'éther se reforme aux dépens de l'acide mis en liberté et de la masse M d'alcool mis dans le mélange. La quantité d'éther mise dans le mélange étant très petite comparée à la quantité d'alcool, on peut, pour faciliter les calculs, négliger l'influence de l'alcool mis en liberté par la saponification de l'éther, on obtient alors si x est la quantité d'éther saponifiée au bout d'un temps t

$$dx = \left\{ Bk\,(A - x) - k_1 M x \right\} dt$$

d'où

$$(1) \qquad t = \int \frac{dx}{ABk - (Bk + k_1 M)\,x} + C$$

Soit x_1 la quantité d'éther saponifiée à la limite de la réaction lorsque l'équilibre est atteint, on a alors

$$Bk\,(A - x_1) = k_1 M x_1$$

$$k_1 = \frac{Bk\,(A - x_1)}{M x_1}.$$

En substituant dans (1), en intégrant et en déterminant la constante comme de coutume, on obtient finalement après quelques transformations

$$k = \frac{x_1}{ABt}\, l\, \frac{x_1}{x_1 - x}.$$

Les valeurs de *k* indiquées dans les tableaux suivants sont la moyenne de plusieurs expériences, nous ne donnons pas ici tous ces chiffres qui présentent peu d'intérêt.

Les valeurs de *k* sont multipliées par 10^4 et par l'inverse du degré de dilution de l'acide, les vitesses sont donc toutes rapportées à l'action d'une solution décime normale d'acide chlorhydrique, les chiffres de la deuxième colonne proportionnels à la résistance électrique de la solution supposée décime normale, sont calculés en négligeant l'influence de la dilution sur la dissociation électrolytique. Les recherches ont été faites à la température constante de 25°, l'unité de temps adoptée est la minute.

I. *Saponification de l'acétate de méthyle dans de l'acide chlorhydrique décime normal et dans du mélange de cet acide avec de l'alcool méthylique*

			Chiffres proportionnels aux résistances
200 Hcl $^1/_{10}$ normal		$k = 2{,}86$	6,1
150 „	+ 50 alc. méthylique	$k = 3{,}47$	8,9
100 „	+ 100 „	$k = 4{,}60$	13,3
50 „	+ 150 „	$k = 6{,}00$	21,5

II. *Mélanges avec de l'alcool éthylique*

150 Hcl $^1/_{10}$ normal	+ 50 alc. éthylique	$k = 3{,}53$	10,0
100 „	+ 100 „	$k = 3{,}28$	17,9
50 „	+ 150 „	$k = 5{,}24$	34,0

III. *Acétate d'éthyle dans des mélanges d'acide et d'alcool méthylique*

200 Hcl $^1/_{10}$ normal		$k = 2{,}96$	6,1
150 „	+ 50 alc. méthylique	$k = 3{,}60$	8,9
100 „	+ 100 „	$k = 4{,}80$	13,3
50 „	+ 150 „	$k = 4{,}92$	21,5

IV. *Acétate d'éthyle dans des mélanges d'alcool éthylique*

150 Hcl $^1/_{10}$ normal	+ 50 alc. éthylique	$k = 3{,}70$	10,0
100 „	+ 100 „	$k = 3{,}80$	17,9
50 „	+ 150 „	$k = 4{,}64$	34,0

V. *Acétate de méthyle dans des mélanges d'acide et d'acétone*

150 Hcl $^1/_{10}$ normal	+ 50 acétone		$k = 3{,}40$	8,7
100 „	+ 100	„	$k = 3{,}64$	13,5
50 „	+ 150	„	$k = 4{,}40$	24,6

VI. *Acétate d'éthyle dans les mêmes mélanges*

150 Hcl $^1/_{10}$ normal	+ 50 acétone		$k = 3{,}49$	8,7
100 „	+ 100	„	$k = 3{,}64$	13,5
50 „	+ 150	„	$k = 4{,}48$	24,6

Pour comparer l'influence des différents milieux sur les vitesses de réaction, il faudrait connaître le degré de dissociation de l'acide dans ceux-ci; malheureusement, nous n'avons guère de données expérimentales sur ce point, et les valeurs de la résistance électrique des mélanges ne nous donnent qu'une approximation; on sait, en effet, que la résistance électrique ne dépend pas seulement du degré de dissociation, mais encore de la mobilité des ions, or celle-ci est moindre dans les mélanges contenant de l'alcool, et croît avec la teneur en acétone. Il est en tout cas certain que le nombre d'ions diminue notablement avec la quantité croissante d'alcool et d'acétone; si l'on tient donc compte de leur influence sur les valeurs de *k*, les différences de celles-ci, qui sont déjà notables, ne pourront que s'accentuer. On voit donc que le milieu a une influence considérable sur la vitesse de saponification des éthers.

M. l'abbé Hamonet expose les résultats de ses recherches sur la décomposition des oxyacides par le courant électrique, faites en vue de préparer de nouveaux glycols ou leurs dérivés.

Quand on soumet à l'action d'un courant électrique un liquide organique, il est souvent fort difficile d'isoler les produits primaires de l'électrolyse, parce que, s'ils ne sont pas insolubles, ceux-ci sont eux-mêmes décomposés par le courant qui leur a donné naissance. Ces réactions secondaires ont jusqu'ici considérablement limité l'emploi de l'électrolyse en chimie organique. Pour les éviter M. Hamonet a cherché avant tout à obtenir des composés insolubles. Ainsi, pour appliquer à la préparation des glycols la décomposition électrolytique des oxyacides, il a pris soin d'éthé-

rifier le groupe alcool, afin de le soustraire à l'action ultérieure du courant.

Bien que la réaction classique $2RCO^2K = K^2$ au pôle négatif $+ 2CO^2 + R - R$ au pôle positif ne se vérifie pas dans tous les cas, elle est pourtant assez générale pour qu'on puisse l'espérer, lorsque le radical représenté par R est d'un poids suffisamment considérable. Si donc le radical possède un groupe fonctionnel étheroxyde, celui-ci se trouvera doublé dans le produit définitif.

$$2RO^nCH^mCO^2K = K^2 + 2CO^2 + ROC^nH^m - C^nH^mOR.$$

Cependant les choses ne se passent pas toujours aussi simplement que l'indique cette équation. Il peut arriver que le groupe étheroxyde soit hydrolysé :

$$RO^nCH^mCO^2K + H^2O = ROH + HOC^nH^mCO^2K,$$

et que l'action du courant porte sur l'acide alcool ainsi régénéré. C'est notamment ce qui a lieu avec les acides α alcooliques, comme l'acide glycolique et l'acide lactique. Ainsi l'acide amylglycolique a donné d'abord du méthanal et l'acide amyllactique de l'éthanal, et par voie de réaction secondaire de ces deux aldéhydes sur l'alcool amylique, des acétols de plus en plus compliqués, mais point de diamyline du glycol de Wurtz $(C^5H^{11}OCH^2)^2$, ni de diamyline du butane diol 2.3. $(CH^3CHOC^5H^{11})^2$.

Au contraire avec les β oxyacides la réaction se fait en majeure partie suivant l'équation donnée plus haut. Ainsi l'acide β amyloxypropionique a donné par l'électrolyse la diamyline du butane diol (*) avec un rendement de 50 % de la quantité théorique :

$$2C^5H^{11}OCH^2CH^2CO^2K = K^2 + 2CO^2 + C^5H^{11}OCH^2CH^2CH^2CH^2OC^5H^{11}.$$

(*) Pour préparer l'acide β amyloxypropionique $C^5H^{11}OCH^2CH^2CO^2H$ M. Hamonet a dû, avant de faire réagir l'amylate de sodium sur l'acide β chloropropionique $CH^2ClCH^2CO^2H$, transformer ce dernier en éther sel. Sans cette précaution il ne se fait guère que de l'acide acrylique $CH^2 = CH - CO^2H$, L'acide β amyloxypropionique est un liquide bouillant à 251-252°.

Une petite partie de l'acide éther oxyde est encore hydrolysé.

Il était intéressant de savoir si la soudure des deux radicaux s'était faite, comme l'auteur l'espérait, de manière à donner la diamyline du butane diol 1.4. corps recherché depuis bien longtemps par de très habiles chimistes. Pour démontrer que telle est bien la constitution de ce nouvel éther, il a suffi de le traiter par l'acide iodhydrique, de transformer ensuite le diiodobutane (P. f. 3°8) en cyanure adipique par l'action du cyanure de potassium et finalement en acide adipique fondant à 150°. En outre M. Hamonet a pu faire avec ce diiodobutane la diacétine du glycol tétraméthylénique $(CH^3CO^2CH^2CH^2)^2$ fondant à + 12°, le glycol correspondant qui fond à + 16° et enfin, par oxydation de ce dernier, l'acide succinique $CO^2HCH^2CH^2CO^2H$. Ces transformations démontrent nettement la constitution des corps obtenus.

M. Hamonet se propose d'appliquer cette méthode à la décomposition de quelques autres oxyacides.

M. Hamonet ajoute quelques mots touchant l'action du zinc en poudre en présence de l'alcool sur le diiodobutane 1.4. $ICH^2 - CH^2 - CH^2 - CH^2I$, et celle du zinc seul sur le même corps. Dans le premier cas il se fait de l'hexane, et dans le second de l'*éthylène* au lieu du tétraméthylène espéré. Cette dernière transformation, produite à une température qui n'a pas dépassé 16°, est un des plus curieux cas de décomposition moléculaire.

M. Louis Henry constate que la synthèse du *glycol tétraméthylénique* est depuis longtemps l'objet de son attention et de ses recherches. Après divers essais infructueux qui remontent à bien des années, tels que l'action de l'agent moléculaire sur la mono-iodhydrine éthylénique $(HO)CH_2 - CH_2 - CH_2I$, l'éther mono-iodé primaire $(C_2H_5O)CH_2 - CH_2I$, l'acétonitrile mono-iodée $NC - CH_2I$, etc., il se croyait certain d'obtenir ce composé important par l'action de l'acide azoteux (HO)NO sur la *butanol-amine* normale et bi-primaire $(NH_2)CH_2 - (CH_2)_2 - CH_2(OH)$, produit de l'hydrogénation de l'alcool *cyano-butylique* $CN - (CH_2)_2 - CH_2(OH)$, composés qu'il a fait connaître précédemment.

Cette réaction fournit en effet un glycol en C_4 bouillant vers 230°, mais le produit paraît être un mélange du glycol tétraméthylénique cherché et de son isomère primaire et secondaire de la

formule $(HO)CH_2 - CH_2 - CH(OH) - CH_3$ (*). Des transpositions analogues du radical - OH ont déjà été constatées dans cette circonstance. Le fait est que le *bibromure* $C_4H_8 - Br_2$, qui résulte de l'action de l'acide bromhydrique HBr sur le glycol ainsi obtenu, liquide bouillant vers 195°, n'a pas présenté de point de fusion fixe, comme cela doit être pour un corps homogène et pur. Cette méthode laisse d'ailleurs à désirer au point de vue du rendement.

M. L. Henry espère de meilleurs résultats de l'emploi du *bromo- ou de l'iodo-acétate d'éthylène* $BrCH_2 - CH_2(C_2H_3O_2)$, $ICH_2 - CH_2 (C_2H_3O_2)$ qui s'obtient si aisément dans les conditions qu'il vient d'indiquer.

Quoi qu'il en soit, M. l'abbé Hamonet a été plus heureux. La méthode, d'un genre tout différent, qu'il a suivie lui a permis d'arriver au but désiré, dans des conditions très intéressantes et fort avantageuses. Elle inspire une pleine sécurité quant à la nature du produit qu'elle fournit.

En constatant le succès de ses recherches, M. Louis Henry réitère à M. l'abbé Hamonet les félicitations qu'il a déjà eu l'occasion de lui exprimer. Dumas disait que " découvrir ou caractériser „ un corps comme alcool, c'est enrichir la chimie organique d'une „ série de produits analogues à ceux que représente en chimie „ minérale la découverte d'un métal nouveau „. Cette appréciation, émise autrefois à propos des alcools ordinaires, renferme une bien plus grande part de vérité alors qu'il s'agit des alcools polyatomiques et notamment d'un glycol comme le glycol succinique de M. l'abbé Hamonet. C'est assez dire toute l'importance qu'il faut attacher au composé nouveau qu'il a mis au jour dans des conditions si intéressantes. On est autorisé à croire que la méthode qu'il a mise en œuvre avec une habileté qui lui fait honneur est d'une application générale aux sels à métal alcalin des acides gras oxy- alcoylés; il est par conséquent permis d'en attendre de nouveaux succès.

(*) Annales de la Société scientifique de Bruxelles, 1899-1900; p. 127. Compte rendu de la séance du 24 avril 1900. — Bulletins de l'Académie royale des sciences de Belgique pour 1900, p. 590 (séance du 4 août 1900).

Mercredi 10 avril 1901. La seconde section avait invité les confrères des autres sections à une conférence de M. Van de Vyver *sur l'air liquide.* Les membres en grand nombre, plusieurs accompagnés des dames de leur famille, y répondirent. Voici le résumé de la conférence :

M. Van de Vyver débute par un aperçu historique de la liquéfaction des gaz. Il remet ensuite en mémoire quelques points de théorie qui serviront à mieux comprendre le fonctionnement de l'appareil à liquéfier l'air.

Il rappelle qu'un gaz comprimé est un gaz qui s'échauffe (exemple : briquet pneumatique). Il établit une représentation graphique de la loi de Gay-Lussac, en vertu de laquelle les volumes d'un gaz sont proportionnels à la température, et il fait remarquer que cette loi n'est applicable qu'entre certaines limites.

Un second graphique détaille la série complète des phénomènes que produit la compression d'un gaz suivie de sa détente. Dans chacune des quatre phases, les températures sont représentées par des cercles dont les rayons vont en croissant ou en diminuant, suivant les variations d'états thermiques, ce qui facilite notablement, nous semble-t-il, la compréhension du cycle complet.

M. Van de Vyver aborde alors la description de la machine due à M. Linde, machine uniquement basée sur le refroidissement produit par la détente. Il met en relief la sagacité de l'inventeur qui est parvenu à éviter l'énorme travail de compression qu'eût exigé la liquéfaction : 1° en accumulant les effets de la détente; 2° en ne laissant pas l'air se détendre jusqu'à la pression atmosphérique.

Pour décrire et expliquer la machine, il se sert d'un grand tableau schéma blanc sur noir, portant en cartouche le dessin d'un fragment du serpentin à contre-courant, qui constitue la partie originale de l'appareil.

En cours de route, il nous ramène à chaque période du fonctionnement au dernier graphique qu'il avait établi.

Enfin, il donne la description et montre les appareils qui servent à conserver et à manipuler l'air liquide et, après avoir jeté un coup d'œil sur l'ensemble des recherches et des applications nombreuses que fait présumer l'obtention de l'air liquide en grande quantité,

il nous présente ce liquide. Voilà donc devant nous, réduit à l'état de liquide statique, ce gaz subtil au sein duquel nous vivons quasi sans le voir!

Puis, après avoir fait connaître les caractères physiques, la chaleur de vaporisation, la chaleur spécifique, la densité, etc., bref, après nous avoir donné l'état civil, dirais-je, du corps en question, M. Van de Vyver réalise devant nous une série d'expériences.

Il *filtre* ce liquide comme on filtrerait de l'eau, afin de lui rendre sa transparence en lui enlevant l'acide carbonique qui y avait été entraîné sous forme de neige.

Il montre les effets curieux du froid intense sur les matières organiques, le *caoutchouc,* la *viande,* les *œufs,* etc., tout cela devient dur et cassant; c'est à la pince ou au marteau qu'il faut attaquer ces corps pour les diviser.

M. Van de Vyver prouve la *variation des résistances électriques* par leur immersion dans l'air liquide; en y plongeant une résistance intercalée dans le circuit d'une lampe et qui empêchait cette dernière de briller de son éclat normal, on voit à l'instant la lampe briller d'un vif éclat.

Puis, voici la solidification du *mercure* et même de l'*alcool.*

Il nous montre que l'air liquide en s'évaporant *ranime* la *combustion;* c'est la caractéristique de l'oxygène contenu.

Il nous fait admirer la brillante combustion du *charbon* projeté sur ce liquide et la sorte d'*explosion* que produit une *éponge* imbibée de ce produit.

Il se verse de l'air liquide dans la *main* sans éprouver une sensation bien désagréable, l'air restant à l'état sphéroïdal.

La *force d'expansion* de l'air liquide repassant à l'état gazeux est énorme. Il le prouve à l'aide d'un tube d'acier bouché fortement; le bouchon saute à l'instant.

Ensuite, il montre l'*ébullition de l'air liquide dans un creusot de glace* et termine par le joli phénomène d'*évaporation* ou plutôt d'ébullition tumultueuse et violente qui se produit *lorsqu'on verse de l'air liquide sur de l'eau.*

Enfin, il conclut en rappelant que la plus basse température atteinte à l'heure actuelle est 265°, qu'il ne reste donc plus que 8° pour atteindre le zéro absolu, mais qu'il serait puéril de croire que

les 8° qui restent à franchir ne soient qu'un jeu! En effet, les difficultés croissent en progression géométrique à mesure qu'on se rapproche du zéro absolu et celui-ci pourrait bien se trouver à un point inaccessible. Ce serait donc une limite imposée à la curiosité de l'homme, mais qui permettrait néanmoins à son esprit de progresser toujours !

Cette causerie, remarquable par la clarté de l'exposition, par le nombre et l'habile disposition des expériences, valut à l'orateur d'unanimes applaudissements et de chaleureuses félicitations.

Que M. Van de Vyver veuille bien trouver ici l'expression de notre reconnaissance pour la bonne grâce parfaite avec laquelle il a consenti à nous prêter son concours.

Après la conférence, réunion de la section.

On vote d'abord l'impression du mémoire envoyé par M. P. Duhem *Sur quelques extensions récentes de la statique et de la dynamique* (*).

M. Louis Henry attire de nouveau l'attention de la section sur la *variation alternante* que l'on constate, au sujet de certaines propriétés physiques, dans diverses séries de dérivés carbones suivant que certains éléments existent, dans la molécule, en nombre *pair* ou *impair* d'atomes. Cette variation concerne la fusibilité, la solubilité, l'aspect physique, et même comme il l'a fait voir par divers exemples, la volatilité.

C'est particulièrement dans la série des dérivés *normaux symétriques* de la formule générale $\equiv C - (CH_2)_n - C \equiv$ que cette alternance se constate de la manière la plus intéressante.

Il rappelle que le premier fait de ce genre a été signalé, d'une manière sommaire, en 1877 (**), au sujet de la fusibilité des premiers termes de la *série oxalique* $(CH_2)_n - (CO - OH)_2$ par M. A. Baeyer. Dans ce groupe en général, $\equiv C - (CH_2)_n - C \equiv$, l'alternance se rattache au nombre *pair* ou *impair* des atomes du carbone. Il a montre autrefois que le *chlore* peut délerminer un

---

(*) Voir ce mémoire dans la Revue des Questions scientifiques, t. L, livr. [illegible] juillet 1901, pp. 130-157.

(**) Bulletin de la Société chimique de Berlin, t. CI, p. 1280.

effet du même genre, en ce qui concerne la fusibilité; c'est ce que l'on constate dans la série des *dérivés chlorés* de l'*acide* et de l'*amide acétiques* (*); le dérivé *bichloré* - $CHCl_2$ est notablement et régulièrement *plus fusible* que les dérivés *mono* - CH_2Cl et *trichlorés* - CCl_3.

Acides

		Fusion	
CH_3 - CO(OH)		16°5	
			+ 46°
CH_2Cl - CO(OH)	— 4°	62°6	
			— 50°
$CHCl_2$ - CO(OH)	— 4°	12°5	
			+ 46°
CCl_3 - CO(OH)		58°5	

Amides

		Fusion	
CH_3 - CO(NH_2)		82°	
			+ 37°
CH_2Cl - CO(NH_2)	+ 15°	119°	
			— 22°
$CHCl_2$ - CO(NH_2)	+ 16°	97°	
			+ 38°
CCl_3 - CO(NH_2)		135°	

Continuant dans cet ordre d'idées, M. L. Henry s'occupe d'abord de la série des *dinitriles normaux* NC - $(CH_2)_2$ - CN. A son point de vue personnel, cette série offre, sous divers rapports, un intérêt tout particulier. Il rappelle que c'est par des essais tendant à faire le *dinitrile succinique* qu'en 1857, dans le laboratoire de Giessen, sous la direction de M. H. Will, il a commencé ses études de chimie expérimentale. En 1885, il s'est occupé de nouveau de ce composé en même temps qu'il faisait connaître le *nitrile glutarique* CN - $(CH_2)_3$ - CN (**). En 1886 (***) il a décrit le second terme de la série, le *nitrile malonique* CN - H_2C - CN, composé si

(*) Comptes Rendus, t. CI, p. 250 (année 1885).
(**) Comptes Rendus, t. C, p. 742.
(***) Comptes Rendus, t. CII, p. 1394.

éminemment remarquable au point de vue de la ***volatilité*** dans les séries homologues (*).

M. L. Henry fait connaître aujourd'hui, d'une manière sommaire. le cinquième terme du groupe, le *nitrile adipique* $CN - (CH_2)_4 - CN$.

Possédant 15 grammes de bi-bromure, $C_4H_8 - Br_2$ — Éb. vers 195° — provenant du glycol $C_4H_8 - (OH)_2$, obtenu lui-même par la réaction de l'acide nitreux sur l'*alcool amido-butylique biprimaire* $(NH_2)CH_2 - (CH_2)_2 - CH_2(OH)$, il les a mis à profit pour préparer le nitrile adipique. La réaction de ce bibromure sur le cyanure de potassium en présence de l'alcool est aisée et rapide (**).

(*) Le *nitrile malonique* $NC - CH_2 - CN$ bout à 218° et fond à 30°.

Le *nitrile oxalique* $NC - CN$, ou le cyanogène, est un gaz bouillant à — 21°.

Si l'on se rappelle que l'éthane $CH_3 - CH_3$ bout à — 85° et l'acétonitrile $CH_3 - CN$ à + 82°, on voit quelle énorme puissante volatilisante résulte du rapprochement dans la molécule C - C des deux atomes d'azote.

$CH_3 - CH_3$ — 85° $CH_3 - CN$ + 82° $CN - CN$ Éb. — 21°

+ 167° — 103°

$CH_3 - CH_3$ Éb. — 85° $CN - CN$ — 21°

+ 64°

L'interposition d'un chaînon — CH_2 fait disparaître en grande partie, sinon totalement, cette influence

$CH_3 - CH_2 - CH_3$	Éb. — 40°	
		> + 138°
$CH_3 - CH_2 - CN$	+ 98°	
		> + 120°
$CN - CH_2 - CN$	+ 218°	

Aussi constate-t-on entre $CN - CN$ et $CN - CH_2 - CN$, homologues voisins, une différence de volatilité

$CN - CN$	Éb. — 21°	
		> 239°
$CN - CH_2 - CN$	+ 218°	

d'environ 240°, ce qui est un fait véritablement unique et par là d'autant plus extraordinaire.

(**) Hydraté par l'acide HCl, le produit formé dans ces conditions se transforme en *acide adipique* $(CH_2)_4 - (CO - OH)_2$.

L'individualité de ce corps est donc certaine, mais son homogénéité laisse à désirer (*). De même que le bibromure dont il provient, il est aisément congelable, mais il n'a pas été possible d'en déterminer le point de fusion d'une manière précise; en tous cas, il est beaucoup plus élevé dans l'échelle thermométrique que celui du ***nitrile glutarique*** lequel est, ainsi que l'a déterminé M. L. Henry, situé à 29° sous zéro. On voit donc ainsi que comme dans la série des acides normaux $(CH_2)_n$ - $(COOH)_2$, la fusibilité varie d'une manière alternante dans la série des dinitriles correspondants $(CH_2)_n$ - $(CN)_2$.

M. L. Henry fait remarquer à cette occasion la concordance intéressante que l'on constate, en ce qui concerne la variation de la fusibilité dans les deux séries de corps pour les termes en C_3, C_4, C_5 et probablement C_6.

Di-nitriles $(CH_2)_n$ - $(CN)_2$	Fus.	Diff.
CH_2 - $(CN)_2$	30°	+ 59° (30° / — 29°)
$(CH_2)_2$ - $(CN)_2$	52°	+ 81° (52° / — 29°)
$(CH_2)_3$ - $(CN)_2$	— 29°	

Diff.	Di-acides $(H_2C)_n$ - $(CO(OH))_2$	Fus.	Diff.
102°	CH_2 - (CO - OH)$_2$	132°	+ 34° (132° / 98°)
133°	$(CH_2)_2$ - (CO - OH)$_2$	185°	+ 87° (185° / 98°)
127°	$(CH_2)_3$ - (CO - OH)$_2$	98°	
	$(CH_2)_4$ - (CO - OH)$_2$	148°	

Si l'on se rappelle que le cyanogène NC - CN est un gaz bouillant à — 21° et fusible à — 34°, alors que son acide, l'*acide oxalique* (HO)CO - CO(OH), est un solide fusible à 212°, on aperçoit quelle différence considérable existe, au point de vue de la variation de la fusibilité et de la volatilité entre les deux séries parallèles des nitriles et des acides du groupe *oxalique* en général.

M. L. Henry espère être à même de fixer, sur un meilleur échantillon, la fusibilité du nitrile adipique, grâce aux produits de M. l'abbé Hamonet, lesquels sont homogènes.

(*) Ce bibromure $(CH_2)_4Br_2$ renferme vraisemblablement quelque peu de son isomère $BrCH_2$ - CH_2 - CHBr - CH_3, d'où le dinitrile correspondant CN - $(CH_2)_2$ - CH(CH$_3$) - CN.

M. G. Van der Mensbrugghe fait ensuite une communication *sur un cas particulier d'équilibre d'une colonne de mercure.*

On sait depuis longtemps (*) qu'après avoir soumis du mercure à une ébullition prolongée dans un long tube barométrique, on peut redresser celui-ci lentement et avec précaution sans que le mercure quitte la portion supérieure du tube au moment où l'on ouvre l'extrémité inférieure plongée dans une cuvette de mercure. Dans ces conditions, le liquide demeure parfois suspendu à une hauteur double ou même triple de celle qui correspond à la pression atmosphérique ordinaire.

Rappelons ici que nous avons cité cette expérience pour prouver qu'un liquide peut être soumis à un état de traction (**); en effet, le mercure qui se trouve au-dessus de la section correspondante à la hauteur moyenne de 76 centimètres à partir du niveau, ne supporte plus aucune pression de la part de l'air atmosphérique; mais comme il demeure toujours sollicité par la pesanteur, celle-ci doit provoquer nécessairement dans le liquide une élasticité de traction d'autant plus marquée que la portion considérée est plus proche de l'extrémité supérieure du tube.

Proposons-nous, aujourd'hui, d'examiner comment l'équilibre ci-dessus peut se concilier avec la propriété généralement attribuée au mercure de ne pas mouiller le verre; car, si le liquide est dans un état réel de traction, pourquoi ne se détache-t-il pas d'autant plus aisément de la paroi intérieure qu'il s'élève davantage au-dessus de la hauteur normale?

Pour expliquer cette singularité, faut-il admettre avec Biot (***) que le mercure bien sec peut affecter une surface concave dans un tube parfaitement débarrassé de toute humidité? Cela reviendrait à dire que, dans ces conditions spéciales, le mercure mouillerait plus ou moins le verre et que, dès lors, l'adhésion des deux corps pourrait devenir suffisante pour résister à l'action de la pesanteur.

(*) Il paraît que Huyghens et Th. Young avaient déjà observé le fait qui fait l'objet de cet article; mais nous n'avons pu retrouver les passages où ils ont signalé la particularité en question.

(**) *Sur les phénomènes capillaires* (Rapport présenté au Congrès international de Paris en 1900).

(***) *Traité de physique expérimentale*, t. I, p. 458.

En effet, l'illustre physicien français déclare formellement que si l'on enlève tout obstacle pouvant empêcher le verre et un liquide d'adhérer l'un à l'autre, celui-ci prend alors la forme concave et monte au-dessus du niveau du liquide où plonge le tube. Il cite pour exemple les tubes barométriques d'où l'on a complètement chassé l'air et les vapeurs, en y faisant bouillir le mercure à plusieurs reprises. A cet égard, il fait même remarquer qu'une seule ébullition ne suffit pas, ce qui est prouvé par les baromètres ordinaires, puisque le mercure y conserve la forme convexe.

L'assertion de Biot est parfaitement exacte en ce qui concerne le verre et l'eau : en 1889 (*), nous avons même constaté que l'eau s'étale très rapidement sur une surface solide fraîche, comme on peut en obtenir en cassant un gros morceau de verre; mais la même chose est-elle vraie pour le mercure? Pour le savoir, nous nous sommes procuré du mercure bien distillé et un gros bloc de verre; nous avons cassé celui-ci à l'aide d'un marteau, et aussitôt après, nous avons plongé un des morceaux dans le liquide; or, quand nous avons retiré le fragment, la surface fraîche ne portait aucune trace de mercure adhérent. Il faut donc croire que l'adhésion entre les deux corps ne peut se manifester à la température ordinaire.

Faut-il admettre que cette adhésion se développe par l'action assez prolongée de la chaleur? A la faveur d'une température suffisamment élevée, il est certain que les couches superficielles qui terminent, d'une part, la paroi interne du tube, de l'autre, la portion voisine du mercure, doivent subir une dilatation très notable, et par conséquent se pénétrer plus profondément qu'à froid; grâce à cette pénétration plus marquée, il est possible que le mercure adhère plus fortement au verre après le refroidissement graduel. Sous ce rapport, il eût été intéressant de savoir à quelle température les physiciens ont observé le fait que nous cherchons à expliquer.

Nous ne pouvons donc pas réfuter d'une manière complète l'opinion du savant français. Au surplus, l'équilibre inattendu de toute la colonne mercurielle n'est pas très stable, car il suffit,

(*) *Sur les propriétés physiques de la couche de contact d'un liquide et d'un solide* (Bull. de l'Acad. roy. de Belg., t. XVII, p. 518).

paraît-il, de frapper quelques petits coups sur le long tube pour provoquer la chute du mercure jusqu'à la hauteur normale.

Nous croyons qu'il n'est pas inutile de proposer un autre mode d'explication, fondé sur la compressibilité ou plutôt sur la détente des liquides dans des conditions particulières.

Rappelons qu'en 1791, John Canton prouva nettement la compressibilité des liquides en opérant comme suit : il prit un ballon de verre auquel était soudé un tube capillaire, le remplit d'eau, ainsi qu'une portion du tube, et chauffa le liquide de manière qu'il arrivât jusqu'à l'extrémité effilée du tube. Il scella alors cette extrémité en la fondant au chalumeau ; de cette façon, le liquide, après s'être contracté par le refroidissement, ne fut plus soumis à la pression de l'atmosphère. Canton renferma avec soin le ballon dans un récipient dont la partie supérieure était traversée par le tube capillaire ; après avoir fait le vide dans le récipient, il y laissa rentrer l'air au moment où il brisa l'extrémité du tube. De cette manière, le liquide fut soumis à la pression atmosphérique sans qu'on pût invoquer un changement de capacité du ballon ; le niveau baissa, et par la quantité dont le volume du liquide avait diminué, le physicien anglais put déduire le coefficient de compressibilité de l'eau pour 1 atmosphère.

Si le ballon avait contenu un corps élastique de forme ellipsoïdale, il est certain que l'action soudaine de la pression atmosphérique aurait aplati davantage le corps en question.

Réciproquement, si un liquide d'abord soumis à la pression de l'atmosphère est ensuite soustrait en tout ou en partie à cette influence, le volume du liquide augmentera plus ou moins, et l'élasticité intérieure y diminuera ; nous avons pu démontrer ce fait à propos de l'expérience inverse de celle du tonneau de Pascal (*).

Cela étant, revenons au long tube rempli de mercure, et voyons comment varie la pression supportée par le liquide à différentes hauteurs au-dessus du niveau dans la cuvette. Soit une tranche horizontale de mercure placée à une hauteur h, par exemple, au-dessus du niveau dans la capsule. Il est évident que la pression x de cette tranche, augmentée du poids $h\delta$ de la colonne de

---

(*) Bullet. de l'Acad. roy. de Belg. (séance du mois d'août 1900, p. 611).

mercure de section égale à l'unité et de densité δ, doit être égale à la pression P de l'air atmosphérique. On a donc :

$$x = P - h\delta,$$

formule qui montre bien que la pression x diminue constamment à mesure que h augmente, et s'annule pour $h =$ la hauteur barométrique observée au moment de l'expérience.

En nous appuyant sur la réciproque de l'expérience de Canton, nous devons donc conclure que le mercure soulevé dans le tube augmente très légèrement de volume, mais de plus en plus à mesure que la pression x diminue. Il s'ensuit que si l'on imagine à différentes hauteurs un même poids de mercure, le volume de ce poids ira en augmentant, très peu il est vrai, lorsque la hauteur augmentera. Nous devons donc admettre que les particules s'écartent entre elles d'autant plus sensiblement qu'elles sont plus élevées; par conséquent, même si l'on peut faire abstraction de l'effet de la pression atmosphérique qui s'exerce sur toute l'étendue de la paroi extérieure du tube, les particules de mercure doivent s'engager avec d'autant plus d'énergie entre les molécules de la couche superficielle intérieure du verre, que la tranche considérée est plus éloignée du mercure dans la cuvette.

Il n'est pas inutile de nous demander ce qui provoque l'écartement des molécules au-dessus de la tranche où la pression x est nulle : c'est le poids même des diverses tranches suspendues, poids en vertu duquel les particules sont d'autant plus fortement écartées entre elles qu'elles appartiennent à des tranches plus élevées. C'est là un véritable état de traction dont nous avons donné une série d'exemples dans nos recherches antérieures.

Si les considérations qui précèdent sont bien fondées, elles font comprendre le peu de stabilité de toute la colonne de mercure qui s'élève au-dessus de la hauteur normale du baromètre; en effet, de petits ébranlements imprimés à la masse suffisent pour modifier l'arrangement moléculaire des tranches consécutives et faire cesser l'élasticité de traction qui s'y était développée à un degré de plus en plus marqué.

Quant au ménisque concave dont Biot affirme la possibilité au sommet d'une colonne de mercure, nous n'avons pu nous assurer que jamais un constructeur de baromètres l'ait observé, soit à la température ordinaire, soit à une température suffisamment élevée.

M. Dewalque fait à la section deux communications : la première *sur la détermination des matières volatiles dans les houilles combustibles,* et la seconde *sur l'autophagie de la levure de boulangerie.*

Jeudi 11 avril 1901. Comme question de concours, la section demande des *Recherches nouvelles théoriques et expérimentales sur les cerfs-volants, aéroplanes, etc.*

D'après le nouvel article 14 du règlement des concours, les mémoires en réponse à cette question doivent être envoyés au Secrétariat avant le 1er octobre 1902. Les mémoires en réponse à la question posée en 1900 (ANNALES, t. XXIV, 1re part. p. 126 ou t. XXV 1re part. p. 10, 2°) doivent être envoyés au secrétariat avant le 1er octobre 1901.

M. Kennis parle *de l'incandescence en matière d'éclairage* et s'attache à répondre aux objections soulevées lors de la dernière réunion contre l'emploi du gaz à l'eau dans l'éclairage public.

Hygiène. 1° *Dans la plupart des usines* où l'on fabrique du gaz de houille, l'ouvrier est exposé à la chaleur et à la fumée suffocante des cornues et des fours. Dans toutes les usines où l'on fabrique du gaz de houille, l'ouvrier est exposé aux émanations d'oxyde de carbone et d'acide sulfhydrique provenant de l'extinction du coke sortant des cornues, et en général, aux émanations malsaines dont les usines à gaz de houille sont le foyer. Ces émanations pestilentielles détruisent la végétation et rendent le voisinage insalubre.

Rien de pareil dans les usines où l'on fabrique le gaz à l'eau. Partout elles sont établies au milieu de bouquets de verdure.

2° *Dans les tuyaux,* le gaz de houille est aussi inoffensif que le gaz à l'eau. Remarquons cependant que le gaz de houille non brûlé est pour le moins aussi dangereux que le gaz à l'eau, en cas de fuite.

Le gaz à l'eau pur contient 40° d'oxyde de carbone.

Le gaz de houille renferme notamment :

8 à 12 % d'oxyde de carbone;

35 à 40 % de gaz de marais;

70 à 80 grammes d'acide prussique par 100 mètres cubes de gaz (Dr Pfeifer, *Recherches du laboratoire de l'usine à gaz de Magdebourg,* 1900).

L'odeur du gaz de houille n'est pas suffisamment intense pour signaler de petites fuites. Le gaz à l'eau odorisé au moyen du Carbylamine se fait remarquer instantanément. Des fuites restées introuvables pendant longtemps dans des canalisations au gaz de houille ont été trouvées dès qu'on y a fait passer du gaz à l'eau odorisé (Observations du Dr von Mucha, conseiller supérieur d'hygiène, Vienne).

3° *A la combustion.* C'est ici que réside le danger réel, car il ne s'agit plus d'une fuite accidentelle qu'on peut faire cesser, mais d'une action constante tant que le gaz brûle, et contre laquelle personne ne saurait se garer :

La combustion du gaz de houille est toujours incomplète, elle donne lieu à des gaz délétères :

Acide hypoazotique, par la transformation de l'ammoniaque en présence de l'oxygène de l'air (F. Kuhlmann, Association française pour l'avancement des sciences; Congrès de Lille).

Acide carbonique.

La combustion de 1 m^3 de gaz de houille fournit 0,53 m^3 CO^2.
„ „ gaz à l'eau „ 0,39 „

Chaleur malsaine.

La combustion de 1 m^3 de gaz de houille développe 5000 calories.
„ „ gaz à l'eau „ 2500 „

Conclusions. Le gaz de houille appauvrit l'air; il le vicie par les produits de combustion. Si le “ Bunsen „ n'est pas réglé avec la plus grande exactitude, ce qui devient même impossible à cause des variations de pression, l'effet nuisible ne fait qu'augmenter : on est donc plus près de la perfection quand on peut se passer du “ Bunsen „, ce qui est le cas pour le gaz à l'eau.

Dangers d'explosion. Pour qu'une inflammation de l'air puisse se produire, l'air doit avoir absorbé 12 à 14 % en volume de gaz à l'eau tandis qu'il n'a qu'à contenir 6 à 8 % de gaz de houille en volume pour que l'inflammation s'effectue. Cette moindre capacité explosive amènera sans doute une diminution des accidents de cette nature, bien plus nombreux que ceux produits par asphyxie ou empoisonnement.

Il s'engage, au sujet de cette communication, une discussion à laquelle prennent part plusieurs membres.

M. Kennis ajoute quelques détails *sur la fabrication des manchons Auer* à Vienne.

Une deuxième communication de M. Kennis porte *sur les phénomènes physiques et chimiques qui se produisent lors de la prise des ciments, chaux limites, bétons, bétons armés.* L'orateur invite les membres de la section à l'étude de ces phénomènes.

M. Lemoine rappelle à ce propos les recherches de M. Considère, ingénieur en chef des ponts et chaussées de France, publiées dans les Annales des Ponts et Chaussées et dans les Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris.

Troisième section

Mardi 9 avril 1901. Après avoir assisté à la conférence de M. Halot sur l'*Extrême-Orient à l'aurore du XXe siècle,* la section procède au renouvellement de son bureau. Sont nommés :

Président :	M. J. Leclercq.
Vice-Présidents :	M. le Chanoine Bourgeat.
	R. P. Van den Gheyn, S. J.
Secrétaire :	M. F. Van Ortroy.

La question suivante est proposée pour être mise au concours *Nouvelles recherches sur les insectes tertiaires.*

D'après le nouvel article 14 du règlement des concours, les mémoires en réponse à cette question doivent être envoyés au Secrétariat avant le 1er octobre 1902. Les mémoires en réponse à la question posée en 1900 (Annales t. XXV, 1re part. p. 40, 3°) doivent être envoyés au Secrétariat avant le 1er octobre 1901.

La section vote l'impression du travail de M. F. Meunier : *Contribution à la faune des Mymaridae ou atomes ailés du succin,* après avoir pris connaissance du rapport suivant de M. le Chanoine de Dorlodot :

La *Contribution à la faune des Mymaridae ou atomes ailés de l'ambre,* par M. Fernand Meunier, que la troisième section m'a fait

l'honneur de soumettre à mon examen, me paraît digne de figurer dans nos ANNALES, avec les dessins qui l'accompagnent. Les descriptions me semblent faites avec soin. Quant aux dessins, la troisième section estimera, sans aucun doute, que l'auteur fait justice, en honorant de la dédicace d'une espèce nouvelle, la main délicate qui les a tracés. Si la brutalité d'une remarque grammaticale ne semblait déplacée en l'occurrence, je me permettrais de faire remarquer à l'auteur que les noms propres de la 2e déclinaison prennent, au féminin, les désinences de la 1re. C'est donc *Molitorae* et non *Molitori* que demande la dédicace. Exemples : *Ammonites Murchisonae*, Sow. ; *Bellerophon Lohestae*, De Kon.

La partie générale demande une réserve plus importante. L'auteur pense que l'ambre du Samland, bien qu'il se trouve dans des dépôts d'âge oligocène inférieur, est néanmoins d'âge paléocène. Il y a trois mois, je faisais observer à ce sujet qu'il serait intéressant que l'auteur fît connaître les motifs d'une opinion opposée à celle de la plupart des géologues. Je vois que M. Meunier n'est pas de cet avis, puisqu'il se borne à renvoyer à un guide du Musée de Koenigsberg, publié en 1892. Il est à remarquer que les meilleurs traités, même les plus récents, ne font pas même mention de cette hypothèse. Sans doute, on peut, comme le fait Conwentz (*), défendre l'opinion que les arbres qui ont produit l'ambre vivaient dans la région même qui fut envahie par la mer oligocène ; auquel cas, ces arbres, ainsi que les débris de plantes et les insectes contenus dans l'ambre, auraient vécu " *in einer etwas älteren Periode* ". Mais entre cette hypothèse, qui d'ailleurs ne semble pas établie, et celle qui fixe l'âge de l'ambre au paléocène, il y a l'abîme des temps éocènes proprement dits. Toutefois, comme je suis loin d'être spécialiste en matière de tertiaire, après avoir vainement cherché dans ma bibliothèque un fondement à l'opinion affirmée par M. Meunier, j'ai cru prudent de consulter des géologues plus compétents que moi. Il me fut répondu, que, pour ne pas dire davantage, cette opinion est tout à fait improbable.

Si j'attire de nouveau l'attention sur ce point, c'est surtout à

(*) Apud Sterzel, NEUES JAHRBUCH F. MIN., GEOL. UND PAL., 1892, IIe b., p. 179. D'après Sterzel, Conwentz suit, en cela, les idées de Jentzsch. — Vérification faite, tel est bien, en effet, le sens du passage du *Guide* de Jentzsch, auquel renvoie l'auteur.

cause de la grave conclusion que l'auteur tire de son affirmation : " A en juger, dit-il, d'après leurs caractères morphologiques déjà si perfectionnés à l'aurore des temps tertiaires, il est permis de croire que des Mymaridae, peut-être voisins de ceux de notre faune, habitaient vraisemblablement les herbes des prairies et des bois vers la fin des temps secondaires (*). „ Il me semble que cette conclusion est assez importante, pour mériter d'être appuyée sur quelque raison solide. Or, comme je viens de le dire, je me suis assuré que des savants de haute valeur ignorent pareille raison. C'est pourquoi, je me permets d'insister de nouveau, pour que l'auteur veuille bien nous dire les motifs d'une persuasion, qui paraît chez lui si absolue.

Mercredi 10 avril 1901. M. Proost communique la note suivante : *Les terres rouges de la Méditerranée.*

Quiconque a visité nos belles carrières de calcaire carbonifère, a remarqué ces dépôts d'argiles *rouges* qui se trouvent entre les bancs de pierres *bleues* et dont les géologues attribuent la formation à l'altération des marbres, dont le fer, en passant à l'état de peroxyde, engendre la couleur d'ocre des *terres rouges.*

C'est évidemment par un phénomène identique que s'est formée la terre rouge si recherchée par les horticulteurs de la Méditerranée pour la culture des palmiers et autres arbres d'ornement.

Seulement, la composition de cette terre diffère singulièrement de celle qui se forme entre nos bancs de marbres ou de calcaires *cristallins.* En effet, tandis que nos terres rouges sont tellement argileuses qu'elles ne peuvent convenir à la culture, celles de la Méditerranée, dont j'ai l'honneur de placer un échantillon sous les yeux de la section, sont à dominantes de chaux et de sable et contiennent beaucoup de potasse et de magnésie ; sans préjudice pour les matières azotées résultant de la décomposition des orga-

(*) L'expression *paléocène* a deux sens différents. Dans un sens large, elle est synonyme d'*éocène inférieur* et comprend l'ensemble des couches que d'Orbigny réunissait sous la dénomination de *Suessonien.* Dans le sens propre, elle désigne les couches inférieures au *Thanetien* et que bon nombre d'auteurs rangent déjà dans le tertiaire, comme les marnes dites strontianifères de Meudon et le calcaire grossier de Mons. La conclusion de l'auteur ne vaut, que s'il emploie le terme *paléocène* dans ce dernier sens.

nismes contenus dans les marbres et qui ont contribué pour une si large part à leur formation.

L'analyse chimique de la terre rouge de la Méditerranée a été faite à ma demande par M. Nyssens, directeur du laboratoire de l'État à Gand. Nous en publierons les résultats dans le prochain BULLETIN.

On rencontre cependant dans les vastes *poudingues*, qui se sont formés à la base des roches jurassiques blanches, grises ou rosées de la Corniche, des argiles rouges tout à fait comparables aux nôtres et qui alimentent les tuileries et les poteries de la Méditerranée. Il paraît démontré que l'homme primitif se servait de la même argile pour la fabrication de ses grossières, mais si résistantes poteries. Depuis l'époque historique, les Méditerranéens n'ont cessé d'exploiter cette terre rouge et d'en tirer souvent des produits très artistiques, comme on peut s'en convaincre d'ailleurs dans la plupart de nos musées d'art ancien.

La fertilité d'une terre contenant une quantité d'oxyde de fer aussi considérable est bien faite pour nous étonner tout d'abord. Il est probable que l'excès de fer favorise sous cette forme particulière le développement et accentue la coloration de la *chlorophylle*, comme nous l'avions déjà fait remarquer en 1885, en discutant la valeur des *spectres analyseurs* de M. G. Ville, présentés par M. Chevreul à l'Académie des sciences de Paris.

G. Ville prétendait déterminer par la coloration seule la quantité d'azote absorbée par une plante comme le chanvre, par exemple, et croyait avoir découvert de véritables gammes de couleurs dans ces soi-disant spectres analyseurs du sol.

Nous fîmes remarquer dès lors l'incertitude de ce procédé d'analyse optique, en signalant la différence de coloration de certaines plantes, comme le *genêt*, qui présente une teinte plus foncée dans les sables ocreux que dans les sables moins riches en fer.

Nous signalâmes ensuite cette observation à M. le directeur Nyssens qui a bien voulu se charger de l'analyse de la terre rouge de la Méditerranée.

Le secrétaire donne lecture d'un mémoire de M. le chanoine Bourgeat sur la *Serre et les régions voisines*. Ce travail est envoyé à l'examen de MM. G. Dewalque, de la Vallée Poussin, et le chanoine de Dorlodot.

La section vote l'insertion aux ANNALES de la notice suivante de M. le Dr Henseval sur le *Fumage de l'esprot.*

Le fumage du poisson a pour but d'en prolonger la conservation. Il diminue sa teneur en eau et il l'imprègne de substances possédant un pouvoir antiseptique élevé. En outre, il lui communique un fumet spécial qui est très recherché par certaines personnes.

On fait, en Belgique, une pêche importante d'esprot. Une partie est préparée en sardine, une autre est transformée en guano après en avoir extrait l'huile et une petite quantité est fumée. La majeure partie de l'esprot fumé que l'on consomme en Belgique nous vient de l'Angleterre et même de l'Allemagne et de la Hollande. Le produit anglais a la réputation d'être bien supérieur à tous les autres et il se vend toujours un prix beaucoup plus élevé.

Le fumage de l'esprot est une des utilisations les plus lucratives. Ces considérations nous ont engagé à en faire une étude méthodique pour en préciser les conditions. Les nombreux essais qui ont été faits l'année dernière et cette année nous ont donné un résultat satisfaisant. Nos produits ont été examinés par des connaisseurs qui ont déclaré que notre esprot fumé n'était en rien inférieur au meilleur produit qui nous vient d'Angleterre.

Nous avons pensé qu'il y aurait peut-être quelque utilité à faire connaître en détail notre façon d'opérer. La description se rapporte au matériel qui a été employé pour nos essais et qui est à la disposition des intéressés.

1. *Triage et nettoyage du poisson.* Il faut d'abord trier le poisson et éloigner les plus petits. Puis on les lave à grande eau en agitant énergiquement avec une brosse pour faire tomber les écailles peu adhérentes et enlever le sang caillé.

2. *Salage.* Il se fait à l'aide d'une saumure très concentrée, dont nous avons reconnu que le degré de concentration le plus favorable était 15 % environ; on y ajoute 1/2 kgr. de sucre, une poignée de thym, de laurier et de poivre.

On laisse séjourner les poissons dans cette solution pendant 1 heure.

Elle peut servir plusieurs fois, 5 ou 6; on la change lorsqu'elle est sale.

Ensuite on lave le poisson salé dans un récipient à grande eau, puis on le met égoutter sur des claies en bois.

3. *Séchage.* On suspend les poissons sur des baguettes en fer galvanisé : on passe la baguette en dessous de l'opercule gauche et on la fait ressortir par la bouche. De cette façon, ils sont solidement suspendus et ils ont tous la même direction.

Nos baguettes ont une longueur de 72 centimètres.

On peut mettre 20-22 poissons sur une baguette. Les baguettes chargées sont déposées sur des cadres au fur et à mesure de leur préparation; on peut en mettre 24 à 26 sur un cadre.

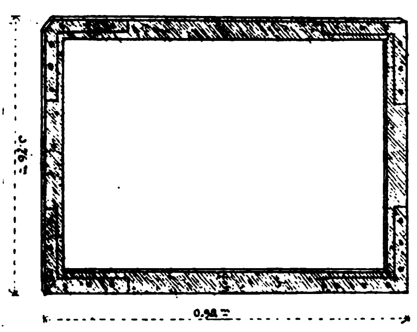


Fig. 1

Il faut éviter soigneusement que les poissons se touchent, car alors il resterait des taches blanchâtres aux endroits où la fumée n'aurait pu pénétrer, ce qui donnerait un aspect désagréable au poisson.

Les cadres portant les baguettes chargées sont déposées sur un séchoir du modèle de la figure 2 que l'on expose au grand air lorsqu'il fait beau temps. On peut faire le séchage dans un séchoir méthodique avec aéro-condenseur, mais il faut alors disposer d'une grande installation.

Le séchage à l'air libre dure généralement 3 heures suivant les conditions atmosphériques.

4. *Fumage proprement dit.* Lorsque le poisson est suffisamment sec, on introduit les cadres dans le four et on allume le feu.

La figure 3 représente le modèle du four qui a servi à nos essais. C'est une simple cheminée dont les dimensions sont indiquées sur la figure, portant sur les côtés 8 paires de barres de

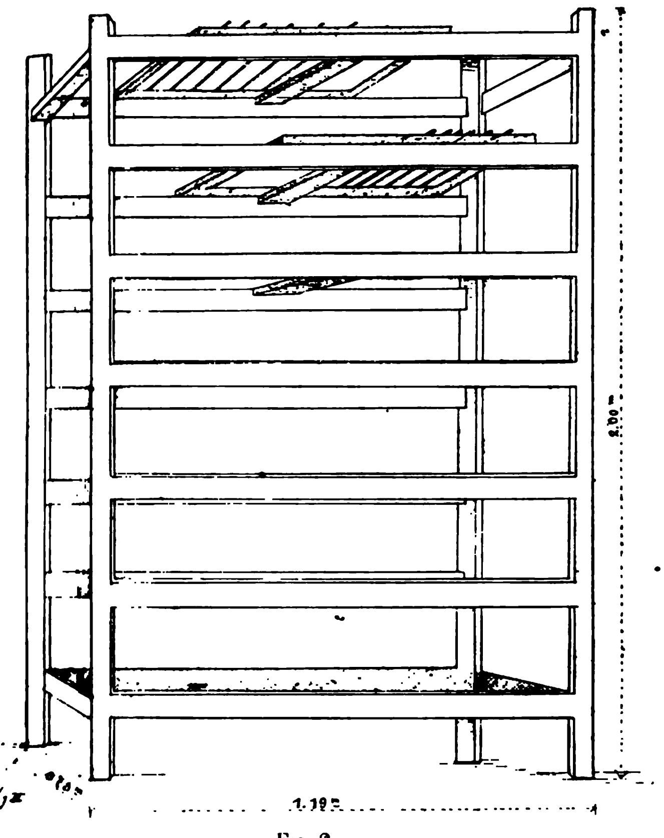


Fig. 2

fer sur lesquelles on peut placer les cadres. Le four est fermé en avant par deux grandes portes en fer, mobiles sur des charnières et munies d'un regard à leur milieu. En bas, se trouve une porte que l'on déplace à l'aide de deux poignées. On aura soin, au début de l'opération, de ne pas laisser la température s'élever

trop brusquement; on peut la régler très bien en ouvrant plus ou moins la porte ou en la fermant. Elle peut s'élever jusque

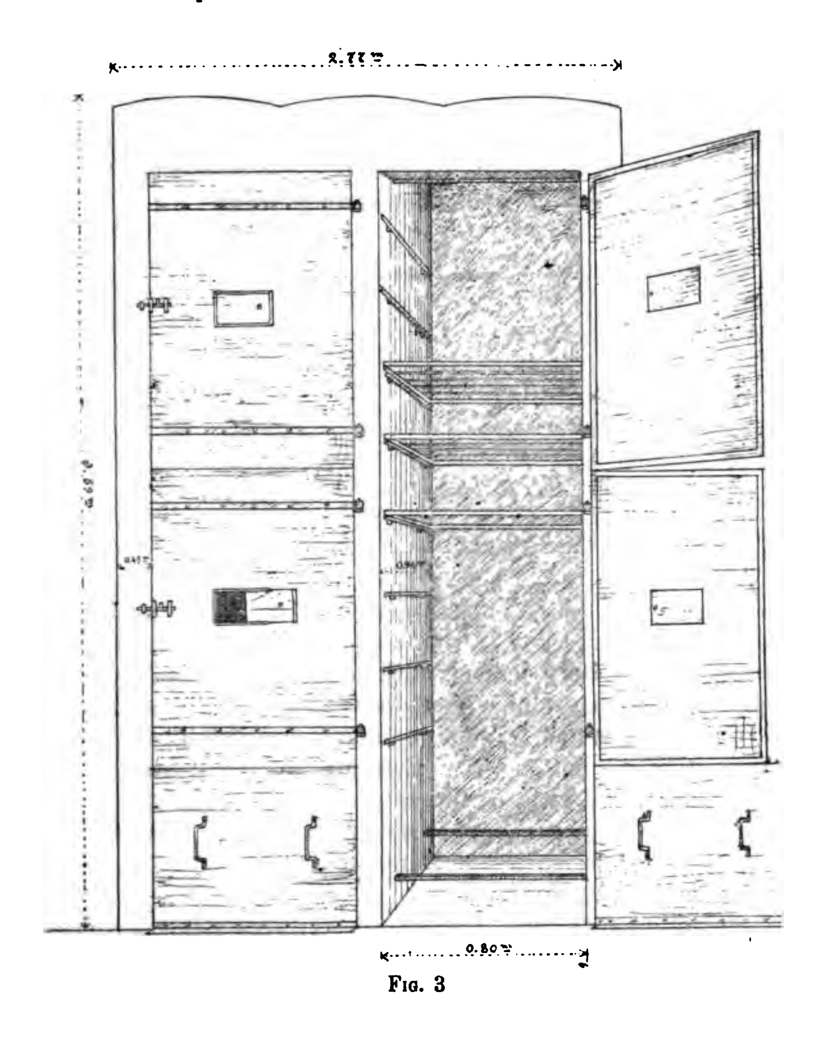


Fig. 3

80° à 90°. Après une heure le poisson est cuit. On couvre alors le feu avec de la sciure de bois de chêne et on évite de le laisser rallumer. Dès que l'on voit une flamme quelque part, on la couvre

de suite avec de la sciure. La température baisse rapidement ; on tâche de la maintenir aussi basse que possible entre 25° et 28°.

Pour éviter une trop grande déperdition de fumée, on place, en haut du four sur la dernière rainure, une cloison en fer perforée d'une petite porte dont on peut augmenter ou diminuer l'ouverture à volonté (fig. 4).

Après une heure, les poissons sont fumés : ils ont perdu une grande partie de leur eau et ils ont pris une belle couleur jaune d'or. Ils possèdent un goût et un arôme spéciaux qui plaisent

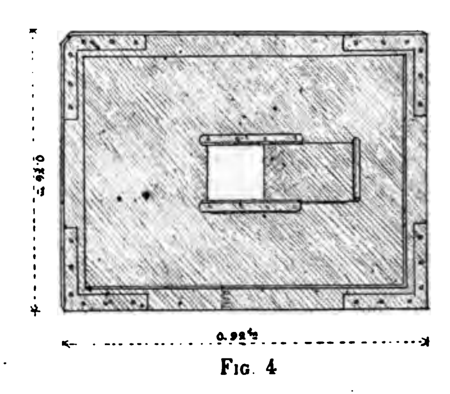


Fig. 4

beaucoup à certaines personnes. Cette méthode de fumage donne des poissons fumés dont le goût spécial n'est pas trop prononcé. Si l'on veut accentuer le goût de fumé, il faut prolonger la durée d'exposition à la fumée froide. Certaines personnes les mangent comme tels; d'autres les préfèrent grillés.

On peut les livrer au commerce de deux façons :

1° Comme tels, en les vendant au poids ou dans de petites caisses de 1 à 5 kgr.

L'esprot fumé de cette façon se conserve généralement pendant 15 jours à 3 semaines. Après ce temps, il perd son goût spécial et il se dessèche. D'autres fois, il est attaqué par des moisissures ou il pourrit. Cela arrive quand il n'a pas été suffisamment séché pendant le fumage.

Pendant le fumage, il perd 30 % d'eau : 100 kgr. d'esprot frais donnent 70 kgr. d'esprot fumé.

2° On peut mettre l'esprot fumé en conserves : on le met en boîtes avec de l'huile et on le stérilise à l'autoclave. Préparé de cette façon, il peut se conserver indéfiniment. Toutefois il ne conserve pas un goût aussi fin que quand il est fraîchement fumé, mais il est possible de cette façon de consommer de l'esprot fumé hors la saison où on le pêche. Cette conserve est certainement supérieure à l'esprot préparé en sardine.

On peut employer de l'huile d'olive, de l'huile d'arachide, ou encore de l'huile d'esprot comme nous l'avons fait l'année dernière.

Nous avons fait de nombreuses expériences à ce sujet et des dégustateurs exercés n'ont pas pu distinguer les boîtes qui avaient été faites avec de l'huile d'esprot de celles faites avec de l'huile d'olive de qualité supérieure.

A quelle température faut-il stériliser les boîtes ?

Un chauffage trop prolongé altère le poisson : il perd son goût de fumé et il se désagrège. Il faut donc le restreindre dans la mesure du possible. D'après les expériences que nous avons faites, la stérilisation dans la vapeur à 110° pendant 30 à 35 minutes suffit amplement.

L'esprot fumé mis en boîtes à l'huile peut se conserver un certain temps sans avoir été stérilisé, 3 à 6 mois et même beaucoup plus longtemps; cela dépend du degré de dessiccation qu'il a subi pendant le fumage; mais des dégustateurs ont trouvé la qualité du produit stérilisé supérieure à celle du produit non stérilisé.

Cette conserve n'existe pas dans le commerce. Nous sommes persuadés qu'elle pourrait avoir un avenir sérieux. Elle constitue une utilisation très avantageuse sur laquelle nous attirons l'attention des intéressés.

La section vote ensuite l'impression dans la REVUE DES QUEST. SCIENT. du mémoire de M. Fabre sur les *Pentatomes*, et d'une étude de M. le marquis de Nadaillac sur les *temps préhistoriques en Irlande*.

Le R. P. De Munnynck, O. P., émet quelques considérations générales *sur l'individualité*.

Si l'on veut établir, pour le zoologiste, dit-il, l'individualité des animaux supérieurs, il ne suffit pas de conclure, au moyen des phénomènes psychiques, à l'existence d'un principe simple *dans* l'animal. Un tel être, échappant à l'observation, n'intéresse en rien les sciences positives. Il importerait de faire entrer la question dans une voie, suivie avec succès par les théoriciens de la chimie, et pouvant conduire à la preuve d'une " *solidarité fonctionnelle* " entre toutes les parties constituant l'animal. — La reproduction en général et particulièrement certains faits bien établis d'hérédité paraissent fournir une base sérieuse à la thèse individualiste.

Ces idées donnent lieu à une intéressante discussion, entre le R. P. De Munnynck et le R. P. Hahn, S. J.

Jeudi 11 avril 1901. Le R. P. Van den Gheyn, S. J. entretient la section *des principes de l'ethnographie*. Ce mémoire prendra place aux Annales (t. XXV, 2[de] partie).

Une étuve pour cultures bactériologiques fait l'objet de la note suivante de M. l'abbé Maurice Lefebvre.

Les bactériologistes ont souvent besoin d'exposer leurs cultures à des températures déterminées et invariables pendant un certain nombre de jours.

Dans ce but on a imaginé plusieurs modèles de *couveuses* à régulateur automatique de température. Les meilleurs régulateurs sont ceux qui agissent sur le débit d'un bec à gaz. Mais tous ceux qui ont travaillé dans un laboratoire savent les mécomptes qui leur arrivent parfois, même avec les régulateurs les plus estimés, tels que le classique régulateur à mercure, le régulateur métallique de Roux, ou le régulateur à membrane de d'Arsonval : à un moment donné, au milieu d'une expérience, la température subit tout à coup un écart de plusieurs degrés; le régulateur à mercure s'est encrassé, le ressort ou la membrane des autres a modifié sa tension... Du reste ces appareils, parfois excellents, ne sont utilisables que dans les laboratoires qui possèdent une distribution de gaz. Quant aux régulateurs pour le chauffage au pétrole, ils sont habituellement d'une régularité moins sûre encore.

Je me sers, dans mon laboratoire, depuis plus d'une année, d'une étuve dont la régularité me paraît plus assurée, et que l'on

peut chauffer indifféremment au gaz ou au pétrole. En voici la description et le fonctionnement.

La caisse en est à double paroi métallique, et capitonnée de feutre (le capitonnage n'est pas représenté dans la figure). Elle porte extérieurement (fig. 1) une cheminée C dans laquelle on engage la lampe de chauffage; cette cheminée s'ouvre en haut sur

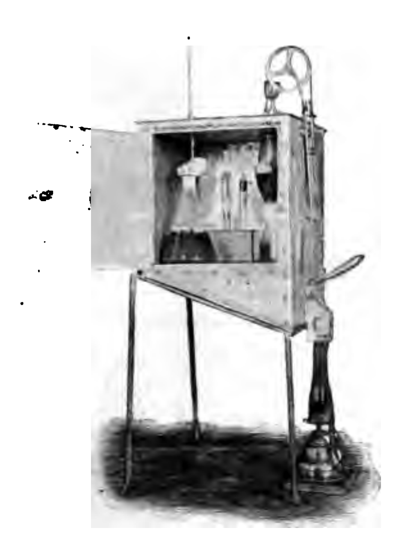


Fig. 1

l'extérieur; elle communique latéralement avec l'intervalle de la double paroi de l'étuve. Un volet mobile sur charnière V ferme cette communication lorsqu'il s'abaisse par son propre poids, et ouvre en même temps l'orifice supérieur de la cheminée : dans cette position du volet, toute la chaleur de la lampe s'échappe à l'extérieur. Lorsque le volet, au contraire, se relève sous l'action du régulateur, il ferme l'ouverture de la cheminée sur l'extérieur, et conduit toute la chaleur de la lampe dans l'intervalle des parois de l'étuve. Dans ses positions intermédiaires, le volet admet ou laisse échapper plus ou moins de chaleur.

Le modérateur (fig. 2) consiste en un ballon aplati de verre mince muni de deux tubes : le gros tube T plonge dans le ballon

jusqu'à 1 ou 2 millimètres du fond; le tube étroit *t*, muni d'un entonnoir à robinet, s'ouvre à la paroi supérieure. On introduit quelques centimètres cubes de mercure par l'entonnoir, et on ferme le robinet. Dès lors, si la température vient à s'élever, la dilatation de l'air contenu dans le ballon refoule le mercure dans le gros tube jusqu'à une hauteur qui varie avec la température. Cette ascension du mercure soulève un flotteur en verre F, qui



Fig. 2

commande au moyen d'un fil et d'une poulie le volet de la cheminée : lorsque le flotteur s'élève, le volet s'abaisse et dirige la chaleur hors de l'étuve; lorsque le flotteur descend, le volet se relève et admet la chaleur dans l'étuve.

Pour régler l'appareil on commence par chauffer l'étuve en maintenant le flotteur hors de l'atteinte du mercure : il suffit pour cela d'élever la poulie, laquelle est portée à cet effet sur une tige mobile verticalement qu'on peut fixer par une vis à la hauteur qu'on veut. Lorsque le thermomètre de l'étuve indique un ou deux degrés au-dessus de la température que l'on veut rendre invariable, on abaisse la poulie jusqu'à ce que le flotteur repose sur la surface de mercure juste assez pour maintenir le volet dans une

position intermédiaire entre l'ouverture et la fermeture : la température redescend quelque peu et devient invariable.

Il peut être nécessaire d'élever le niveau du mercure dans le grand tube avant de commencer à chauffer : pour cela on introduit quelques gouttes d'alcool par le tube à robinet, que l'on referme immédiatement. Les vapeurs d'alcool se forment et se dilatent très rapidement.

Pour relever le volet plus ou moins pendant la chauffe et achever de régler l'appareil très exactement, on peut, au lieu de relever la tige de la poulie, laisser fuir un peu d'air ou de vapeur d'alcool par le robinet.

Le R. P. Bolsius, S. J., expose les résultats obtenus jusqu'à ce moment dans ses recherches sur l'*Haementeria (Placobdella) costata,* entreprises afin d'élucider la manière dont les spermatozoïdes parviennent à arriver à l'intérieur de l'organe femelle.

On savait, surtout depuis les beaux travaux d'Alex. Kowalevsky, professeur à Saint-Pétersbourg, que le chemin que parcourt le sperme est des plus curieux. Le voici exposé sommairement. Les individus accouplés s'entr'échangent un spermatophore, c'est-à-dire une sorte de poche remplie de sperme. La partie effilée du spermatophore est insérée, non pas dans l'orifice femelle comme le dit Robin, entre autres, mais dans l'orifice mâle externe ainsi que l'a exactement observé Kowalevsky.

Seulement, la question est de savoir comment le sperme parvient à traverser les deux parois qui le séparent encore de l'endroit où il doit fonctionner, la paroi de la cavité qui le sépare du cœlome d'abord, et ensuite la paroi de la matrice à l'intérieur de laquelle il doit se rendre.

Le fait était connu que réellement le sperme passe par ces deux cloisons puissantes; car quelque temps après l'insertion du spermatophore, Kowalevsky trouve le sperme dans le cœlome, dans l'épaisseur de la matrice, et finalement dans l'intérieur de ce dernier organe.

Mais le savant russe déclare que la façon dont se fait le passage n'est pas encore suffisamment élucidée. Il croit que le premier passage pour arriver dans le cœlome est effectué par une *perforation* que la partie effilée du spermatophore pratique probable-

ment dans la première paroi. Ensuite les spermatozoïdes eux-mêmes *perforent* à leur tour la puissante paroi de la matrice. Kowalevsky ajoute cependant que la question du passage doit être reprise pour arriver à une conclusion définitive.

Sur des matériaux que le savant professeur de St-Pétersbourg a eu l'amabilité de fournir au P. Bolsius, il a été constaté par l'examen des coupes microtomiques présentées à la section, que pour tout le trajet du sperme il n'est nulle part besoin d'une perforation, mais que les deux parois à traverser sont toutes deux arrangées de façon à livrer passage sans dérangement des tissus.

Les figures dessinées d'après les préparations apportées prouvent : 1° que l'extrémité antérieure du spermatophore s'arrête dans une caxité extra-cœlomique et ne perfore pas la paroi ; 2° que le sperme, déversé dans cette première cavité, passe à travers la paroi au moyen d'une sorte de valvules ou d'écluses préformées dans l'épaisseur de cette paroi très musculeuse ; 3° que les spermatozoïdes, arrivés maintenant dans le cœlome, rencontrent l'épaisse paroi de la matrice, laquelle porte de tous côtés une infinité de minuscules entonnoirs préformés eux aussi entre les éléments constituant la paroi de la matrice. Dans ces entonnoirs microscopiques se glissent les spermatozoïdes ; et on constate que la lumière de ces entonnoirs et de leurs tubulures vers l'intérieur s'élargit considérablement durant l'apport et le passage des innombrables spermatozoïdes, à tel point que la matrice finit par prendre l'aspect d'une éponge. Néanmoins l'examen attentif prouve que les éléments de la paroi ne sont pas *perforés* ou déchirés, mais seulement écartés et refoulés, pouvant par conséquent revenir à leur disposition primitive après le passage du sperme.

Le but principal que le P. Bosius se proposait dans ces recherches est donc atteint : il est parvenu à prouver qu'il n'y a point de *perforation* sur tout le trajet du sperme depuis le spermatophore jusqu'à l'oviducte, mais que le passage à travers les deux cloisons puissantes se fait le long d'un *chemin préformé* permettant un trajet sans dérangement physiologique des tissus.

Le R. P. Bolsius continue à étudier les détails du sujet, et à chercher les points de comparaison dans d'autres espèces d'hirudinées.

Le mémoire de M. F. Meunier *Études de quelques diptères de l'ambre* est ensuite présenté à la section. M. A. Proost et M. l'abbé Charles Cabeau sont priés de bien vouloir faire rapport sur ce travail.

Quatrième section

Séance du mercredi 10 avril 1901. MM. les docteurs de Buck et De Moor font une communication sur *Un détail de structure de la cellule nerveuse.*

Le but de cette communication n'est nullement d'exposer en détail la structure des cellules nerveuses, telle que nous la révèlent les recherches récentes. Nous voulons simplement mettre sous les yeux quelques préparations où l'on peut nettement distinguer un détail de structure sur lequel on a dans ces derniers temps attiré l'attention, notamment les canalicules intracellulaires. Avant d'en aborder la description, il est utile, pour fixer les idées, de résumer brièvement l'état de nos connaissances au sujet de la structure intime des cellules nerveuses.

Ce n'est guère que depuis l'introduction en histologie de la méthode de Golgi que nous avons une idée quelque peu nette de la structure des cellules nerveuses. Cette méthode met admirablement en relief la forme extérieure des cellules nerveuses et des prolongements, mais ne permet pas d'en étudier la structure intime.

La technique indiquée par Nissl (fixation par l'alcool et coloration au bleu de méthylène) constitue un progrès réel en ce sens qu'elle met en évidence certaines parties colorables de la cellule nerveuse, que l'on a désignées depuis sous le nom de *corpuscules de Nissl*, ou bien sous le nom de *substance tigroïde* (von Lenhossèk), en raison de l'aspect spécial que la présence de ces corpuscules donne à l'élément cellulaire. Ces corpuscules, dont le volume, la forme, la disposition varient beaucoup d'une cellule à l'autre à l'état normal, subissent des modifications très apparentes sous l'action d'influences diverses, telles la section du cylindre-axe, l'excitation électrique, l'action de certains toxiques, certaines

infections, etc. Ces diverses modifications, ainsi que le développement progressif de la substance tigroïde dans la cellule nerveuse au cours de son évolution, permettent de supposer que cet élément structuré joue un rôle important dans les manifestations vitales de la cellule nerveuse. Ce rôle, il est vrai, a été contesté par quelques auteurs, entre autres par Held, qui considère les corpuscules de Nissl comme résultant de la précipitation de substances normalement dissoutes. Cette précipitation s'effectuerait après la mort, par suite d'un changement de réaction du milieu qui d'alcalin deviendrait légèrement acide, ainsi que sous l'influence des liquides fixateurs et des colorants. Mais, même en admettant cette interprétation, il n'en est pas moins vrai que cette précipitation suppose la présence d'une substance spéciale dans le protoplasme, s'y trouvant dans des conditions variables suivant l'état des échanges organiques intracellulaires; et dès lors la méthode de Nissl nous permettra de nous rendre compte jusqu'à un certain point de l'état fonctionnel de la cellule nerveuse soit au moment où la mort s'est produite, soit au moment où le liquide fixateur ou le colorant a agi sur le tissu.

La méthode de Nissl, avons-nous vu, ne colore qu'une partie de la cellule nerveuse, les corpuscules de Nissl, qui sont disséminés dans la substance fondamentale du protoplasme, dans laquelle cette méthode ne révèle aucun détail de structure. Pour mettre en évidence la structure de cette partie du protoplasme cellulaire, il faut s'adresser à d'autres méthodes, qui constituent une des acquisitions les plus récentes de l'anatomie fine du tissu nerveux. On est, en effet, parvenu, par des méthodes longues et compliquées, à mettre en relief divers détails de structure sur la signification desquels l'accord est loin d'être fait. Il résulte des travaux de Solger, Flemming, Dogiel, Cox, Apathy, Bethe, Golgi, Ramon y Cajal, Held et d'autres, que des fibrilles entrent dans la constitution de la cellule nerveuse. D'après Apathy, les *neurofibrilles* (c'est le nom qu'il donne à ces fibrilles) constitueraient un véritable réseau. Ces neurofibrilles à leur tour seraient formées, d'après Bethe, par des *fibrilles élémentaires* unies entre elles par une substance interfibrillaire et naîtraient aux dépens d'une variété spéciale de cellules totalement distinctes des cellules ganglionnaires. Ces fibrilles s'étendraient jusqu'aux organes périphériques et se mul-

tiplieraient par division longitudinale. L'ensemble de ces fibrilles forme donc un réseau s'étendant d'une manière diffuse entre les cellules ganglionnaires.

D'autres fibrilles anastomosées en réseau seraient disposées à la surface du corps cellulaire, des dendrites et du cône d'émergence du cylindre-axe. Tandis que Golgi considère ces réseaux péricellulaires comme étant constitués par la neurokératine, d'autres auteurs, parmi lesquels Ramon y Cajal, Held, etc., admettent leur nature nerveuse. Ce deuxième réseau fibrillaire a une disposition différente du premier; s'étalant à la surface des cellules et de leurs prolongements, il suit nécessairement leur direction. Ce manteau péricellulaire et péridendritique serait constitué, d'après Held, par les ramifications terminales, anastomosées d'un ou de plusieurs prolongements cylindraxiles. De ce réseau péricellulaire partiraient des prolongements s'appliquant sur le corps cellulaire et sur les prolongements protoplasmiques de la cellule enveloppée et se continuant directement (par concrescence) avec le protoplasme de cette dernière.

Les dernières recherches faites sur la structure des cellules ganglionnaires semblent démontrer une autre particularité : l'existence de canalicules dans le protoplasme de la cellule nerveuse. Ces canalicules sur lesquels Holmgren et Nelis furent les premiers à attirer l'attention, ont depuis été signalés par Studnicka, Bethe, Donnagio, Fragnito. Si la description qu'en donnent ces divers auteurs est à peu près identique, leur interprétation par contre est encore très discutée. Tous sont d'accord pour admettre qu'ils n'ont rien de commun avec les fibrilles.

D'après Bethe et d'après Nelis, on rencontrerait dans la cellule nerveuse deux espèces de canalicules : les uns correspondraient à ce que Golgi a décrit sous le nom de réticulum endocellulaire, les autres aux canalicules décrits par Holmgren. Cette dernière variété de canalicules, que Studnicka considère comme des vacuoles réunies par confluence, pour Holmgren contiendraient de la lymphe. Ces canalicules affectent une disposition variable, le plus souvent en guirlande ou en glomérule, et donnent à la cellule un aspect spécial auquel Nelis a donné le nom d'*état spirémateux*. Donnagio a décrit également des canalicules anastomosés dans les cellules nerveuses : leur calibre varierait suivant la région du

système nerveux que l'on examine, mais serait à peu près uniforme pour tous les canalicules d'une même cellule. Quelques canalicules paraissent déboucher à la périphérie cellulaire ; ils suivent dans le protoplasme un parcours ondulé qui s'adapte aux mailles du réseau fibrillaire. Le noyau cellulaire se montre entouré d'un anneau clair de même calibre que les canalicules et dans lequel quelques-uns de ceux-ci viennent déboucher. L'ensemble de ces canalicules représenterait un système circulatoire intracellulaire.



Fig. 1. — Réticulum endocellulaire de *Golgi*

Il importe de remarquer que déjà en 1886 Adamkiewicz, par sa méthode d'injection, avait mis en évidence un appareil circulatoire dans la cellule ganglionnaire. D'après lui, les capillaires artériels donnent naissance à des vaisseaux très fins (vaisseaux séreux) dont la lumière est trop étroite pour laisser passer les corpuscules sanguins. Chacun de ces canalicules, en arrivant à la capsule de la cellule, traverse celle-ci, se dilate et entoure la cellule comme un gant. Un vaisseau afférent ramène le sang à un capillaire artériel. En outre, il existerait, d'après Adamkievicz, un vaisseau veineux très fin, prenant son origine dans le noyau (que cet auteur considère comme une cavité vide) ; ce vaisseau charrierait les produits de la combustion cellulaire dans le système

veineux. Les recherches de Holmgren confirment en partie les vues d'Adamkiewicz. Elles l'ont conduit à admettre que dans toutes les classes animales et dans toutes les parties du système nerveux, la cellule nerveuse est irriguée de canalicules, qui parcourent en tous sens le protoplasme et s'anastomosent de manière à constituer un réseau. Ces canalicules sont en communication avec de fins vaisseaux péricellulaires appartenant au système lymphatique; grâce à eux, la lymphe pénétrerait dans la profondeur du protoplasme nerveux.

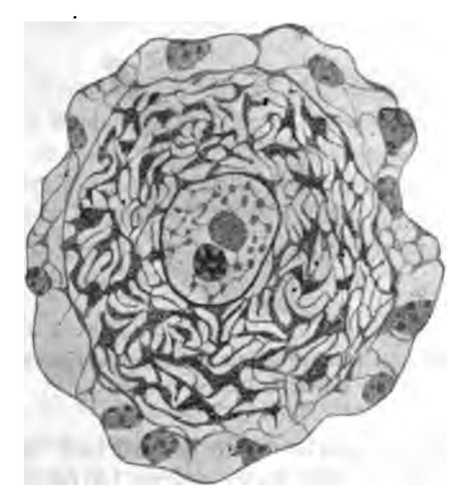


Fig. 2. — Figure de Holmgren
Cellule nerveuse spinale électrisée de la poule. Mélange de Rabl.
Toluidine-érythrosine.
Zeiss. Apochr. 2 mm. CC. 8.

Fragnito rattache l'existence de l'espace périnucléaire et des canalicules intracellulaires au mode de développement de la cellule nerveuse. Cet auteur admet en effet que la cellule nerveuse adulte est le résultat de la fusion de plusieurs neuroblastes, le principal d'entre eux devenant le noyau, les autres constituant le protoplasme qui entoure le noyau. L'espace périnucléaire et les canalicules intracellulaires ne seraient que les interstices persistant entre les divers neuroblastes fusionnés. On comprendrait

ainsi naturellement l'existence d'un sinus périnucléaire communiquant avec les autres espaces et l'abouchement de ceux-ci à la surface cellulaire. Pour Fragnito, les canalicules intraprotoplasmiques n'auraient pas de paroi propre, au moins dans les cellules nerveuses des oiseaux et des mammifères, sur lesquelles a porté spécialement son étude.

Quoi qu'il en soit, il semble aujourd'hui bien établi qu'un système canaliculaire existe à l'état normal dans le protoplasme de la cellule nerveuse. De nouvelles recherches spécifieront sa nature, sa distribution et son rôle; mais, dès aujourd'hui, il importe de



Fig. 3. — Intoxication tétanique. Cellule de la corne antérieure de la moelle. Zeiss. 4. DD. v. Gieson.

tenir compte de cette particularité de structure dans l'étude des cellules nerveuses à l'état pathologique. La connaissance de ce détail permettra d'interpréter certains aspects de la cellule, tel par exemple l'existence de vacuoles, de certaines d'entre elles tout au moins, dans le protoplasme. La dilatation des canalicules endoprotoplasmiques sous l'influence d'un trouble circulatoire ou d'une action toxique peut donner naissance à un état vacuolaire, phénomène dont l'interprétation était difficile jusqu'ici et que plusieurs auteurs même considéraient comme artificiel.

Les canalicules endocellulaires se montrent fréquemment d'une manière très évidente dans divers états pathologiques. C'est une préparation de ce genre que montre la figure 3. C'est la coupe d'une moelle de cobaye intoxiqué par la toxine tétanique. Les formations canaliculaires, comme on peut en juger, y sont très distinctes.

Cinquième section

Mardi 9 avril. La réunion est présidée par M. Dubois, professeur à l'Université de Gand, président de la section. M. Alex. Halot, consul du Japon, fait une conférence accompagnée de projections lumineuses sur *L'Extrême-Orient à l'aurore du XX[e] siècle.*

Le conférencier rappelle sommairement les traits essentiels des constitutions sociales et politiques si profondément variées des empires du Japon, de la Chine et des royaumes vassaux : la Corée, l'Annam, etc.

Il passe en revue les causes psychologiques de l'antagonisme des Chinois et des Européens et montre que l'origine des événements actuels doit se chercher bien ailleurs que dans une soi-disant réaction contre les missionnaires chrétiens : la religion, à laquelle les Chinois sont indifférents, n'y est pour rien; le mouvement est purement politique et ce n'est qu'à titre d'étranger que le missionnaire est exposé aux vexations des Chinois.

Mercredi 10 avril. Le secrétaire communique son rapport sur les travaux de la section pendant les vingt-cinq années écoulées.

Ensuite M. V. Waucquez expose les résultats obtenus par les œuvres agricoles que les catholiques belges ne cessent de développer dans le pays entier. Cette conférence sera reproduite dans un prochain fascicule de la Revue des Questions scientifiques.

Jeudi 10 avril. Conférence de M. Jules Leclercq, vice-président du tribunal de Bruxelles : *Les conflits du droit et de la force et les nationalités opprimées. — Finlande, Transvaal, Arménie.*

M. Jules Leclercq est douloureusement frappé de la contradiction qui se manifeste, brutale, cynique, entre la conception moderne du droit et le règne triomphant de la force. Il trouve l'explication de l'énigme dans l'impérialisme qui a gagné toutes les grandes nations, depuis l'Amérique jusqu'à la Russie; qui est devenue l'obsession de leurs hommes d'État; qui a submergé l'idée nationale au point de faire tomber la barrière du droit.

Aujourd'hui, comme autrefois, à Rome, l'impérialisme est le mépris des droits des autres peuples que ceux qui évoluent dans

l'orbite de l'empire. Périssent les petites nations au profit des grandes. C'est au nom de ce principe que l'Europe a permis d'anéantir des peuples, de les opprimer, de les égorger.

L'orateur a exposé les conflits du droit et de la force chez trois peuples qu'il a étudiés sur place au cours de ses voyages : les Arméniens, les Boers et les Finlandais. Il a fait de saisissants rapprochements entre les massacres d'Arménie et les massacres du Transvaal, montrant ce que ceux-ci ont encore de plus odieux que ceux-là, puisque en Arménie ce sont des Kurdes qui égorgent des chrétiens, tandis qu'au Transvaal se sont des chrétiens qui égorgent des chrétiens, et cela sous les yeux des noirs que les chrétiens ont mission de civiliser. Il n'a pas dissimulé son admiration pour les Boers, qui se sont révélés comme un des peuples les plus remarquables de notre époque. Il a rappelé d'ailleurs que, dès le début de la guerre, il a prédit leur magnifique résistance.

Après avoir plaidé la cause des Arméniens et celle des Boers, l'orateur a plaidé celle des Finlandais. Il a montré sur quelles inébranlables bases juridiques repose leur droit à l'autonomie. La Finlande, bien qu'unie à la Russie, ne peut être traitée en pays conquis comme la Pologne, et la Russie ne peut lui imposer ni ses lois, ni sa langue, ni sa religion.

ASSEMBLÉES GÉNÉRALES

I

ASSEMBLÉE GÉNÉRALE DU MARDI 9 AVRIL 1901

La séance s'ouvre à 2 h. 1/2 à l'Hôtel Ravenstein, sous la présidence d'honneur de M. Beernaert, ministre d'État, et la présidence effective de M. Lemoine, membre de l'Institut de France, président en exercice de la Société.

M. Georges Lemoine remercie M. Beernaert d'avoir bien voulu accepter la présidence d'honneur de la séance d'aujourd'hui. C'est une bonne fortune pour la Société de voir participer à ses travaux cet éminent homme d'État, ancien premier ministre, membre de l'Académie royale de Belgique, associé de l'Institut de France, dont la réputation comme penseur et comme orateur est universelle.

M. Lemoine remercie la Société de l'honneur qu'elle lui a fait en le choisissant comme président pour l'année 1900-1901. Il fait part de l'élection récente à l'Académie des sciences de Paris de M. Humbert, membre de la Société, en remplacement d'Hermite.

M. Lemoine fait ressortir la vitalité de la *Société scientifique de Bruxelles* qui, depuis 25 ans, a fait ses preuves par ses réunions, par ses publications et par les travaux personnels de ses membres.

La Société a eu la douleur de perdre un grand nombre de ses membres, notamment le R. P. Carbonnelle, Mgr de Harlez, Gilbert, de Barrande, Puiseux, le prince Boncompagni, B. de Saint-Venant, le R. P. Perry, d'Abbadie, Le Play, Daubrée, Vicaire, Pasteur, Hermite. Mais il lui reste encore parmi ses membres étrangers à la Belgique, MM. Amagat, Boussinescq, de Bussy, Fabre, Haton de la Goupillière, Hautefeuille, l'amiral de Jonquières, Camille Jordan, de Lapparent, le général Newton, Tannery, Witz et Wolf.

Depuis 1875, beaucoup de nos collègues ont admirablement grandi par leurs œuvres. Pour ne parler que de celles qui se rattachent aux sciences expérimentales, on peut citer : les travaux si intéressants qui ont fait de M. Louis Henry un des maîtres de la chimie organique ; les recherches de M. Van der Mensbrugghe ; les travaux de M. Proost sur la science agricole ; le traité de géologie de M. de Lapparent, arrivé à sa cinquième édition ; les synthèses minéralogiques de M. Hautefeuille ; les travaux par lesquels M. Duhem a introduit les mathématiques les plus élevées dans l'étude de divers phénomènes chimiques ; les recherches par lesquelles M. Boussinescq a élucidé les théories de l'hydraulique ; les expériences de M. Amagat sur les vapeurs et les gaz à des pressions atteignant 200 et 300 atmosphères ; les découvertes qui font de M. Branly le principal auteur de la télégraphie sans fil.

Ces résultats montrent par les faits qu'on peut être à la fois un catholique sincère et un ardent pionnier de la science.

La science est et doit être un lien précieux entre les hommes de bonne volonté quelles que soient leurs croyances individuelles.

L'Église impose à ses enfants certains points fixes réservés dans leurs discussions, mais en dehors elle leur laisse toute latitude pour les recherches scientifiques ; elle les encourage à relever le niveau intellectuel de l'humanité. Léon XIII a ouvert aux historiens les archives du Vatican. Les théologiens ont une largeur de vues qu'on ignore trop dans le monde savant et dont témoigne entre

autres le livre laissé par l'un des membres de la Société, M. Duilhé de Saint-Projet (*Apologie scientifique de la foi chrétienne*).

Les travaux faits depuis 25 ans par des savants catholiques dans toutes les branches des connaissances humaines ont singulièrement modifié leur situation vis-à-vis des hommes sérieux. Il peut se faire que parmi les ignorants, les railleries soient encore monnaie courante. Il n'en est pas de même parmi les hommes qui se respectent et qui avec des opinions philosophiques diamétralement contraires travaillent aux progrès de la science.

Si la science est un lien puissant entre les hommes différant par leurs opinions philosophiques, elle doit l'être encore bien davantage lorsque ces opinions sont les mêmes. La *Société scientifique de Bruxelles* vivra parce qu'elle établit des relations cordiales entre ces hommes qui sont ainsi doublement frères.

M. Godefroid Kurth, professeur de l'Université de Liége, fait un rapport sur les travaux de deux sociétés allemandes, la *Leo-Gesellschaft* de Vienne et la *Görres-Gesellschaft*, qui l'avaient délégué à cet effet.

Ces deux associations poursuivent sur le terrain des sciences historiques et morales le même but que la *Société scientifique de Bruxelles;* s'efforçant de promouvoir le zèle et l'ardeur des catholiques pour les travaux scientifiques. Jeune encore, la *Leo-Gesellschaft* a déjà fait preuve d'une exubérante activité; M. Kurth expose en détail les résultats des œuvres nombreuses qu'elle a produites et des entreprises importantes dont elle poursuit, sans se donner de relâche, la prochaine réalisation. Quant à la *Görres Gesellschaft,* elle va, cette année même, comme la *Société scientifique,* célébrer ses noces d'argent. Elle est parvenue à se créer en Allemagne, une situation prépondérante par le nombre imposant de ses membres, l'autorité de ses publications et l'influence qu'elle exerce pour la diffusion de la science chez les catholiques allemands. Nous publions plus bas (p. 240) *in extenso* le Rapport de M. Kurth (*).

(*) Par suite de la maladie de l'un de ses proches, M. le Comte Domet de Vorges, ancien Président de la *Société scientifique*, n'a pu assister à nos fêtes jubilaires, ni faire le rapport annuel sur les travaux de la *Société bibliographique* de Paris, dont il était le délégué.

La parole est alors donnée à M. Van Biervliet, professeur à l'Université de Gand pour sa conférence sur *L'évolution de la psychologie au XIXe siècle*. On la trouvera reproduite *in extenso* dans la livraison de juillet 1901 de la REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES (2e série, t. XX, pp. 107-129); en voici un résumé.

M. Van Biervliet insiste particulièrement sur la modification profonde qu'a subie la science de l'esprit, à la fin du siècle écoulé; il fait l'histoire de la psychologie expérimentale.

L'orateur rappelle les origines lointaines du mouvement actuel. La psychologie physiologique est née en dehors de la philosophie. De tout temps, les médecins et les physiologistes ont observé et étudié les concomitants organiques des phénomènes psychiques.

Au début du XIXe siècle, Jean Müller, plus tard, Helmholtz, Dubois Reymond, d'autres encore ont été amenés à étudier expérimentalement des phénomènes conscients. La tentative de Fechner, auteur de la célèbre loi psycho-physique, n'a donné que des résultats médiocres.

Plus heureux, M. W. Wundt, à la fois philosophe et physiologiste, créa la psycho-physiologie. A l'heure actuelle, il existe de par le monde plus de cent établissements analogues, dans lesquels on étudie toutes les questions psychiques relevant de la méthode expérimentale.

Le conférencier montre l'influence exercée dans le domaine de la psychologie expérimentale par Charcot et les neurologistes de son école : il parle de l'anthropologie criminelle et de la psychologie des foules.

Pour donner une idée des modifications profondes qui se sont introduites dans la manière d'étudier les problèmes psychologiques, il donne une esquisse des théories sur la mémoire et compare ce que l'on savait, il y a vingt ans, à ce que l'on sait aujourd'hui.

Dans sa péroraison, l'orateur déclare que la psychologie expérimentale ne prétend, en aucune façon, détrôner la psychologie métaphysique, mais la compléter.

Il dit que la recherche patiente et consciencieuse des faits, le souci de remplacer toutes les allégations vagues par des données exactes et précises ne peut amener que des résultats heureux.

« Pour les expérimentateurs, dit-il, les théories ne sont que

des instruments, les faits sont tout. „ Il conclut ainsi : “ Établir des faits, encore des faits, toujours des faits et surtout des faits nettement et pleinement constatés, n'est-ce pas le plus sûr moyen de servir la vérité ? „

II

ASSEMBLÉE GÉNÉRALE DU MERCREDI 10 AVRIL 1901

Cette assemblée générale se tient dans la grande salle de marbre du Palais des Académies gracieusement mise à la disposition de la Société par l'Académie royale. La séance s'ouvre à 3 heures sous la présidence d'honneur de S. E. le Cardinal Goossens, Archevêque de Malines, Primat de Belgique, et de Son Excellence Mgr Granito di Belmonte, Nonce apostolique près de S. M. le Roi des Belges, et sous la présidence effective de M. Lemoine, membre de l'Institut, président en exercice de la Société.

M. Lemoine souhaite d'abord la bienvenue aux illustres personnages qui ont fait à la Société la faveur de venir présider sa séance jubilaire.

Son Excellence le Nonce apostolique lit ensuite la lettre suivante adressée à la *Société scientifique* à l'occasion de son vingt-cinquième anniversaire par S. S. le Pape Léon XIII.

Dilectis Filiis Sodalibus
Consociationis Bruxellensis a scientiis provehendis
Bruxellas

LEO PP. XIII

Dilecti Filii,

Salutem et apostolicam benedictionem.

Quod, pontificatu Nostro ineunte, de sodalitate vestra fuimus ominati, id, elapso iam ab institutione eius anno quinto et vicesimo, feliciter impletum vestris ex litteris perspicimus. In prove-

hendis enim scientiarum studiis, sive eruditorum coetus habendo sive Annalium volumina edendo, nunquam a proposito descivistis, quod coeptum fuerat ab initio, ostendendi videlicet " Nullam inter fidem et rationem dissensionem veram esse posse. „ Benevolentiam Nostram ob vestras industrias testamur; simulque hortamur, ut coeptis insistatis alacres, utpote temporum necessitati opportunis admodum. Naturae enim cognitio, si recto quidem et vacuo praeiudiciis animo perquiratur, ad divinarum rerum notitiam conferat necesse est, divinaeque revelationi fidem adstruat. Hoc ut vobis, vestrâque operâ, quam multis accidat, apostolicam benedictionem, munerum coelestium auspicem, sodalitati vestrae amantissime impertimus.

Datum Romae apud Sanctum Petrum die XX Martii anno MDCCCCI, Pontificatus Nostri vicesimo quarto.

LEO PP. XIII.

A nos chers Fils
les membres de la Société scientifique de Bruxelles
à Bruxelles

LÉON XIII, PAPE

Chers Fils,

Salut et bénédiction apostolique.

Ce qu'au début de Notre pontificat, Nous avions présagé de votre Société, aujourd'hui, vingt-cinq ans après sa fondation, vos lettres Nous en apprennent l'heureux accomplissement. En travaillant au progrès des études scientifiques, soit par vos réunions savantes, soit par la publication de vos Annales, vous ne vous êtes jamais départis de votre dessein initial, celui de montrer qu' " entre la foi et la raison, aucun vrai désaccord ne peut exister „. Nous vous exprimons Notre bienveillance pour vos efforts et Nous vous exhortons en même temps à poursuivre avec ardeur votre entreprise si bien en rapport avec les nécessités actuelles. Car l'étude de l'univers, si elle est menée avec droiture et sans préjugé, doit aider à la connaissance des choses de Dieu, et établir la foi à la révélation divine. Pour que ce bonheur vous advienne et par vous à beaucoup d'autres, Nous accordons avec

la plus vive sympathie à votre Société, la bénédiction apostolique, gage des faveurs célestes.

Donné à Rome, à Saint-Pierre, le 20 mars 1901, l'an vingt-quatrième de Notre pontificat.

Léon XIII, Pape.

L'assemblée écoute debout la lecture latine et française de la Lettre pontificale.

M. Mansion, secrétaire général, fait ensuite le rapport suivant sur les travaux de la *Société scientifique.*

Éminence, Excellence, Mesdames et Messieurs,

Il y a un peu plus d'un quart de siècle, le 18 novembre 1875, avait lieu la séance inaugurale de la *Société scientifique de Bruxelles,* devant une assemblée nombreuse, où se trouvaient des représentants de presque toutes les villes de la Belgique et aussi quelques membres étrangers de notre jeune association.

Aujourd'hui, nous célébrons notre jubilé de vingt-cinq ans, en présence d'une réunion bien plus imposante; nous avons en ce jour, comme Présidents d'honneur de cette fête jubilaire, un prince de l'Église romaine, Son Éminence le Cardinal-Archevêque de Malines, et le représentant de S. S. le Pape Léon XIII auprès de Sa Majesté le Roi des Belges, Son Excellence Mgr Granito di Belmonte, archevêque d'Édesse; M. de Trooz, ministre de l'Intérieur, l'un des membres de ce gouvernement catholique auquel la Belgique doit d'être comme une oasis paisible au milieu des orages qui menacent ou agitent d'autres pays, s'est fait représenter à cette solennité. Autour de nous, nous voyons les délégués des Universités et des Sociétés scientifiques catholiques, des notabilités de la politique et de la science.

En rapprochant ces deux dates, 18 novembre 1875, 10 avril 1901, le premier sentiment de nos cœurs est un sentiment de gratitude envers la divine Providence qui a si visiblement béni la Société scientifique de Bruxelles. *Nisi Dominus aedificaverit domum, in vanum laboraverunt qui aedificant eam.* Si le Seigneur n'avait travaillé avec nous, tous nos labeurs auraient été vains.

Nous remercions, au nom de notre association, tous ceux qui veulent bien rehausser de leur présence la solennité de cette séance jubilaire : d'abord ceux qui sans appartenir à la *Société scientifique de Bruxelles,* ont répondu à nos invitations, puis Messieurs les délégués des Universités et des Sociétés scientifiques catholiques, et M. le Directeur général de l'enseignement supérieur, représentant M. le ministre de l'Intérieur; enfin et surtout, nos Présidents d'honneur en ce jour, Son Excellence Mgr le Nonce apostolique et son Éminence le Cardinal-Archevêque de Malines.

C'est aussi pour accomplir un devoir de reconnaissance envers nos collaborateurs, particulièrement envers les ouvriers de la première heure, que nous allons essayer de retracer sommairement l'histoire de la *Société scientifique,* surtout pendant cette période de son existence où elle avait pour guide son premier secrétaire général, le R. P. Carbonnelle, de la Compagnie de Jésus. Si nous attendions les noces d'or de la Société pour rassembler ces souvenirs, il serait à craindre qu'aucun des premiers fondateurs de la Société ne fût plus là pour les contrôler ou en attester la vérité.

I

LA FONDATION DE LA SOCIÉTÉ

Quels ont été les initiateurs du mouvement qui a abouti à la fondation de la Société scientifique? Si mes renseignements sont exacts, au début, trois groupes y ont travaillé avec une égale ardeur.

Il y a d'abord le groupe agricole, si j'ose ainsi dire. C'est l'un de nos vénérables présidents d'honneur de cette année jubilaire, M. le Comte van der Straten Ponthoz, ce digne vétéran de toutes les œuvres catholiques; c'est M. Léon 't Serstevens qui, après une vie consacrée à l'étude de tous les moyens de relèvement de l'agriculture, nous a été enlevé pendant cette année même; c'est encore et surtout notre Président d'après-demain, M. Proost, qui, dans la suite, devait porter de si rudes coups à la routine agricole dans notre pays. M. Proost était rentré de Paris, où il avait

fréquenté des laboratoires de savants célèbres mais incrédules, pénétré de la nécessité de fonder une ligue internationale de savants religieux contre le matérialisme : il faut, disait-il, attaquer les incroyants sur le terrain scientifique, sur le terrain des faits; en même temps, pour avoir à l'avenir des lutteurs nombreux et bien armés, il faut répandre le goût des études scientifiques parmi les catholiques, et réformer l'enseignement moyen dans ce sens.

Un second groupe était celui des membres des cercles Cauchy. Notre confrère, M. Lagasse, avait fondé, avec quelques amis, pendant ses années d'université, un cercle où des jeunes gens s'exerçaient à l'art de la parole en faisant des conférences scientifiques à leurs camarades. Ce cercle ne resta pas isolé. Un de ses membres, feu Th. Belpaire, créa des cercles analogues à Anvers, puis à Nivelles avec M. Lagasse, et à Mons, sous le nom de " cercles Cauchy ". Grâce à l'impulsion de Th. Belpaire et de M. Lagasse, des cercles Cauchy furent aussi fondés à Louvain, sous le patronage de Gilbert, professeur à l'Université catholique, et à Bruxelles par le R. P. Carbonnelle. Il y en avait même deux dans cette dernière ville.

Le R. P. Carbonnelle, Gilbert, M. le Dr Lefebvre et d'autres professeurs de l'Université catholique de Louvain formaient un troisième groupe où fermentaient des idées semblables à celles de MM. Proost, Lagasse et de leurs amis, mais avec cette nuance : selon eux, il faut non seulement vulgariser la vraie science et en combattre les contrefaçons, mais il faut surtout faire œuvre de savant dans le sens technique du mot, en se livrant à des recherches personnelles. Le P. Carbonnelle était profondément pénétré de l'importance de la science et de la presse scientifique au XIXe siècle. Sans parler de son activité comme publiciste à l'époque où il était à Calcutta, je rappellerai la part importante qu'il prit à la rédaction des Études religieuses publiées par les Pères de la Compagnie de Jésus à Paris, un peu avant 1870 : il y fit paraître une foule d'articles sur des sujets scientifiques, dont quelques-uns extrêmement remarquables sur la thermodynamique.

Les trois courants dont je viens de parler se rencontrèrent dans les réunions des cercles Cauchy. L'idée surgit chez MM. Proost, Lagasse, et, après quelques hésitations plus ou moins grandes,

chez le P. Carbonnelle et chez Gilbert, de grouper les éléments divers chez qui l'on voyait les mêmes tendances, en une Association catholique pour l'extension et la diffusion de la science. Quatre réunions préliminaires eurent lieu en 1875, le 1er et le 22 mars, le 10 et le 17 juin, à la *Société centrale d'Agriculture* qui devint ainsi le centre de cristallisation des efforts dont je viens de parler. On peut dire que le 17 juin 1875 la Société était virtuellement fondée, les articles fondamentaux du règlement de la *Société scientifique de Bruxelles* étaient arrêtés : elle emprunte sa devise au concile du Vatican : *Nulla unquam inter fidem et rationem vera dissensio esse potest;* elle ne permet pas qu'il se produise dans son sein aucune attaque même courtoise à la philosophie spiritualiste ou à la religion catholique; son but est de favoriser l'avancement et la diffusion de la science par la publication d'ANNALES consacrées à des travaux originaux, et d'une REVUE de haute vulgarisation; la Société ne s'occupe pas des sciences morales; elle se répartit en cinq sections : I. Sciences mathématiques. II. Sciences physiques. III. Sciences naturelles. IV. Sciences médicales. V. Sciences économiques.

Mais quelle activité ne fallut-il pas déployer pour transformer la Société créée virtuellement en juin 1875 en une Société réelle ayant un nombre suffisant d'adhérents pour vivre et se développer! Ceux-là seuls peuvent s'en faire une idée qui ont vu à l'œuvre, à cette époque, le R. P. Carbonnelle, MM. Gilbert, Lagasse, Proost et leurs amis. Rien ne les découragea, ni les courses inutiles, ni les longues et multiples correspondances sans succès apparent, ni les refus des catholiques trop timides ou trop ardents qui trouvaient la nouvelle association trop ardente ou trop timide. La Société centrale d'Agriculture, l'Université de Louvain, la Compagnie de Jésus, l'Académie royale et l'Académie de médecine, la noblesse et la haute bourgeoisie, le clergé, les Universités de l'État donnèrent un grand nombre d'adhérents belges. Le R. P. Carbonnelle, accompagné de Gilbert, fit en France une tournée de recrutement d'où il rapporta des adhésions précieuses, de membres de l'Institut, de professeurs des jeunes universités catholiques françaises : d'Abbadie, Hermite, Charles Sainte-Claire Deville, Puiseux, de Lapparent, Witz, Boulay, etc. Bientôt on pouvait ajouter à ces adhésions celles du P. Secchi, de

Barrande, du P. Perry; S. É. le Cardinal-Archevêque de Malines, Mgr Dechamps, s'inscrivait d'ailleurs en tête de la liste des membres fondateurs.

Le 18 novembre 1875, lors de la séance inaugurale de la Société, le R. P. Carbonnelle put annoncer qu'au lieu des 250 membres jugés nécessaires en juin pour constituer définitivement la Société, il y en avait 453, presque le double : 50 avocats, 50 médecins, 60 ingénieurs, 70 professeurs, dont 35 universitaires, avaient répondu à son appel.

Le R. P. Carbonnelle et notre premier président, M. le Dr Lefebvre, prononcèrent à cette séance inaugurale deux discours-programmes qui firent une profonde impression sur ceux qui les entendirent. Les deux orateurs s'étaient inspirés l'un et l'autre de la première constitution du concile du Vatican, cette charte des rapports de la Foi et de la Raison. *La science,* disaient-ils avec les Pères du concile, *quand elle est fidèle à sa propre méthode, conduit à Dieu, sa grâce aidant; quand les savants s'insurgent contre la foi, c'est qu'ils sont infidèles à la méthode scientifique ou qu'ils ignorent les enseignements de la foi.*

Depuis cette séance mémorable où les statuts provisoires furent définitivement adoptés, le R. P. Carbonnelle, secrétaire général de la *Société scientifique,* en devint, comme l'a dit Gilbert, le guide, le " moteur et l'inspirateur. Animé d'une passion vraie pour le progrès scientifique, doué d'une volonté de fer, d'une activité infatigable, d'une intelligence hors ligne, qui s'appliquait avec un égal succès aux mathématiques et à la philosophie, comprenant et parlant plusieurs langues ; écrivain solide, nerveux et mordant, le P. Carbonnelle était vraiment l'homme prédestiné pour cette œuvre et l'on peut dire qu'il s'y est dévoué jusqu'à la mort ".

Pendant l'année 1876, tout en organisant les premières sessions de la *Société scientifique,* il fait une propagande infatigable en faveur de la Revue des Questions scientifiques dont la fondation a été décidée, et enfin, en janvier 1877, il peut en publier le premier numéro.

On peut dire qu'à partir de ce moment, la partie scientifique de l'organisme de la Société, grâce surtout au R. P. Carbonnelle, a pris sa forme définitive quant à la tenue des sessions et à la publication des Annales et de la Revue.

Dans chacune des sessions, les sections s'assemblent le matin et les membres y exposent leurs recherches scientifiques personnelles. Elles sont publiées dans les ANNALES. Dans les réunions générales de l'après-midi se font des conférences de haute vulgarisation scientifique : elles paraissent en résumé dans les ANNALES, *in extenso* dans la REVUE. Celle-ci publie en outre des articles étendus, des comptes rendus bibliographiques, des analyses des recueils périodiques qui permettent à ses lecteurs de se tenir au courant des découvertes de la science contemporaine, de connaître les réponses que des savants autorisés font aux objections contre la religion et soi-disant empruntées aux sciences de la nature; on y fait ressortir, à chaque occasion, les harmonies providentielles de la philosophie naturelle et de la révélation.

II

LA VIE EXTÉRIEURE DE LA SOCIÉTÉ

Je lasserais la patience de mon bienveillant auditoire si je continuais l'histoire de la Société avec autant de détails que je viens de le faire pour les premières années. Je me contenterai pour le reste d'une esquisse rapide et de quelques détails statistiques. Je parlerai d'abord de son histoire externe, puis de ses publications.

Les statuts de la Société sont restés ce qu'ils étaient à l'origine, à part une légère modification votée en octobre 1877 : la petite session de juillet, qui coïncidait avec les examens ou avec les vacances universitaires fut supprimée, la grande session fut transportée d'octobre aux vacances de Pâques. Transitoirement, la troisième année sociale compta cinq sessions : en janvier, mai et novembre 1878, en janvier et avril 1879. C'est à cause de ce déplacement de la grande session, d'octobre aux Pâques, que nous n'avons pas célébré nos fêtes jubilaires en octobre 1900, mais en avril 1901.

Pendant la quatrième année de la *Société scientifique,* grâce à l'initiative de son Président d'alors, M. L. Henry, professeur à l'Université catholique de Louvain, le Conseil arrêta un règlement pour l'encouragement des recherches scientifiques. Depuis cette

époque, la Société a accordé maintes fois des subsides à ceux de ses membres qui, poursuivant une recherche déterminée, se voient arrêtés par les dépenses qu'elle entraîne. Des concours ont aussi été institués : le sujet en est proposé par les diverses sections. Les prix sont de cinq cents francs au moins : la Société y joint une médaille d'une conception originale due au Baron Béthune. Jusqu'à présent, nous avons pu la décerner trois fois : à M. l'abbé G. Smets, professeur au Collège épiscopal de Hasselt, pour ses recherches sur les *Chéloniens;* à M. Ch.-J. de la Vallée Poussin, de l'Université de Louvain, pour un mémoire *sur les intégrales définies* qui est devenu immédiatement classique en haute analyse; enfin, au R. P. Deschamps, S. J., pour une *Étude comparée du rein (néphridie) chez les Gastéropodes prosobranches et pulmonés.*

La Société a été présidée treize fois par des Belges, douze fois par des savants français. Les présidents belges ont été sept fois des professeurs de l'Université catholique : MM. le Dr Lefebvre et L. Henry (chacun deux fois), MM. Gilbert, de la Vallée Poussin et F. Dewalque. Les autres présidents belges ont été M. G. Dewalque de l'Université de Liége, M. Mansion de l'Université de Gand, feu le général Jacmart, et MM. Delgeur, 't Serstevens et Lagasse.

L'Université catholique de Paris nous a présidés trois fois en la personne de M. de Lapparent. L'Université catholique de Lille représentée par MM. Béchamp, Desplats et Witz, trois fois aussi; les autres présidents français ont été MM. d'Abbadie, de Nadaillac, Domet de Vorges, le regretté M. Vicaire et enfin deux fois notre cher président d'aujourd'hui, M. G. Lemoine.

En 1893-1894, nous eûmes comme président d'honneur M. Hermite dont on venait de fêter le jubilé de soixante-dix ans. A la session d'avril 1900, la *Société scientifique,* voulant donner à M. le Dr Lefebvre et à M. le Comte van der Straten Ponthoz un témoignage de gratitude et de respect, les a nommés présidents d'honneur pour la durée de notre année jubilaire.

Le nombre des membres de la Société a été en augmentant jusqu'à la lutte scolaire de 1879-1884. A partir de cette époque et à la grande douleur du P. Carbonnelle, il y eut une notable diminution. Depuis 1896, nous constatons au contraire, une marche légèrement ascendante. La multiplicité des œuvres nouvelles qu'il a fallu créer depuis 1880, pour parer aux dangers de la lutte

scolaire et de la crise sociale révélée par les troubles de 1886, explique parfaitement la diminution dont j'ai parlé tantôt : elle ne se faisait d'ailleurs sentir qu'en Belgique. Nos membres de France, d'Espagne et des autres pays nous restèrent fidèles.

Heureusement, pendant cette période difficile, la Revue des Questions scientifiques, sous la direction énergique du P. Carbonnelle, prospérait à tous les points de vue. Le nombre des abonnés alla en croissant pendant longtemps. C'est grâce aux bénéfices accumulés pendant ces années grasses, par sa prudente administration, que nous avons pu traverser les années maigres qui ont suivi sa mort. Les intérêts du capital de la Société suffisent à peu près chaque année, à combler le déficit que laisse maintenant la publication de la Revue et des Annales, depuis que nous publions plus souvent des mémoires à planches. Nos économies font l'office du volant dans les machines, elles maintiennent l'uniformité du mouvement dans la vie financière de la Société.

En 1890, sur l'initiative de M. Kurth, et en vue de faciliter la tenue des Congrès scientifiques internationaux des catholiques, nous avons conclu une fédération avec la *Société bibliographique* de Paris qui poursuit le même but que nous, dans le domaine des sciences historiques. Chacune des deux associations est représentée, depuis lors, à l'assemblée annuelle principale de l'autre et il y est donné lecture d'un rapport sommaire sur ses propres travaux.

Les membres de la *Société scientifique de Bruxelles* ont pris une part importante aux Congrès scientifiques internationaux des catholiques, en 1888 et 1891 à Paris, en 1897 à Fribourg, en 1900 à Munich. En 1894, ce sont nos membres qui ont assumé la tâche d'organiser la session de Bruxelles et ils ont réussi dans cette entreprise assez ardue.

Depuis 1890, et en vue de se faire connaître davantage, la *Société scientifique* a tenu sa session d'octobre en dehors de Bruxelles. En 1890 ce fut à Louvain, en 1891 à Gand, en 1892 à Liége, en 1893 à Namur, en 1894 à Anvers, en 1895 à Tournai, en 1896 à Malines, en 1897 à Charleroi, en 1898 à Louvain, en 1899 à Lille. Alors comme aujourd'hui, nous avons rencontré partout les plus vives sympathies auprès des autorités civiles et religieuses. A Louvain et à Lille, les recteurs des Universités catholiques

voulurent bien présider nos assemblées générales; à Anvers, ce fut le gouverneur de la Province; à Namur, le gouverneur et le délégué de Mgr l'Évêque, alors en tournée de confirmation; à Gand et à Tournai, à la fois Mgr l'Évêque et M. le Gouverneur; à Charleroi, le P. Recteur du Collège des RR. PP. Jésuites; à Liége, Mgr l'Évêque; à Malines, S. É. le Cardinal-Archevêque. Dans ces diverses occasions, les autorités ecclésiastiques ne se sont pas contentées de nous encourager de leur présence; partout, Nos Seigneurs les Évêques nous ont adressé des paroles de direction, avidement écoutées et soigneusement recueillies.

Nous avons rencontré les mêmes sympathies près des cinq représentants du Souverain Pontife qui se sont succédé à la nonciature de Belgique. Aussi, LL. EE. les cardinaux Ferrata, S. Vannutelli, Nava di Bontife, S. Exc. Mgr Rinaldini, et enfin S. Exc. Mgr Granito di Belmonte qui nous préside aujourd'hui, sont-ils inscrits dans la liste de nos membres fondateurs.

Enfin, vous le savez, Messieurs, Sa Sainteté le Pape, lui-même, a daigné nous encourager plusieurs fois. A nos débuts, le 15 janvier 1879, il voulut bien adresser à la Société une lettre qui, depuis lors, figure en tête de nos ANNALES, à la place d'honneur; dix ans plus tard, quand la mort de notre premier secrétaire général amena une crise qui mit en péril l'existence même de la Société, c'est grâce à l'intervention de Sa Sainteté, provoquée par Mgr Nava di Bontife (*), que nous avons pu franchir les difficultés du moment. Plus tard, la Société ayant envoyé au Saint-Père une adresse à l'occasion de son jubilé épiscopal, nous reçûmes encore du cardinal Rampolla une lettre d'encouragement et de direction.

En cette année jubilaire, la *Société scientifique de Bruxelles* a de nouveau fait parvenir à Sa Sainteté l'expression de son filial dévouement, dans une adresse transmise à Rome par Son Excellence le Nonce apostolique. Dans sa paternelle affection, le Saint-Père vient d'y répondre par une nouvelle lettre plus précieuse que toutes les précédentes et dont vous venez d'entendre la lecture.

(*) Comme témoignage de sa gratitude, la Société a fait frapper un exemplaire en vermeil de la médaille de la Société qui a été remis à Mgr Nava di Bontife, le 27 avril 1892, en son hôtel, par M. le Dr Lefebvre, Président de la Société, entouré des membres du Conseil.

Cette lettre est, pour tous les membres de la *Société scientifique de Bruxelles* la plus douce récompense qu'ils pussent espérer et nous demandons à S. Exc. le Nonce apostolique de vouloir bien transmettre au Saint-Père l'expression de notre vive gratitude, et d'agréer en même temps nos remercîments pour la part qu'il a prise à l'obtention de cette faveur.

III

LES TRAVAUX DE LA SOCIÉTÉ

Depuis ses débuts, la Société a tenu 79 sessions, quatre les deux premières années, cinq la troisième, trois chacune des vingt-deux suivantes. Elle a publié 24 volumes d'ANNALES, 48 volumes de la REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES; à la fin de cette année, ces chiffres seront portés à 25 et à 50.

A. *Travaux des sections.* Les cinq sections se sont réunies de 80 à 160 fois pendant cette période. Il est difficile de parler en détail de leurs travaux dans ce rapport général; mais ils seront indiqués, au moins, d'une manière sommaire, dans des rapports spéciaux dus à la plume plus compétente des secrétaires de chaque section. Je me contente donc d'une sèche énumération des auteurs de ces travaux (*).

1. *Sciences mathématiques, y compris l'astronomie et la science de l'ingénieur :* d'Abbadie, Baule, Belpaire, Bosmans, Braet, Carbonnelle, J. Carnoy, Clasen, Cousin, de Fierlant, de Lisleferme, De Tilly, *Dusausoy,* Dutordoir, d'Esclaibes, Ghysens, Gilbert, Goedseels, Guyétand, Haton de la Goupillière, Heis, Hermite, *Humbert,* Jordan, Joubert, Lafont, *Lagasse,* Lamey, Lechalas, Le Paige, *Leray,* Mansion, de Montessus, *Neuberg,* d'Ocagne, Pasquier, Pepin, Perry, Puiseux, de St-Venant, de Salvert, Secchi, *Sibenaler,*

(*) Les noms en italiques sont ceux d'auteurs de notes, résumés ou rapports sommaires publiés dans la première partie des ANNALES. Les mémoires qui ne sont que résumés dans les ANNALES ont souvent paru *in extenso* dans la REVUE. Comme il n'existe pas de table générale des ANNALES, il est possible que, malgré tous nos efforts, nos listes ne soient pas absolument complètes.

de Sparre, Stoffaes, Suttor, Teixeira, Turquan, Ch.-J. de la Vallée Poussin, A. Van Biervliet, *Vanderlinden*, Vicaire, *Vierendeel*, Ward.

2. *Sciences physiques* : Aschman, *Bareel*, Bruylants, Carbonnelle, *Chautard*, Claes, *Coupé*, *De Heen*, *De Hert*, *Delacre*, *de Locht*, *Delemer*, Delsaulx, *De Muynck*, *De Preter*, de Regnon, *Fr. Dewalque*, *De Greeff*, *Ducretet*, Duhem, *Gérard*, Gilbert, *Gill*, L. Henry, *P. Henry*, *Leconte*, Lemoine, Le Noble, *Lucas*, Ponthière, Schaffers, *Schmitt*, Thirion, *Thiry*, Van Aubel, A. Van Biervliet, *Van Geersdaele*, Van der Mensbrugghe, Van Tricht, *Witz*.

3. *Sciences naturelles* : d'Abbadie, *Alexis-M. G.*, Arcelin, *Ballion*, *Bapst*, Béchamp, Bellynck, *Bernardin*, *Blondel*, Bolsius, Boulay, Bourgeat, *Buisseret*, *Capart*, *J.-B. Carnoy*, De Beys, de Fierlant, Degive, *Delattre*, *Delgeur*, *Delvigne*, Deschamps, *Dierckx*, *G. Dewalque*, Dewèvre, Dollo, de Dorlodot, *P. Dumont*, Étienne, *Fabre*, Ferron, *P. George*, *Hahn*, *Lambiotte*, de Lapparent, *Leclercq*, Lecomte, *M. Lefebvre*, H. Lefebvre, de Limburg-Stirum, Magens-Mello, *A Meunier*, F. Meunier, Monier, *de Nadaillac*, *Oomen*, Proost, *Rachon*, *Renard*, *Rousseau*, Schmitz, *Schupp*, *H. et L. Siret*, Sohncke, *Stainier*, *Storms*, *Swolfs*, *de Trazegnies*, de la Vallée Poussin, Van den Gheyn, *Van Ortroy*, *Van Segvelt*, *de Vorges*, Vicent, *de Wavrin*, *Werotte*, Wouters.

4. *Sciences médicales* : *Borginon*, Charlier, Cousot, *Cuylits*, *Dansette*, *Debaisieux*, De Buck, Dr De Lantsheere, De Moor, Delcroix, *Denys*, Derville, *Deschamps*, Desplats, *Dever*, *Domec*, A. Dumont, Eeckman, *Eustache*, Faidherbe, Faucon, *Francotte*, Goix, Goris, *Glorieux*, *Guermonprez*, Hairion, *Henseval*, Heymans, Huyberechts, Lahousse, Laruelle, Lefebvre, Legouix, Lemière, *Masoin*, *Matagne*, Meessen, Moeller, Obet, *Papillon*, *Rutten*, *Schneider*, *Simon*, *Struelens*, *J. Van Biervliet*, *Van Gehuchten*, Van Heuverswijn, *Van Keerbergen*, Dr Vanderlinden, Venneman, *Verriest*, Warlomont, *Willième*.

5. *Sciences économiques et agriculture* : *André*, *Blondel*, *Edm. Carton de Wiart*, Cartuyvels, Cousin, De Beys, *Dejace*, *L. De Lantsheere*, *De Marbaix*, *E. Dubois*, *A. Dupont*, *Focillon*, *Ghesquière*, *Gisler*, *A. Henry*, V. Jacobs, *Cl. Jannet*, *Julin*, *Kennis*, de Kirwan, *Lambrechts*, *Lebon*, Leplae, Marlin, *de Moreau*, Nerincx, Proost, Pyfferoen, Theunis, *Thiebauld*, 't Serstevens, *J. de la Vallée*

Poussin, van der Straten Ponthoz, Van Geetruyen, Vanden Bossche, Van der Smissen, Visart, Vliebergh, Waucquez.

Ces diverses sections ont une vie autonome, particulièrement la section de médecine, et celle d'économie et d'agriculture. La section de médecine a une tendance pratique plus accentuée que les trois premières sections : souvent, au lieu d'y étudier des maladies, on y étudie des malades en chair et en os qui sont présentés à la section par leur médecin traitant. La cinquième section qui, après une assez longue éclipse, est ressuscitée grâce à l'énergique impulsion de présidents et de secrétaires zélés, a une tout autre allure : on y traite souvent, avec ampleur, dans des conférences-rapports, suivies de discussions, des questions spéciales d'économie sociale.

Dans les trois premières sections, les communications sont d'importance très inégale ; elles se résument les unes dans de courtes notes, les autres, dans des mémoires étendus. Je ne dirai rien des travaux de nos confrères de France, relatifs aux sciences cultivées dans ces trois sections, parce que les noms de leurs auteurs les recommandent suffisamment. Mais qu'il nous soit permis de signaler quelques travaux dus à des savants belges, qui, au dire de juges compétents, ne dépareraient pas les Recueils des grandes académies, et qui, pourtant, ne sont pas assez connus en Belgique. Citons, par exemple, le grand Mémoire de Gilbert sur le barogyroscope dont l'impression fut votée dans les Mémoires de l'Institut de France et qui valut à son auteur le titre de Correspondant de l'Académie de Paris ; les recherches de M. Ch.-J. de la Vallée Poussin sur les intégrales définies et sur les nombres premiers ; celles de M. L. Henry sur une foule de questions de philosophie chimique ; les études de M. Van der Mensbrugghe sur la constitution des liquides et celles du P. Schaffers, S. J., sur les machines électriques ; la genèse de la crête du Condroz et de la grande faille, par M. le Chanoine de Dorlodot, etc., etc.

Je termine ce que j'ai à dire de nos Annales par un aveu pénible. Quelques-uns des volumes de cette collection ont un aspect assez rébarbatif : ils sont affectés d'hypertrophie mathématique. Heureusement c'est l'inverse pour la Revue d'où les hiéroglyphes de l'algèbre sont presque entièrement bannis. La chose est facile à expliquer : les recherches d'analyse et de géométrie ne

sont pas susceptibles de vulgarisation, mais elles sont plus faciles à instituer que des expériences de physique, de chimie, de physiologie ou des observations relatives aux sciences naturelles, médicales et économiques.

B. *Conférences*. Dans nos séances de l'après-midi, nous avons eu 180 conférences de haute vulgarisation scientifique : 25 relatives aux mathématiques, à l'astronomie et à l'art de l'ingénieur; 25 sur la physique et la chimie; 25 sur l'agriculture ou l'économie sociale; 35 sur la physiologie, la médecine et l'hygiène; 55 sur les sciences naturelles, surtout sur la géologie, la paléontologie et la géographie; 15 sur des sujets touchant à la philosophie des sciences ou aux confins de la philosophie et des sciences de la nature.

Le conférencier que nous avons eu le plus souvent le plaisir d'entendre et d'applaudir a été M. de Lapparent; il ne nous a pas fait moins de neuf conférences, neuf conférences où, grâce à la magie de sa parole, nous avions l'illusion de comprendre les questions générales les plus controversées de la géologie. Après lui, si je ne me trompe, c'est M. Proost qui nous a entretenus le plus souvent : huit fois, il est monté à la tribune de la Société pour y défendre éloquemment les idées qui lui sont chères, sur l'enseignement des sciences naturelles et sur les moyens de faire progresser l'agriculture.

Citons encore parmi nos conférenciers les plus aimés : M. le marquis de Nadaillac, MM. Witz et Desplats de l'Université catholique de Lille; MM. Lefebvre, Verriest, de la Vallée Poussin, Gilbert, Masoin, Cousin, Henry, Fr. Dewalque, Debaisieux, Denys, Van Gehuchten, Ponthière, De Lantsheere, de l'Université de Louvain; MM. Francotte et de Locht, de celle de Liége; MM. Heymans, Van der Mensbrugghe, Van Biervliet, Vanderlinden de celle de Gand; les RR. PP. Van Tricht, Van den Gheyn, Lucas, Hahn, de la Compagnie de Jésus; MM. Leclercq et Joseph de la Vallée Poussin; etc., etc. — Je m'arrête, parce qu'il est impossible de tout dire dans un discours (*).

(*) Voici la liste chronologique, complète croyons-nous, de nos conférenciers jusqu'à la session d'avril 1901, exclusivement : Dr Lefebvre (4), de la Vallée Poussin (3), t' Serstevens (6), Renard (7), Proost (8), Verriest (3), Carbonnelle (2),

Parmi ces conférences, quelques-unes sur le darwinisme, la physiologie du cerveau, l'homme préhistorique, la parole, la conciliation du déterminisme physique avec la liberté humaine, portaient sur des questions de philosophie naturelle de la plus haute importance. D'autres, par exemple, celles du R. P. Lucas sur les rayons X et sur la télégraphie sans fil, ont été de vraies primeurs scientifiques pour le public instruit qui y a assisté. N'est-ce pas d'ailleurs à un membre de la *Société scientifique de Bruxelles*, M. Branly, professeur à l'Institut catholique de Paris, que l'on doit l'invention du récepteur qui a rendu possible la télégraphie sans fil, ce récepteur qui, comme un œil électrique, perçoit les oscillations hertziennes ?

Trois fois, au moins, des conférences ont été l'origine d'ardentes discussions sur des questions d'enseignement, enseignement des mathématiques ou des sciences naturelles dans les collèges, enseignement supérieur de l'agriculture. Nous faisons-nous illusion en croyant que cette dernière discussion n'a pas été sans influence sur la création de l'École supérieure d'agriculture de Louvain, et que les deux autres ont contribué au perfectionnement de l'enseignement scientifique dans les collèges catholiques ?

C. *Revue des Questions scientifiques.* Le compte rendu de ces discussions et le résumé de la plupart des conférences ont été publiés dans les ANNALES de la Société. Mais c'est dans la REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES que les conférences elles-mêmes ont paru *in extenso.*

Dans les ANNALES, la Société prouve qu'elle est, dans la mesure

---

De Heen, Lecomte (2), de Lapparent (9), Gilbert (2), Jacobs, De Beys, Masoin (3). Perry (4), Moeller (4), de Moreau, d'Abbadie (3), Lebon, J. Cartuyvels, Jacmart, Béchamp, Papillon, Desplats (3), Boulangé, Chautard, Cousin, Domec, Lafont, Henry (2), Van Tricht (7), Focillon, André, Thiebaud (2), de Locht (2), Delgeur (2), Fr. Dewalque, Thirion (2), De Marbaix, Rachon (2), Vicaire, Cuylits, Van den Gheyn (4), de Nadaillac (2), Visart (2), Witz (6), Francotte (4), Blondel, Cousot, Smets, Dollo (3), Kennis, G. Lemoine, Siret, Bapst, de Kirwan, Stainier (2). Buisseret, Cl. Jannet, Alexis, Swolfs, Lagasse (2), d'Ocagne, Van der Smissen. R. P. Dumont, J. de la Vallée Poussin (2), Debaisieux, M. Lefebvre (2), Van der Mensbrugghe, Dierckx, Denys (2). Leclerq (2), Dewèvre, Schmitz, Lucas (3), Heymans (2), Hahn (2) Van Gehuchten, Vierendeel, Gaston t' Serstevens, Laruelle, Delattre (2), Ponthière, Gerard, Huyberechts, Monthaye, Van Biervliet, Vanderlinden, Leplae, L. De Lantsheere.

modeste qui convient au petit pays auquel elle doit le plus grand nombre de ses collaborateurs habituels, une association sérieuse pour l'avancement de la science.

Dans la Revue, au contraire, nous nous affirmons comme une Société pour la diffusion de la science dans un sens spiritualiste et chrétien. C'est par la Revue que nous agissons sur le public ; c'est dans ses pages que nous lui faisons connaître les noms et les œuvres des grands savants catholiques : Volta, Ampère, Plateau, Lavoisier, Chevreul, Dumas, Puiseux, Pasteur, Van Beneden, d'Omalius d'Halloy, Dumont, Daubrée, Le Verrier, Secchi, Cauchy, Hermite, Le Play ; nous y mettons nos lecteurs en communication intellectuelle avec les savants contemporains qui continuent la tradition de ces illustres morts, qui professent hautement comme eux la foi chrétienne en même temps que leur amour pour la science et ses progrès.

Chaque livraison de la Revue contient d'abord des articles de grand texte qui prennent les deux tiers du volume ; les questions qui y sont traitées le sont largement, avec le luxe de détails qui convient à un recueil de ce format. Viennent ensuite des articles bibliographiques en petit texte où les ouvrages scientifiques les plus importants du dernier trimestre sont analysés et jugés par nos spécialistes. Enfin, une troisième série d'articles beaucoup plus concis et imprimés également en petit texte est consacrée à la „ Revue des recueils périodiques „. Astronomie, physique et chimie, géologie, géographie, agriculture et sylviculture, zoologie, anthropologie et physiologie, botanique, paléontologie, médecine, sciences industrielles, économie sociale, tout est représenté dans nos massifs in-octavo trimestriels. Si tous les articles n'en sont pas écrits d'une plume également alerte, s'ils ne sont pas toujours d'une lecture facile, surtout quand la part de nos collaborateurs français y est trop petite, au moins, ils sont, en général, solides et sérieux. S'ils manquent parfois d'actualité, parce que la Revue est trimestrielle, en revanche, toute question scientifique importante y est traitée tôt ou tard par une ou plusieurs plumes compétentes. Nous osons l'affirmer, tout homme instruit qui lit la Revue des Questions scientifiques peut, sans trop de peine, se tenir au courant du progrès des sciences de la nature. Il y apprendra ce que pensent les savants catholiques sur tous les points où

la lutte est engagée entre l'incroyance et la foi, darwinisme, antiquité de l'homme, rapports entre la Genèse et la géologie, physiologie cérébrale, etc. Sur toutes les questions actuellement débattues, il trouvera des armes de défense et d'attaque mieux appropriées aux luttes de notre époque que l'arsenal parfois un peu rouillé des vieilles apologétiques.

Comment donner une idée des 48 volumes de la Revue, 49 dans quelques jours, 50 à la fin de l'année, trente-cinq mille pages environ ? Comment citer particulièrement quelques articles entre cinq ou six cents, plus peut-être ?

Si je signale, par exemple, comme m'ayant particulièrement frappé, les études de Gilbert sur Galilée, celles de M. de Lapparent sur la géologie, de M. Proost sur l'analyse du sol par la plante, de M. de la Vallée Poussin sur la paléontologie et le darwinisme, un autre lecteur de la Revue dira qu'il préfère le savant article de M. l'abbé Vigouroux sur la cosmogonie biblique ou bien ceux où le R. P. De Smedt réfute les calomnies de Draper sur les prétendus conflits de l'Église et de la Science; un troisième sera surtout enthousiaste des articles de M. Witz sur la thermochimie et l'électricité, et de ceux du R. P. Thirion sur la théorie de la lumière. Un quatrième, un cinquième, un dixième lecteur exprimeront à leur tour d'autres préférences tout aussi justifiables que les miennes.

Mais au moins, on peut faire comprendre l'évolution philosophique de la Revue pendant le premier quart de siècle de son existence, en rapprochant et comparant deux séries d'articles qui y ont paru les uns avant, les autres après 1889, et je crois qu'il est utile de le faire, tout en prévenant mes auditeurs que j'émets ici des vues personnelles.

Les premiers articles auxquels je fais allusion ont été publiés dans la Revue par le R. P. Carbonnelle, d'abord sous le titre : *L'Aveuglement scientifique,* puis réédités en deux volumes avec le titre plus adéquat : *Les Confins de la Science et de la Philosophie.* Dans ce livre vraiment remarquable, qui rappelle souvent les *Lettres à une princesse d'Allemagne* d'Euler et même l'*Exposition du système du monde* de Laplace, le R. P. Carbonnelle a essayé de fondre en une synthèse puissante, d'une part les découvertes les plus incontestables de la physique et de la biologie modernes, en

prenant ces mots dans le sens le plus large, et d'autre part, le système cosmologique de Boscowich, rajeuni, renouvelé et complété de la manière la plus originale. Ceux qui ont lu et médité cet ouvrage, et il mérite de l'être, n'oublieront plus la réfutation qui s'y trouve des rêves antiscientifiques d'Épicure et de Lucrèce, ni l'exposé des lois générales de la mécanique rationnelle et de la thermodynamique, ni la démonstration de la création dans le temps déduite de la loi de la dissémination de l'énergie, ni la critique du darwinisme et de l'argument soi-disant mathématique de Delbœuf en sa faveur, ni tant de pages admirables sur la Providence et la prière, d'après S. Augustin, S. Thomas et Euler. Aussi, depuis l'apparition des *Confins de la Science et de la Philosophie,* que d'articles, que de livres apologétiques même s'en sont inspirés, directement ou indirectement, et ont mis sous une forme plus assimilable les arguments profonds ou subtils du savant auteur !

Mais, chose remarquable, presque tous ceux qui ont utilisé, démarqué ou pillé les *Confins* du P. Carbonnelle l'ont fait en se dégageant du système cosmologique de Boscowich. Ils ont vu, ou du moins ils ont senti instinctivement que les parties les plus solides de son argumentation étaient indépendantes de son dynamisme.

Et ils avaient raison. On peut soumettre à la mécanique rationnelle les propriétés qui sont réductibles à des changements de lieu des éléments géométriques de la matière; autrement dit, la mécanique rationnelle peut étudier ce que les scolastiques appellent le *mouvement local* des corps. Mais il n'en est pas de même pour les autres phénomènes que l'École comprenait aussi sous le nom de *mouvement,* dans un sens plus général. " Ces autres propriétés des corps, état solide ou fluide, état de combinaison et de décomposition chimique, état d'échauffement, d'éclairement, d'électrisation, d'aimantation, n'apparaissent pas à nos sens comme des agrégats d'éléments géométriques „ en mouvement local. Pendant un siècle, les physiciens géomètres ont essayé de réduire ces propriétés à un pur mécanisme d'éléments géométriques invisibles, au moyen d'hypothèses sans cesse changeantes. Ils y ont d'abord réussi, mais " ils ont fini cependant par se heurter à des difficultés qui paraissent insolubles. Pour nous borner aux plus célèbres

citons seulement ces deux-ci : la difficulté de concevoir un éther susceptible à la fois de demeurer en équilibre stable et de propager les vibrations purement transversales de la lumière ; la difficulté d'imaginer un mouvement calorifique qui s'accorde avec l'inégalité de Clausius. „

Frappé de cette impuissance du dynamisme à se concilier avec les derniers progrès de la physique générale, notre savant confrère de l'Université de Bordeaux, M. P. Duhem, dont je viens de citer les paroles (*), a cherché dans ses livres et ses mémoires, à établir une cosmologie nouvelle, à la fois plus compréhensive et moins hasardeuse que celle de Boscowich et de ses continuateurs. Armé comme personne au point de vue mathématique, sachant traduire en analyse aussi bien les théories chimiques du savant américain Gibbs, qu'il a fait connaître à l'Europe, que celles des grands physiciens de l'ancien continent, ayant en lui ou derrière lui, je ne sais pas au juste, un philosophe thomiste pour le guider quand il touche à la métaphysique, il a aussi le talent d'exposer dans une langue claire et incisive, sous une forme accessible à tous les esprits cultivés, les plus récents progrès des sciences physiques.

Dans une série d'articles publiés dans la REVUE depuis 1892, il a essayé de montrer comment on peut faire entrer les admirables travaux du passé dans une conception nouvelle du monde physique, plus proche des faits que l'ancienne, moins chargée d'hypothèses hasardeuses et cependant tout aussi suggestive de nouvelles recherches et de nouvelles découvertes. Ces articles avaient parfois une apparence paradoxale, ils semblaient trop absolus ; ils ont été combattus ; l'auteur a expliqué et précisé sa pensée et il semble bien que l'accord est près de se faire entre métaphysiciens et savants sur le problème de la cosmologie.

Pendant ces fêtes jubilaires même, M. Duhem présente à la seconde section (j'en suis jaloux pour la première) un résumé, sous forme mathématique, de l'ensemble de ses vues cosmologiques. Il y expose comment " les états et les qualités peuvent être non pas expliqués, mais symbolisés par des nombres et des figures ; ces

---

(*) P. Duhem, *Sur quelques extensions récentes de la statique et de la dynamique* (Mémoire présenté à la seconde section, le 9 avril 1901 et publié dans la livraison de juillet 1901 de la REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES, pp. 130-157).

nombres et ces figures permettent la constitution d'une science embrassant en ses lois non seulement le mouvement local, mais toute espèce de changements et de qualités „.

Mais, dira-t-on, en entendant ces mots de *changement* et de *qualités*, c'est le retour aux doctrines aristotéliciennes et thomistes sur la nature; ce n'est donc plus seulement la biologie générale, la physiologie du cerveau et la psychologie expérimentale qui nous ramènent à Aristote? Il en est bien ainsi, dit M. Duhem, " cette science c'est vraiment la physique dont Aristote a esquissé les grandes lignes, mais c'est la physique d'Aristote développée et précisée par les efforts des expérimentateurs et des géomètres, continués sans interruption pendant près de trois siècles. „

Telle a été l'évolution de la Revue des Questions scientifiques; elle a passé du dynamisme à un thomisme élargi. Le 15 octobre 1890, la *Société scientifique* envoyait à S. S. le Pape Léon XIII, une adresse où elle exprimait " son adhésion entière et explicite à la doctrine philosophique de saint Thomas d'Aquin, telle qu'elle est recommandée dans plusieurs documents pontificaux et en particulier dans l'encyclique *Æterni Patris.* La Société y déclarait " avec les savants dont il est parlé dans cette encyclique, qu'*entre les conclusions certaines et reçues de la Physique moderne et les principes philosophiques de l'École, il n'existe en réalité aucune contradiction.* „

L'évolution doctrinale de notre Revue dont je viens d'esquisser l'histoire un peu aride atteste que nous avons été fidèles à notre déclaration, et qu'en nous laissant guider par les directions pontificales nous avons marché dans la voie du progrès scientifique.

IV

L'année 1900-1901

Ce rapport serait incomplet si je ne vous parlais des travaux, des joies et des douleurs de notre dernière année sociale.

Publications. Depuis la session d'avril 1900, nous avons publié les trois dernières livraisons du tome XXIV des Annales, et la première livraison du tome XXV; la seconde paraîtra dans

quelques jours. Nous craignons fort de ne pouvoir donner dans la suite de ce tome XXV, tous les Mémoires dont l'impression a été votée par le Conseil, à cause des planches extrêmement coûteuses qui en font partie intégrante. Plaise à Dieu que notre jubilé nous amène de nouvelles recrues et de nouveaux membres, afin d'augmenter nos ressources et de nous permettre d'éditer, comme ils doivent l'être, les beaux travaux d'histoire naturelle que nous avons adoptés !

La Revue des Questions scientifiques a paru régulièrement en avril, juillet, octobre 1900 et en janvier 1901 (*). A l'occasion de notre jubilé et devant cette assemblée plus solennelle que de coutume, je remercie une fois de plus de tout cœur au nom de la

---

(*) Voici l'indication des principaux articles de ces quatre livraisons :

I. 1. *R. P. M. Dechevrens, S. J.* Le campylographe. 2. *Jean d'Estienne.* La constitution du Soleil et la théorie hyperthermique des taches. — II. 3. *A. Witz.* Les victimes de l'électricité. 4. *J. L.* Martin Van Marum. 5. *R. P. V. Schaffers.* Les fantômes électrostatiques sur les plaques sensibles. 6. Louis Henry. 7. Concours décennal des sciences physiques et chimiques. 8. *R. P. Lucas.* Le Congrès international de physique. 9. *P. Duhem.* Les théories électriques de James Maxwell. — III. 10. *de Nadaillac.* Les trépanations préhistoriques. 11. *R. P. Dierckx.* L'origine de l'homme d'après Haeckel. *Laloy.* Lettre. *R. P. Dierckx.* Réponse. 12. *de Kirwan.* Le monde sous-marin. 13. *J. H. Fabre.* Les psychés. 14. *de Nadaillac.* Le crâne de Calaveras. 15. *J. d'Estienne.* L'homme animal et l'homme social d'après M. Topinard. 16. *M. Lefevre.* J. H. Fabre. — IV. 17. *P. Masoin.* Gheel, colonie d'aliénés. 18. *Surbled.* Les théories du sommeil. 19. *Henseval.* Les ferments de la caséine et leur rôle dans la maturation des fromages. 20. *X. Francotte.* Le crime. Causes et remèdes d'après Lombroso. — V. 21. *A. Dupont.* L'état présent de l'Espagne et la campagne des chambres de commerce. 22. *Comte Domet de Vorges.* De la justice en matière d'impôt. 23. *de Kirwan.* La prochaine disette de bois d'œuvre dans l'univers. — VI. 24. *A. Arcelin.* La dissociation psychologique. 25. *R. P. Delattre, S. J.* La civilisation assyro-babylonienne. 26. *C. H.* Ventriloquie, nécromancie, divination et prophétisme. 27. *J. Van Biervliet.* Le problème de la mémoire en psychologie expérimentale. 28. *R. P. Verest.* L'esthétique fondamentale. 29. *R. P. Van den Gheyn, S. J.* Le cinquième Congrès scientifique international des catholiques à Munich. 30. *R. P. Hahn, S. J.* L'induction probable, sa valeur et son utilité. 31. *G. Lechalas.* La théorie de M. l'abbé De Lescluze sur le coloris.

Comptes rendus détaillés de 52 ouvrages; comptes rendus sommaires de 16 autres. Revue des Recueils périodiques (physique, chimie, physiologie, biologie, sciences industrielles, entomologie, géographie, sylviculture, hygiène, agriculture).

Societé et au mien, le R. P. Thirion, secrétaire adjoint à qui incombe la charge écrasante de la publication des Annales et surtout de la Revue. Avant lui, le R. P. Carbonnelle y a consacré les treize dernières années de sa vie; puis c'est le bon P. George qui a porté ce rude fardeau pendant sept ans et demi, mettant au service de la Société tout ce qu'il y avait en lui de dévouement et de scrupuleuse abnégation. Voilà maintenant près de cinq ans que le R. P. Thirion lui a succédé dans ces laborieuses et délicates fonctions, animé d'un même zèle et d'une même ardeur que ses prédécesseurs et trouvant encore, quand il le faut, au milieu des accablants labeurs de sa vie de professeur et d'éditeur, le temps d'écrire des articles remarquables sur l'Optique et l'histoire de l'Astronomie ancienne. Je mentirais à mon cœur et à mon intelligence, si, en cette fête jubilaire, je n'adressais pas à lui et à ses frères de la Compagnie de Jésus, si zélés aussi pour la Société, l'expression de notre bien vive gratitude, en même temps qu'un souvenir ému à ceux qui sont morts à la tâche, le R. P. George et surtout le P. Carbonnelle.

État de la Société. Pendant l'année écoulée nous avons admis vingt nouveaux membres, mais hélas ! les démissions et surtout la mort nous en ont enlevé quinze. Je citerai parmi ceux qui nous ont quittés pour une patrie meilleure :

M. Chautard, doyen honoraire de la Faculté des Sciences de l'Université catholique de Lille, l'un de nos plus anciens membres et l'un de nos premiers conférenciers.

M. le chanoine Jules Wouters d'Oplinter, l'un de nos membres fondateurs, mort à l'âge de septante-trois ans, après une vie consacrée tout entière aux bonnes œuvres et surtout aux œuvres scolaires, digne prêtre qui faisait le bien sans bruit et en s'effaçant le plus possible, conformément à sa devise : *ama nesciri.*

M. Aristide Dupont, enlevé à la fleur de l'âge à sa jeune famille, après avoir publié dans divers recueils des études d'économie sociale et d'ethnographie préhistorique qui semblaient lui présager un sérieux avenir de publiciste chrétien.

Mgr Dabert, évêque de Périgueux depuis 1863, doyen de l'épiscopat français, remarquable par un ensemble de rares vertus et par la vigueur de son enseignement doctrinal, dans les grandes controverses religieuses contemporaines.

M. le chanoine Maertens, longtemps professeur au petit Séminaire de Saint-Nicolas, l'un de nos meilleurs conférenciers scientifiques en langue flamande.

M. Orban de Xivry, gouverneur du Luxembourg, frappé par la main égarée d'un pauvre insensé au moment même où il l'accueillait avec sa charité de grand chrétien.

M. Léon t' Serstevens, président du Conseil supérieur d'Agriculture, président de la Société scientifique en 1893-1894, membre depuis vingt-quatre ans, de notre Conseil où ses avis pleins de bon sens et de modération étaient toujours très écoutés. Il est monté maintes fois à la tribune de la Société pour y exposer et défendre les droits et les intérêts de l'agriculture.

Enfin, MM. Vicaire et Hermite dont il convient de rappeler un peu plus longuement le souvenir.

Eugène Vicaire a été l'un des membres les plus dévoués et les plus distingués de la Société scientifique de Bruxelles, notre président en 1895-1896 et collaborateur aux ANNALES et à la REVUE. Né à Ambérieu-en-Bugey, le 28 avril 1839, il entra premier en 1856, à l'École Polytechnique, pour en sortir, également le premier, en 1858. Toute sa carrière se fit dans le Corps des Mines (*). Il en parcourut tous les grades jusqu'aux plus élevés, ceux d'inspecteur général des Mines et de vice-président du Conseil général des Mines. « Également versé dans les sciences physiques et mathématiques, il était non moins soucieux du perfectionnement de la théorie que du progrès des applications. » Il était doué des aptitudes les plus variées; il a fait presque simultanément un cours de chemin de fer à l'École nationale des Mines, un cours de mécanique analytique à l'Institut catholique et un cours de mécanique céleste à la Sorbonne, comme suppléant de Serret. Ses publications portent également sur les sujets les plus divers : calcul des variations, théorie des perturbations, astronomie physique, principes philosophiques de la mécanique, métallurgie, théorie des freins continus, etc.

« Les dons élevés de l'esprit, les facultés puissantes d'assimi-

(*) Nous empruntons ces détails et tout ce qui est cité entre guillemets, à la savante et sympathique notice que M. d'Ocagne a consacrée à Vicaire, dans la REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES, avril 1901, pp. 420-431.

lation et de travail s'alliaient chez Vicaire en une heureuse harmonie aux plus solides qualités morales „. En lui, l'homme et le chrétien étaient plus grands que le savant. Père d'une nombreuse famille, après avoir donné un de ses fils au clergé séculier, une de ses filles au Carmel, il eut la douleur de perdre ce fils voué à la carrière sacerdotale, puis un autre fils encore. A peine remis de ces grands coups, une paralysie progressive dont rien ne put enrayer la marche fatale, l'atteignit lui-même. Il supporta toutes ces épreuves avec une résignation chrétienne et une force d'âme admirables. " Il dut définitivement renoncer à tout travail, en octobre 1900, et attendre, en pleine possession de son intelligence et soutenu seulement par l'espérance qu'il puisait dans sa foi de chrétien, l'heure suprême qui sonna pour lui, le 18 janvier 1901... Le savant ingénieur français que rattachaient à la *Société scientifique* des liens si puissants et qui y comptait de si solides amitiés, y laissera un souvenir qui ne périra point. „

Mais comment vous parler dignement de la dernière perte dont il me reste à vous entretenir? Charles Hermite, né à Dieuze en Lorraine, le 24 décembre 1822, mort à Paris, le 14 janvier 1901, était le doyen des mathématiciens du monde entier. Il a été l'un des membres fondateurs de la *Société scientifique* et son Président d'honneur en 1893-1894, l'année qui suivit son jubilé de soixante-dix ans. Son nom, avec ceux de Pasteur et de Le Play, était le plus illustre que nous ayons pu inscrire dans nos diptyques. Tous les membres de la section de géométrie de l'Institut de France, MM. Poincaré, Darboux, Jordan, Appell, Painlevé, Picard, lors de son jubilé ou après sa mort, se sont essayés à retracer sa belle carrière de savant. Nous l'avons tenté nous-même dans la Revue des Questions scientifiques, en nous aidant des pages émues des géomètres que nous venons de citer. Qu'il nous soit permis de nous résumer rapidement ici. Hermite, en 1842, se place immédiatement au rang des premiers analystes de l'Europe, par sa lettre à Jacobi sur la division des fonctions abéliennes; il consacre ensuite vingt années de méditations solitaires aux recherches les plus profondes sur la théorie des nombres, l'algèbre et l'analyse infinitésimale.

Entré dans l'enseignement à l'âge de quarante ans, il se révèle professeur incomparable et occupe sa chaire avec éclat pendant trente-cinq ans; en même temps et jusqu'à la fin de sa vie, il ne

cesse d'écrire d'admirables mémoires de hautes mathématiques. En dépit de son extrême modestie, la gloire vient le trouver, toutes les Académies s'honorent de le compter parmi leurs membres, les mathématiciens du monde entier célèbrent son jubilé en 1892. Il meurt à l'aurore du xxe siècle, consolé à ses derniers moments par les secours de la Religion, dont il était un adepte convaincu, depuis le jour où, en 1856, le dévouement d'une Sœur de charité et le génie de Cauchy l'avaient ramené à la Foi.

Hermite a été vraiment un profond géomètre et un professeur éminent. Mais il fut de plus un homme modeste, bon et serviable, un noble esprit attentif à tous les mouvements du monde au point de vue religieux, moral et scientifique, un chrétien fervent, sans peur et sans ostentation. Grand par le cœur et par l'intelligence, par le caractère et par la Foi, il a porté en soi, suivant le mot de Pasteur, un double idéal, l'idéal de la science et l'idéal des vertus de l'Évangile et il y a été fidèle! La *Société scientifique de Bruxelles* lui gardera toujours un souvenir reconnaissant.

Distinctions. Après vous avoir parlé de nos douleurs pendant l'année 1900-1901, permettez-moi de vous dire quelques-unes de nos joies.

Le 18 mars 1901, c'est un de nos membres, M. G. Humbert, professeur d'analyse à l'École Polytechnique qui, par 54 voix sur 58, a été élu pour succéder à Hermite comme membre de l'Académie des Sciences de Paris. Quelques mois auparavant, un autre de nos membres, M. P. Duhem, professeur à l'Université de Bordeaux, avait été nommé Correspondant de la même Académie, dans la section de mécanique.

Le 31 mars, deux membres de notre cinquième section, MM. P. Poullet et A. Nerinx, professeurs à l'Université de Louvain, ont été élus en qualité d'Associés de l'Institut de droit international privé.

Enfin, le 7 juin 1900, notre Président de 1879 et de 1893, M. L. Henry, professeur à l'Université de Louvain, a été l'objet d'une manifestation pour ainsi dire internationale à laquelle la *Société scientifique de Bruxelles* s'est associée de grand cœur : presque tous ceux qui ont pris la parole en l'honneur du héros de la fête à des titres divers étaient des membres de notre Société.

V

CONCLUSION

Éminence, Excellence, Mesdames, Messieurs,

Je viens de vous dire les joies et les douleurs d'une seule année, exceptionnelle il est vrai, sous le rapport du nombre et de l'éclat des pertes que nous avons faites. Dans les années précédentes, le R. P. Carbonnelle ou moi, nous avons rendu hommage à ceux qui nous ont quittés, après avoir travaillé, sous la bannière de la *Société scientifique* à la cause sacrée de l'union de la science et de la foi.

Laissez-moi vous redire les noms de quelques-uns d'entre eux, signalés spécialement dans nos rapports annuels : Ch. Sainte-Claire Deville, le P. Bellynck, Heis, le P. Secchi, l'abbé Bourgeois, Le Play, le cardinal Dechamps, Puiseux, Barrande, de Saint-Venant, le P. Carbonnelle, le P. Perry, Gaston Planté, le P. Delsaux, le cardinal Haynald, Gilbert, Boncompagni, Pasteur, Daubrée, d'Abbadie, Mgr de Harlez, Vicaire, Hermite.

La réunion de tous ces hommes illustres à divers titres ne formerait-elle pas une Académie très savante, devant l'autorité de laquelle tout le monde peut s'incliner ? Comment ose-t-on donc parler de l'incompatibilité de la science avec la foi catholique ? N'est-ce pas pure ignorance, ignorance des données de la Foi et des résultats de la science, ignorance des grands noms de ceux qui furent à la fois l'honneur de l'Église dont ils professaient le *Credo* et des pays qui les ont vus naître ?

Pour montrer d'une manière plus saisissante l'absurdité de la thèse des incrédules sur le prétendu désaccord entre la raison et la foi, remontons dans l'histoire de la science jusqu'à la date fatidique de 1789. Et pour nous borner, ne parlons que des fils de cette noble France, terre classique de l'apostolat et de la charité, mais aussi du génie scientifique ; ne citons que des noms impérissables dans les annales de la science, et des noms également de fils soumis de l'Église catholique :

Lavoisier, le vrai fondateur de la chimie moderne, mort en 1794, victime des égarements d'une époque néfaste.

Ampère, mort en 1836, le plus prodigieux des autodidactes, qui reconquiert sa foi spiritualiste et religieuse au prix du plus angoissant labeur philosophique, géomètre dont les découvertes n'ont été appréciées que récemment, quand Lie les eut refaites et continuées, créateur de l'électrodynamique, l'homme qui a simplifié la nature en ramenant le magnétisme à l'électricité.

Cauchy, mort en 1857, fondateur de la théorie analytique des fonctions, fondateur aussi de l'œuvre des Écoles d'Orient et dont la trace est partout dans le domaine entier des mathématiques pures et appliquées.

Le Verrier, mort en 1874, astronome qui trouve une planète au bout de sa plume suivant le mot d'Arago, et qui, chose plus prodigieuse, à lui seul, remet au point toute la mécanique céleste des huit grosses planètes dans des in-quarto remplis de calculs effrayants conduits avec un art consommé.

Le Play, mort en 1882, l'inventeur de la méthode systématique d'observation dans la science sociale, et que cette méthode a ramené du spiritualisme au Décalogue, du Décalogue à l'Évangile.

Pasteur, mort en 1895, le savant qui a réalisé le plus étroitement l'alliance de la science expérimentale la plus sévère avec la science la plus bienfaisante; le savant qui a aussi pour jamais fait disparaître la génération spontanée des rêves philosophiques de l'humanité; Pasteur, sur le tombeau duquel planent les figures symboliques de la Foi, de l'Espérance, de la Charité et de la Science.

Hermite enfin, mort en 1901, dont la pensée se joue sur ces sommets des mathématiques où règne le nombre pur, sommets si élevés qu'un petit nombre d'initiés peut seul l'y suivre.

Que deviendrait l'édifice de la science si l'on en enlevait les assises fondamentales posées par les mains catholiques de ces grands hommes, avec tout ce que les générations de leurs successeurs ont bâti ou appuyé sur ces assises? Presque tout s'écroulerait. Que seraient, en effet, les mathématiques sans les méthodes et les découvertes de Cauchy et d'Hermite, la mécanique céleste sans Le Verrier et Cauchy encore, la physique sans Ampère, la chimie sans Lavoisier, la biologie générale et la médecine sans Pasteur, la science sociale sans la méthode de Le Play?

Il y a moins d'un demi-siècle, après bien d'inutiles efforts, on

était parvenu à réunir par un câble télégraphique l'Ancien et le Nouveau Monde. En 1858, la première dépêche fut lancée de Terre-Neuve en Irlande : un imperceptible frémissement électrique courut rapidement sous l'océan le long de ce fil conducteur dont l'immersion avait coûté tant de labeurs ; la mystérieuse ondulation atteignit Valentia ; la dépêche fut déchiffrée et ce fut aux applaudissements de l'Angleterre chrétienne qu'on lut : *Gloria in excelsis Deo et in terra pax hominibus bonae voluntatis.*

La science catholique, la science de ces grands hommes dont j'ai rappelé tantôt les noms immortels, celle pour laquelle travaille et combat depuis un quart de siècle la *Société scientifique de Bruxelles,* celle pour laquelle elle travaillera toujours, la science unie à la foi répète au monde la parole de louange et de paix de Bethléem : *Gloria in excelsis Deo et in terra pax hominibus bonae voluntatis.*

La parole est ensuite donnée à M. Lemoine pour une conférence sur *Les chimistes de langue française du XIXe siècle.* Elle est reproduite *in extenso* dans la livraison de juillet 1901 de la Revue des Questions Scientifiques (2e série, tome XX, pp. 78-106). En voici un résumé :

M. Lemoine retrace d'abord rapidement la carrière de Berthollet, Vauquelin, Chevreul, Gay-Lussac, Thenard, Dulong.

Il insiste sur la vie de J.-B. Dumas, déjà célèbre à 21 ans, principal fondateur de la chimie organique. Né en 1800, Dumas suspendit presque entièrement ses recherches en 1849, entraîné dans la vie politique au moment des crises de 1848.

Il connut toutes les satisfactions que peuvent donner les grandeurs de ce monde, mais en gardant toujours la simplicité de sa vie de famille et sa cordiale affabilité pour tous les amis de la science. En 1870, tout cet éclat extérieur disparut en un instant, mais l'autorité de Dumas était telle que jamais souveraineté ne resta plus incontestée dans l'ordre scientifique et même dans l'ordre administratif. Dumas affirma dans beaucoup d'occasions ses convictions spiritualistes et mourut en vrai chrétien.

M. Lemoine résume ensuite les travaux des principaux chimistes de langue française qui ont été les contemporains de Dumas ou l'ont suivi, la plupart ses élèves : Boussingault, Cahours, Wurtz,

Fremy; les deux célèbres chimistes belges, Melsens et Stas; de Marignac, professeur à l'Université de Genève; Charles et Henri Sainte Claire-Deville.

Il parle enfin de Pasteur qui a doté de ses découvertes plusieurs sciences distinctes : la chimie, la minéralogie, la biologie, la médecine. Pasteur était, comme on le sait, membre de la *Société scientifique de Bruxelles.*

M. Lemoine termine sa lecture de la manière suivante :

« Dans nos sciences expérimentales aussi bien que dans les sciences mathématiques, beaucoup de nos maîtres ont professé leur respect pour les convictions chrétiennes que la *Société scientifique de Bruxelles* associe à son ardent amour de la science. Beaucoup et des plus illustres, tels que Dumas et Pasteur, sont morts comme nous désirons mourir, se recommandant à l'immense miséricorde du Christ, notre Rédempteur.

„ Ces faits sont utiles à connaître, car nous sommes tous étreints par l'influence du milieu où nous vivons, et là est, pour la foule qui nous entoure, une grande épreuve.

„ L'homme qui gagne chaque jour son pain à la sueur de son front est ébloui par les résultats extraordinaires de nos découvertes scientifiques qui pénètrent aujourd'hui toute la vie matérielle. Et si on lui dit que les savants qui ont fait ces grandes découvertes ne croient à rien, ni au Rédempteur, ni à l'âme immortelle, ni à Dieu, quelle épouvantable tentation! Comment s'y soustraire quand on n'a pas le temps d'étudier?

„ De là toutes les crises sociales dont nous souffrons si souvent, que veulent conjurer nos amis des Unions sociales et qui restent le grand danger du xxe siècle.

„ C'est dans le but spécial de chercher un remède à ce grand mal que la *Société scientifique de Bruxelles* a été fondée.

„ Aussi, elle ne peut trop répandre autour d'elle les graves réflexions de Dumas, notre grand chimiste du xixe siècle. Il rappelait dans une circonstance solennelle ce mot de Laplace : « ce que nous savons est bien peu de chose „ et il ajoutait avec toute son autorité de savant : « Nous n'avons pas le droit d'attri-
„ buer à la science des prétentions à la direction de l'axe moral
„ du monde, que ses progrès n'autorisent pas. „

„ Puissent aussi se populariser ces belles paroles prononcées il

y a vingt-cinq ans, à l'origine même de notre société, par notre Président, M. le Dr Lefebvre :

“ La Foi et la Science sont deux filles du Ciel qui, une fois „ descendues parmi les hommes, finissent toujours par se rencon- „ trer, se reconnaître et s'embrasser. „

Le banquet jubilaire de la Société scientifique (10 avril 1901)

On peut lire un compte rendu détaillé de ce banquet dans la livraison de juillet 1901 de la Revue des Questions scientifiques (2e série, t. XX, pp. 16-22).

Nous reproduisons ici les toasts de M. Lemoine et de M. le Chanoine Delvigne.

Toast de M. Lemoine

Conformément aux traditions de la *Société scientifique de Bruxelles,* je viens vous proposer de lever vos verres en l'honneur de :

S. S. Léon XIII.

S. M. Léopold II, roi des Belges.

En ce 25e anniversaire de notre Société, je suis votre interprète en adressant nos hommages à S. S. Léon XIII, le père commun illustre et vénéré, dont nous sommes tous, avec des nationalités différentes, avec des fonctions diverses dans l'organisme social, les fils respectueux, aimants et soumis. Il a béni les premières années de la *Société scientifique de Bruxelles :* il a partout encouragé les études supérieures, les recherches pour l'accroissement des connaissances humaines. A cette majesté universelle, la plus grande autorité morale du monde entier, à notre bien aimé père, d'une si verte et si brillante vieillesse, nous souhaitons encore de longues années de vie.

S. M. Léopold II, roi des Belges, dont vos collègues étrangers sont ici les hôtes, a su par sa prudence et son tact, donner à la Belgique une longue ère de prospérité et de paix dont n'ont pas joui beaucoup d'autres nations de l'Europe.

Il a plus que tout autre travaillé au développement de la civilisation dans le centre de l'Afrique.

Il a protégé les arts et les sciences : récemment une expédition belge, à travers mille dangers, a recueilli dans les régions du pôle antarctique des données les plus importantes pour la science.

A S. M. le Roi des Belges, nous souhaitons longue vie et prospérité.

Permettez-moi d'exprimer à nos deux présidents d'honneur de 1900-1901, M. le Dr Lefebvre et M. le comte van der Straten Ponthoz notre reconnaissance et nos vœux. Tous deux ont été pour la *Société scientifique de Bruxelles* les ouvriers de la première heure. M. le comte van der Straten Ponthoz a consacré sa vie à appuyer de toute son autorité les lettres et les arts. M. le Dr Lefebvre a présidé la Société dans sa première année d'existence : on n'oublie pas tout ce qu'il a fait pour elle. Cette belle vie d'un grand médecin chrétien est un magnifique exemple. On pourra dire de lui qu'il a passé en faisant le bien.

C'est toujours une grande joie, au milieu de nos vies si laborieuses, de nous retrouver ensemble dans ces réunions fraternelles. Nous sommes unis par les deux plus grandes choses d'ici-bas : l'amour de notre vieille mère, l'Église chrétienne universelle et traditionnelle, dont le centre et le chef est à Rome : l'amour aussi de la science, c'est-à-dire du progrès dans toutes les connaissances humaines et dans leurs applications pour améliorer l'existence de l'humanité.

Ces bons moments passés ensemble rappellent cette vision qu'eut pendant longtemps un maître vénéré, le R. P. Gratry, celle d'*une ville où tout le monde s'aimait*.

Le passé, le présent et l'avenir de la *Société scientifique de Bruxelles* doivent confirmer ces sentiments de satisfaction et de sympathie mutuelle.

Dans le passé, que d'amis, que de puissants esprits ont disparu pour nous ! Les hommes passent : l'œuvre qu'ils ont fondée reste. Si Pasteur et Hermite ne sont plus, les jeunes d'il y a vingt-cinq ans, dans notre Société, ont grandi d'une manière extraordinaire par leurs travaux. La Société vit par ses publications, partout répandues, par ses réunions, par les recherches de ses membres. Elle vient de recevoir de notre père commun Léon XIII le plus précieux des encouragements.

L'avenir est à Dieu. Mais l'Église catholique a les promesses de

la vie éternelle. Ceux qui vivent à Rome, ceux mêmes qui y passent quelque temps sont remplis de ce sentiment qu'inspire le centre de l'Église au milieu des vicissitudes des événements humains. Toutes les œuvres qui s'appuient sur l'Église participent dans une certaine mesure à cette stabilité : c'est que leurs membres y sont plus que dans les autres œuvres humaines, dirigés par des sentiments supérieurs à l'égoïsme et à l'intérêt personnels.

Nous pouvons donc avoir confiance dans l'avenir de la *Société scientifique* pendant le nouveau siècle dont nos successeurs seuls verront la fin.

Toast de M. le Chanoine Delvigne

La *Société scientifique de Bruxelles* s'acquitte d'un devoir de gratitude profondément sentie et unanimement partagée en me chargeant de porter la santé de M. Lemoine, de l'Institut de France, professeur de chimie à l'École Polytechnique de Paris, notre président en exercice.

La chimie, science assez récente puisqu'elle date de la fin du XVIII[e] siècle, peut s'appeler d'une façon particulière, une science française. Avec Lavoisier, elle s'enorgueillit de noms qui brillent comme autant d'étoiles, d'un éclat particulier au firmament du savoir humain : Gay-Lussac, Sainte-Claire-Deville, Thénard, J.-B. Dumas, Chevreul et l'immortel Pasteur. Nous sommes heureux et fiers de proclamer ici que l'honorable M. Lemoine s'est ingénié à continuer de glorieuses traditions en maintenant à notre Société l'intérêt témoigné par d'illustres prédécesseurs, à nos débuts, il y a un quart de siècle.

Par un de ces jeux de la Providence qui nous surprennent peut-être sans nous déconcerter jamais, M. Lemoine présidait aux destinées de notre association encore nouvelle, au moment où le décès inopiné de notre regretté fondateur le R. P. Carbonnelle vint nous frapper dans nos affections les plus vives. L'épreuve fut grande. Notre chef nous aida de ses conseils : la fermeté de sa confiance dans l'avenir nous soutint. Sous la sage direction de ce pilote expérimenté nous pûmes doubler ce cap des tempêtes.

Aujourd'hui, le ciel s'est rasséréné. Nos règlements ont subi le contrôle de l'expérience ; nos ANNALES et notre REVUE ont conquis

une place importante dans le monde savant ; on ne rougit point de se dire membre de la *Société scientifique.* Partout on se plaît à rendre hommage à la largeur de vue de nos collaborateurs, à leur zèle désintéressé, à leur amour de la vérité dans quelque ordre que ce soit.

L'autorité que vous donne votre haute position à l'École Polytechnique tout autant que les travaux personnels qui vous ont ouvert les portes de l'Institut de France, sont pour une large part, dans ces heureux résultats constatés au jour même où la *Société scientifique* célèbre ses noces d'argent.

Cher M. le Président, puissiez-vous continuer à servir la cause de la science durant de longues années encore, avec la même ardeur, avec les mêmes succès. Être fidèle à la science, c'est être le champion de l'éternelle vérité.

A notre Président, M. Lemoine !

III

ASSEMBLÉE GÉNÉRALE DU JEUDI 11 AVRIL 1901

La séance s'ouvre à 2 1/2 heures dans la salle de l'hôtel Ravenstein sous la présidence d'honneur de M. le Comte Fr. van der Straten Ponthoz et la présidence effective de M. Lemoine, président en exercice de la Société.

M. Mansion soumet à l'assemblée les conclusions des commissaires chargés d'examiner les comptes de la Société relatifs à l'année 1900. Ces comptes sont approuvés par l'assemblée. En voici les détails et le résumé :

RECETTES ET DÉPENSES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE PENDANT L'ANNÉE 1900

Revue

RECETTES		DÉPENSES	
Produit des abonnements . fr.	9417,00	Impression, expédition, etc. fr.	6740,50
Vente d'anciens volumes .	90,00	Collaboration	3805,80
Subside de la Société . .	2039,30	Administration.	1000,00
	11546,30		11546,30

Séances et Annales

Produit des cotisations . .	4890,00	Impression et expédition. .	3840,80
Subside de la Société . . .	2125,80	Indemnité pour secrétariat de la Société et des sections	2500,00
	7015,80	Administration, frais de bureau, de session et locaux.	675,00
			7015,80

Société

Produit des coupons . . .	3669,00	Subside à la *Revue*. . . .	2039,30
Montant du déficit pris sur la réserve	496,10	Subside aux *Annales* . . .	2125,80
	4165,10		4165,10

Le déficit n'est qu'apparent. En effet, il reste à réaliser :

Cotisations	270,00
Abonnements	1421,00
	1691,00
Déficit apparent	496,10
Boni réel	1194,90

RÉSUMÉ

Recettes réalisées ou à réaliser	19757,00
Dépenses	18562,10
Boni	1194,90

M. Mansion, secrétaire général, donne lecture des félicitations adressées à la Société à l'occasion de son vingt-cinquième anniversaire. Nous reproduisons en entier l'adresse envoyée au nom de l'Académie royale de Belgique par M. le Chevalier Edmond Marchal, son secrétaire perpétuel.

L'Académie royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique à la Société scientifique de Bruxelles à l'occasion de son XXVe anniversaire de fondation.

MESSIEURS,

« Au nombre des institutions qui se sont donné pour mission la recherche du bien, du beau et du vrai, ce domaine qui comprend la haute culture de tout ce qui se rattache aux sciences, la *Société*

scientifique de Bruxelles, de l'assentiment unanime, s'est placée au premier rang. Cette situation, elle la doit tout autant aux hommes éminents dont elle se compose qu'à ses travaux.

„ Aussi, c'est avec la plus légitime fierté que la *Société scientifique de Bruxelles* peut voir se lever l'aurore de son vingt-cinquième anniversaire de fondation.

„ En cette mémorable circonstance, l'Académie royale des sciences, des lettres et des beaux-arts lui adresse ses félicitations les plus cordiales.

„ L'Académie n'a pas besoin de vous assurer, Messieurs, combien elle tient votre Institution en haute et sincère estime.

„ Elle est d'autant plus heureuse de pouvoir vous exprimer ce sentiment que dans vos rangs figure plus d'un de ses membres qui a rehaussé sa réputation par des travaux de haut mérite et contribué à la gloire scientifique de la Belgique.

„ L'Académie s'associe, on ne peut plus sincèrement, de cœur et d'esprit, aux félicitations que vous recevrez, Messieurs, de la part de toutes les institutions qui apprécient la haute valeur de vos travaux.

„ Elle fait, en même temps, les vœux les plus chaleureux pour que la *Société scientifique de Bruxelles* poursuive, avec la même splendeur et la même prospérité, la voie si belle et si féconde qu'elle s'est créée et dont les heureux résultats sont à l'honneur de notre bien-aimé pays.

„ Au nom de l'Académie royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique,

„ Le secrétaire perpétuel,
„ Chevalier EDMOND MARCHAL. „

L'Université catholique de Louvain avait envoyé, pour la représenter officiellement, M. le professeur Fr. Dewalque.

Tous les Instituts catholiques de France étaient représentés : celui de Paris par M. de Lapparent, membre de l'Institut; celui de Lille par M. Witz pour la Faculté des sciences, et pour celle de médecine et de pharmacie, par MM. les professeurs Eustache et Lemière. Le R. P. Prat, S. J., représentait l'Institut catholique de Toulouse, et celui d'Angers avait délégué le R. P. Antoine, S. J., qui fut, au dernier moment, empêché d'accomplir son mandat.

L'Université catholique de Washington, tout en regrettant que les circonstances de temps et de distance l'empêchassent de se faire représenter à Bruxelles, félicitait « la *Société scientifique* de tout son cœur et l'assurait de sa profonde sympathie pour elle et pour son œuvre, priant Dieu de lui donner la grâce de rendre à l'avenir, comme au passé, les plus grands services ».

« L'Université de Fribourg (Suisse), écrivait son recteur, M. le Dr Gustave Schnürer, participe de grand cœur aux légitimes félicitations présentées, en cette occasion de son jubilé, à la *Société scientifique*, qui depuis vingt-cinq ans a tant contribué à la réalisation d'un idéal qui est aussi le nôtre et qui consiste à montrer l'harmonie entre la foi et la raison. » L'Université de Fribourg, était représentée par l'un de ses professeurs, M. le Dr Fr. Daniels.

Mgr Molloy, recteur de l'Université catholique de Dublin, exprima, avec toutes ses félicitations, ses vifs regrets d'être empêché, à cause d'un voyage à Rome, d'assister aux fêtes jubilaires de la *Société scientifique*.

En déléguant M. le professeur G. Kurth pour représenter la *Leo Gesellschaft* de Vienne, son président Mgr Schindler offrait les vœux qu'il formait pour la prospérité de la *Société scientifique*.

M. le Dr H. Cardauns, secrétaire général de la *Görres Gesellschaft* s'exprimait ainsi : « Puissent nos deux associations qui furent fondées la même année et tendent au même but achever heureusement le second quart de siècle de leur existence, comme elles l'ont fait pour le premier, avec une ardeur égale pour la recherche de la vérité et dans les sentiments d'une amitié et d'une estime réciproques ! »

L'Académie pontificale des *Nuovi Lincei*, dans sa séance publique du 17 mars 1901, déclara s'associer bien volontiers à la célébration du jubilé de la *Société scientifique* et chargea deux de ses membres, M. G. Dewalque, professeur à l'Université de Liége et Mgr Spée, astronome à l'Observatoire royal d'Uccle, d'offrir en son nom ses félicitations les plus sincères.

Voici dans quels termes la *Société scientifique italienne* envoyait ses souhaits : « Au nom de la troisième section *(Scienze fisico-matematiche e naturali)* de la *Società cattolica italiana per gli studi scientifici*, nous envoyons nos vœux et nos congratulations à

la *Société scientifique de Bruxelles*, qui à l'occasion de ses fêtes jubilaires achève le cours de vingt-cinq années de sacrifices, de travaux et de triomphes. „

Citons enfin l'hommage rendu à la *Société scientifique de Bruxelles* par M. de Trooz, ministre de l'Intérieur et de l'Instruction publique : “ Laissez-moi vous prier de recevoir mes bien vives et très cordiales félicitations. Pendant ce quart de siècle, nombreux sont les services rendus par votre Société à la religion, à la science et à la patrie. J'applaudis à vos constants efforts, à vos succès et à vos gages d'avenir. „

La parole est ensuite donnée à M. Jean Capart pour une conférence sur *Une ville de Temples* (Karnak). Des projections lumineuses accompagnaient cette conférence faisant voir aux auditeurs les ruines des monuments de cette ville de l'ancienne Égypte récemment mise à jour.

M. Mansion soumet à l'assemblée, qui l'approuve, une modification à l'article 5 des statuts, proposée par le Conseil. Voici le texte du nouvel article 5 :

“ Elle est dirigée par un Conseil de vingt membres renouvelable annuellement par quart à la session de Pâques. Le Conseil choisit dans son sein le Président, les Vice-Présidents, le Secrétaire et le Trésorier. Toutefois, il peut choisir en dehors du Conseil, le Président ou le premier Vice-Président. Parmi les membres du Bureau, le Secrétaire et le Trésorier sont seuls rééligibles. En cas de décès ou de démission d'un membre du Bureau ou du Conseil, le Conseil peut lui nommer un successeur pour achever son mandat. „

Les mots “ et l'on y nomme le Bureau et le Conseil pour l'année suivante „ de l'article 8 sont supprimés.

M. Mansion donne ensuite lecture des questions de concours, puis il proclame le résultat des élections des membres du Conseil et des bureaux des différentes sections.

Sont élus à l'unanimité comme membres du Conseil pour l'année 1901-1902 :

Président :	M. Proost.
1er Vice-Président :	M. le Chanoine Boulay.
2e Vice-Président :	M. E. Pasquier.
Secrétaire :	M. P. Mansion.
Trésorier :	M. E. Goedseels.
Membres :	MM. le Marquis de la Boëssière-Thiennes.
	L. Cousin.
	L. De Lantsheere.
	Chanoine Delvigne.
	Lieutenant général De Tilly.
	Fr. Dewalque.
	G. Dewalque.
	Dr Ach. Dumont.
	Ch. Lagasse-de Locht.
	Dr Lefebvre.
	Comte Fr. van der Straten Ponthoz.
	Chanoine Swolfs.
	Ch.-J. de la Vallée Poussin.
	G. Van der Mensbrugghe.
	Van der Smissen.

M. Lemoine, président sortant, remercie encore une fois la *Société scientifique de Bruxelles* de l'honneur qu'elle lui a fait de l'appeler au siège présidentiel pendant la session jubilaire, puis il félicite les nouveaux élus.

M. Proost, élu président pour l'année 1901-1902, lui répond en ces termes :

Je remercie M. le Président sortant des aimables paroles qu'il vient de m'adresser et de l'appréciation si bienveillante qu'il a bien voulu émettre sur mes travaux.

Je remercie MM. les membres de la *Société scientifique de Bruxelles* d'avoir bien voulu m'honorer de leurs suffrages.

C'est avec fierté, je l'avoue, que je reçois des mains de mon savant prédécesseur la bannière sur laquelle nous avons gravé, il y a vingt-cinq ans, qu'*il ne peut y avoir de désaccord entre la foi et la raison,* entre la *Religion* et la *Science.*

La *Société scientifique de Bruxelles,* il convient de le rappeler en cette année jubilaire, n'a pas été créée seulement pour montrer qu'il n'y a pas d'incompatibilité entre nos croyances et les révé-

lations de la science moderne, mais pour travailler à l'avènement de la justice et de la paix sociale par la démonstration de cette vérité trop méconnue que Science et Foi sont inséparables dans le plan divin.

En effet, n'est-ce pas ce divorce apparent entre la Science et la Foi — que des spécialistes aux vues étroites s'efforcent de proclamer partout aujourd'hui, en falsifiant l'histoire et en affichant si souvent leur ignorance en matière religieuse ou philosophique — qui détermine les redoutables convulsions sociales auxquelles nous assistons et le triomphe de la force sur le droit?

Le but de la religion, appuyée sur la science dont elle honore le culte — notre Société le démontre surabondamment, je pense — n'est-il pas d'assurer le règne de l'esprit sur la matière, de *l'ange* sur la *bête,* des forces volontaires de l'âme sur les forces nécessaires des atomes?

La science, livrée à elle-même, est impuissante à assurer ce triomphe, le spectacle du monde moderne en fournit, hélas! des preuves trop convaincantes.

C'est dans ce sens qu'un littérateur célèbre a pu proclamer avec des apparences de raison, la *banqueroute de la science,* qui n'est en réalité que la banqueroute du *positivisme,* c'est-à-dire d'une philosophie surannée et impuissante, renouvelée des Grecs!

On ne peut nier que si l'idée religieuse est nécessaire à l'homme, la science lui est également indispensable de nos jours et particulièrement cette *science naturelle* qui lui apprend à dompter les éléments, à régner sur la matière, à connaître les lois de la vie et souvent même à conjurer la mort — ce que les admirables découvertes d'un de nos membres ont superbement mis en lumière.

Cet homme de génie, mon honorable et savant prédécesseur l'a dit avec raison, personnifiait à notre époque l'alliance si désirable du savoir et de la foi.

Pasteur n'était pas seulement un savant dans le sens ordinaire du mot, c'est-à-dire un spécialiste illustré par des découvertes ou des recherches originales, dans le domaine d'une science particulière.

C'était un grand cœur et un grand esprit, dont les passions humaines ne troublaient guère la sérénité de la pensée scientifique et pour lequel le culte du beau était inséparable du culte du bien et du vrai. Hélas! tel n'est pas, il faut bien le reconnaître, l'idéal

de certains naturalistes contemporains, affamés d'honneur et de jouissances.

Un souffle brûlant et desséchant, comme le vent du désert, a passé sur le siècle qui vient de finir dans le sang et dans les larmes.

Des aveux désolants nous arrivent chaque jour, par la voie de la presse positiviste soi-disant scientifique, qui prétend ne voir dans l'univers qu'un engrenage aveugle et formidable, qu'un implacable mécanisme qui nous étreint et nous broie sans pitié, depuis l'origine de l'humanité.

" L'espérance plus vraie que le bonheur s'évanouit devant la désolante réalité, écrit le D[r] Gustave Lebon dans son encyclopédie intitulée *L'homme et les sociétés :* L'homme est devenu un insignifiant atome, jouet des forces aveugles dont il est l'inconscient esclave. "

Eh bien, non, proclamons-le bien haut, ce n'est point là ce que la nature révèle à toute âme sincère, libre de préjugés antireligieux et qui s'efforce de s'élever sans cesse vers la lumière par le travail, par la simplicité et la pureté de la vie.

La vraie science est d'accord avec les philosophes et les livres saints, qui affirment que la vertu seule peut nous donner la liberté.

Certes, la nature est pleine de mystères pour qui l'observe sans parti pris; mais elle est resplendissante d'intelligence et de beauté.

La prévoyance et le calcul s'affermissent de toutes parts, aussi bien dans le monde des astres que dans les atomes. Et il faut être volontairement aveugle pour nier que l'homme, quand il est maître de lui-même par l'exercice de la volonté, est véritablement le chef-d'œuvre de la création et la preuve vivante de l'existence de Dieu.

En terminant, Messieurs, permettez-moi de vous lire la péroraison d'un discours mémorable prononcé en Angleterre, il y a 25 ans, par le vice-roi de l'Inde, Marquis de Ripon, à l'occasion de sa conversion au catholicisme.

Son abjuration produisit dans tout l'Empire britannique une impression profonde, comme celle de Newman et de Manning, car lord Ripon n'était pas seulement un éminent homme d'État mais un de ces esprits supérieurs qui exercent autour d'eux une grande autorité.

Dans ce discours prononcé à Manchester en 1874, il précise admirablement l'erreur du positivisme et les devoirs que son attitude impose aux catholiques.

« Quiconque a une foi réelle, vivante en Dieu, créateur du ciel et de la terre, étudiera les lois et les faits de la nature et du monde extérieur avec un respect et une honnêteté qui, pour lui, seront un devoir envers celui d'où tout procède; seulement, il sentira que l'ensemble de ce monde, si merveilleusement beau, lui apparaîtrait sous un aspect totalement différent s'il voyait les lois, et non le législateur, s'il connaissait les faits extérieurs de la nature et ignorait celui en qui toutes choses ont l'être, le mouvement et la vie. » Et, précisant davantage, lord Ripon ajoute cette belle pensée : « Soyez honnêtes dans vos études, dit-il, ne rejetez aucun fait prouvé, car tous les faits sont une partie de l'enseignement donné par Dieu aux hommes; ayez toujours devant les yeux la distance immense qu'il y a entre le fait et la théorie. Je suis presque tenté de dire que les faits sont divins et les théories humaines. Attachez-vous donc aux faits. Rien ne saurait vous justifier, si vous vous permettez de les altérer. Vous pouvez les éprouver autant que vous voudrez, vous pouvez souvent vous demander — c'est peut-être de votre devoir de demander — quelle est leur véritable signification. Ils peuvent parfois sembler se contredire les uns les autres, que ce soient des faits de la nature ou de l'histoire, ou des faits de la foi et de la raison. En pareil cas, soyez patients, soyez sûrs qu'il ne peut y avoir de contradiction réelle... Croyez-moi, c'est dans l'*honnêteté* d'un côté et la patience de l'autre que l'on doit trouver la vraie méthode de procéder avec de semblables difficultés. C'est cet esprit impatient, si caractéristique du temps où nous vivons, c'est cet esprit qui rend les difficultés de ce genre tellement insupportables pour beaucoup d'hommes, qu'au lieu d'attendre que le nœud soit délié, ils le tranchent coûte que coûte et se réjouissent de s'être débarrassés de ses étreintes, fût-ce au prix de la vérité. »

Après ce discours, M. Lemoine déclare close la session d'avril 1901 de la *Société scientifique*.

Rapport de M. Kurth

SUR LA *Goerres-Gesellschaft* ET SUR LA *Leo-Gesellschaft*

Un des plus heureux symptômes de notre temps, c'est l'ardeur et l'énergie des efforts que l'on fait de divers côtés pour développer parmi les catholiques la vie scientifique et intellectuelle. Nous avons, sous ce rapport, beaucoup de positions à reconquérir et pas de temps à perdre : on l'a compris, et, dans le dernier quart de siècle, on s'est mis résolument à l'œuvre. Dans plusieurs pays déjà, les catholiques se sont groupés et organisés sur le terrain de la science, comme ils le sont depuis longtemps sur celui de la charité ou de la politique, et il y a plus d'une société qui a pour programme, comme la nôtre, de donner aux catholiques la place qui leur revient dans les travaux de l'esprit, je veux dire la première.

Ces divers groupes ont travaillé jusqu'ici dans des conditions d'isolement qui ne sont pas favorables à l'entier développement de leur influence. Ils ont besoin de se connaître, de s'encourager, de se soutenir mutuellement, souvent de combiner leurs efforts pour la réalisation de quelque grande entreprise. Il y a longtemps que je les rêve réunis en une espèce de Fédération qui ferait circuler à travers tous les nouvelles intéressant chacun d'eux, les idées qu'il serait utile de mettre en lumière. Le savant catholique appartenant à l'un d'eux se trouverait de la sorte en contact permanent avec tous les travailleurs partageant sa foi, défrichant le même champ que lui dans l'immense patrimoine de la science humaine.

Nos congrès scientifiques internationaux contiennent le germe d'une organisation de ce genre ; en attendant qu'il soit développé, et pour y aider, je crois que rien ne saurait être plus utile que de nous renseigner, au moins d'une manière générale, sur l'existence et sur l'activité des autres sociétés catholiques vouées, comme la nôtre, au culte de la science. Telle est la raison du double rapport que j'ai l'honneur de vous faire sur la société Goerres d'Allemagne et sur la société Léon XIII d'Autriche.

I

La Goerres-Gesellschaft (*)

Fondée le 25 janvier 1876 à Coblence, la *Goerres-Gesellschaft* célébrera cette année, comme la *Société scientifique*, le 25e anniversaire de sa naissance. L'homme éminent qui en est le créateur et qui en est résté le président, M. le baron von Hertling, a eu la satisfaction, bien rare en ce monde, de voir de son vivant l'œuvre qu'il avait conçue grandir et prospérer d'année en année, au point d'avoir acquis au bout d'un quart de siècle l'importance d'une institution scientifique durable. La Société comptait, à la fin de l'année 1900, 3703 membres de toute catégorie et disposait d'un revenu annuel de 50 000 francs, sans compter un fonds de réserve se montant au même chiffre. Elle possède trois sections : celles de philosophie, d'histoire et de droit. Une quatrième section, celle des sciences naturelles, n'a pu encore être constituée, bien qu'on s'en soit occupé à diverses reprises. Des assemblées générales qui se tiennent tous les ans dans les diverses villes de l'Allemagne, et à côté desquelles ont lieu toujours de fructueuses séances de section, fournissent aux membres l'occasion de se revoir, d'échanger des idées, et à la Société celle d'entretenir et de stimuler leur zèle, de développer le travail scientifique et de faire successivement de la propagande dans tous les milieux.

Le caractère de la Société est hautement et rigoureusement scientifique. Elle s'interdit les travaux de vulgarisation et d'apologétique directe : même les publications qu'elle distribue tous les ans à ses membres en échange de leur cotisation, tout en étant abordables pour tous les lecteurs instruits, ont toujours une valeur technique. C'est ce côté de l'activité de la Société que je tiens à mettre le plus en relief, parce que c'est par là qu'elle est parvenue à prendre sa place dans la vie intellectuelle du peuple allemand. La tentation de se livrer à la propagande et de

(*) Die *Goerres-Gesellschaft* 1876-1901. *Denkschrift zur Feier ihres 25 jaehringen Bestehens nebst Jahresbericht für 1900.* Von Dr. H. Cardauns, Generalsekretär der *Goerres-Gesellschaft.* Köln 1901. Un vol. in-8° de 110 pp.

transformer les œuvres de science en instruments d'apostolat populaire n'est que trop grande chez les catholiques : il faut porter à l'ordre du jour ceux qui ont atteint le but parce qu'ils ont su y résister.

L'action de la Société s'exerce à présent : 1° par ses deux organes périodiques; 2° par ses publications savantes; 3° par son Institut Romain; 4° par les bourses d'étude ou les subsides qu'elle confère aux jeunes savants catholiques. Je passerai rapidement en revue ces aspects de son activité.

Les deux Revues de la Société sont : la *Revue Historique* (HISTORISCHES JAHRBUCH), qui est de 1879, et la *Revue Philosophique* (PHILOSOPHISCHES JAHRBUCH), qui date de 1888. Toutes deux sont trimestrielles et représentent dignement la science des catholiques allemands. On compte avec elles; elles creusent leur sillon, et je n'ai pas besoin de marquer ici l'influence que peut conquérir à la longue un organe qui fait entendre dans les débats scientifiques une voix franchement chrétienne, quand il est parvenu à rassurer le public sur sa valeur technique.

On comprend l'importance que la Société attache à ces deux organes; aussi, quoiqu'ils lui coûtent de grands sacrifices, elle ne cesse de leur consacrer une sollicitude toujours en éveil. Je serais heureux, pour ma part, si ce rapport pouvait avoir pour résultat de leur procurer des sympathies se traduisant en abonnements nouveaux.

Je passe maintenant à un autre objet. Ce qui nous manque le plus, à nous autres catholiques, ce sont ces grands ouvrages collectifs nécessaires à tous, qui sont d'usage quotidien, et que nous sommes trop souvent dans l'obligation d'emprunter aux adversaires de notre foi. Que ne donnerions-nous pas, par exemple, pour avoir un Larousse ou même un Vapereau catholique? La Société Goerres s'est rendu compte, pour sa part, de cette fâcheuse lacune. Son *Dictionnaire des Sciences politiques (Staatslexikon)* est venu émanciper du vasselage protestant et rationaliste la légion nombreuse des esprits qui, parmi nous, se consacrent à des études juridiques et sociales. Cette œuvre considérable, qui a absorbé de longues années et épuisé les forces de plus d'un de ses directeurs, a pu enfin être terminée en 1897, grâce à l'énergie et au dévouement de M. Jules Bachem. L'achèvement de ce monument catholique lui

a valu, ainsi qu'à M. le baron von Hertling, le titre de docteur *honoris causa* de la faculté de droit de l'Université de Louvain. Jamais distinction ne fut plus opportune, et l'Université de Louvain s'est honorée par cette intelligente mesure de solidarité catholique et scientifique. Tel a été, d'ailleurs, le succès du *Dictionnaire des Sciences politiques*, qu'il s'est trouvé épuisé aussitôt après son achèvement, et qu'il a fallu mettre la main à une seconde édition actuellement sous presse.

Ce n'est pas tout. L'ouverture des *Archives Vaticanes*, due à la généreuse initiative du pape Léon XIII, a fait accourir les travailleurs du monde entier dans cet incomparable dépôt : ils y affluent, pour me servir d'une comparaison familière aux vieux hagiographes que je fréquente, comme les abeilles à la ruche. Il convenait que la science catholique n'abandonnât pas aux protestants et aux rationalistes l'exploitation exclusive d'un si vaste domaine, et la *Goerres-Gesellschaft* s'est présentée pour revendiquer sa part. On peut apprécier son œuvre dans les huit forts volumes actuellement publiés de son importante collection intitulée : *Quellen und Forschungen auf dem Gebiete der Geschichte*, où la publication des documents va de pair avec leur élaboration et qui représente avec éclat la bonne volonté des initiatives privées, à côté des collections plus vastes des grands gouvernements. Encouragée par le succès, la Société vient de faire plus : elle a étendu la main vers un des plus beaux sujets qui puissent tenter l'historiographie moderne, et elle a entrepris la publication des *Actes et documents relatifs au Concile de Trente*, dont le premier volume vient de sortir de presse.

Se livrer au travail scientifique, quand on en a la vocation et le talent, c'est bien; développer, favoriser cette vocation chez autrui, veiller au recrutement des forces nouvelles, créer une pépinière de savants catholiques, c'est mieux encore, et c'est ce que la Société a fait en réalisant l'idée hardie d'un *Institut Romain* sur le plan de ceux que la plupart des grandes nations possèdent à Rome.

Créé depuis 1884, et établi au *Campo Santo dei Tedeschi*, l'Institut offre aux jeunes travailleurs catholiques, avec une hospitalité agréable et des moyens de travail abondants, des subsides pour se livrer aux travaux scientifiques qu'il leur confie, et c'est là que s'élaborent les volumes de la collection que j'ai citée plus haut.

Au surplus, la Société ne s'intéresse pas seulement à l'avenir

des jeunes travailleurs employés par elle. Elle regarde plus loin, elle se préoccupe d'assurer le recrutement des savants catholiques de demain en créant des bourses pour permettre à des docteurs distingués d'achever leur formation à Rome, principalement en vue de *s'habiliter* dans l'enseignement supérieur. Il s'agit ici de reprendre dans le domaine scientifique, et principalement parmi ceux qui sont voués par profession à la science, une place proportionnée à l'importance numérique et intellectuelle du peuple catholique. Il s'agit, notamment, de réagir dans la mesure du possible contre les effets désastreux qu'a produits, en Prusse, l'application inique du principe de la *parité* (*). La Société ne peut naturellement rien à elle seule, et tout dépend ici de la bonne volonté des gouvernements; mais ce qu'elle peut, c'est, en faisant surgir des bataillons de jeunes docteurs absolument à la hauteur de leurs rivaux protestants, détruire l'argument spécieux opposé jusqu'à présent aux revendications de nos amis par les sophistes qui arguent de l'absence de candidats catholiques capables.

Ainsi, pour me résumer, l'œuvre entière de la *Goerres-Gesellschaft* se présente à nous comme un vaste et puissant effort pour donner aux catholiques allemands une place honorable et honorée dans le domaine intellectuel. C'est là la pensée maîtresse qui, depuis un quart de siècle, inspire l'activité du noble président et fondateur de l'œuvre, celui que le cardinal Vaughan appelait un jour le Montalembert de l'Allemagne. « Ce qu'il nous faut, redisait „ naguère encore M. le baron von Hertling, ce sont moins des „ apologistes que des savants de profession. Qu'on ne croie pas „ que l'apologétique s'en trouvera mal. Loin de là ! Un seul vrai

(*) Sur cette question, que je n'ai pas le temps d'aborder et qui est pour les catholiques allemands d'une importance capitale, lire le livre hautement instructif et richement documenté de M. Jules Bachem : *Die Parität in Preussen*. 2e édition, Cologne, Bachem, 1899. Je rappellerai ici que M. von Hertling lui-même, une des gloires de l'Allemagne, aujourd'hui professeur à l'Université de Munich, n'a jamais pu obtenir une chaire dans une université prussienne, et qu'un des publicistes les plus éminents du temps, M. H. Cardauns, qui rédige aujourd'hui le *Kölnische Volkszeitung*, est un historien à qui la carrière universitaire a été également fermée pour délit de foi catholique. Il y a d'innombrables exemples analogues.

„ savant qui, par des recherches, inscrit son nom en caractères „ durables dans les annales de la science, et qui est en même „ temps un fidèle enfant de l'Église, vaut toutes les apologies du „ monde. „

Ce point de vue, je le sais, est celui de tous les membres de la *Société scientifique de Bruxelles;* celle-ci sera heureuse de saluer dans la *Goerres-Gesellschaft* une digne sœur jumelle. Bien que défrichant un autre terrain, la *Goerres-Gesellschaft* avait le droit d'être portée à l'ordre du jour d'une assemblée comme la nôtre, et dans des circonstances solennelles comme celle-ci.

II

La Leo-Gesellschaft

Les œuvres ont en elles une vertu qui fait rayonner leur influence bien au delà du domaine où se limite leur action. La *Leo-Gesellschaft* n'est pas la fille, assurément, de la Société Goerres, et pourtant il est probable qu'elle n'aurait pas vu le jour, si les catholiques autrichiens n'avaient eu sous les yeux l'exemple suggestif des travaux de leurs frères allemands. Fondée le 28 janvier 1892 à Vienne, la *Leo-Gesellschaft* ne compte encore que huit années d'existence. Mais l'éclat de ses débuts, la vigueur soutenue de son action et la fécondité dont elle a déjà donné des preuves permettent de concevoir les plus belles espérances au sujet de son avenir. Les chiffres ont ici leur éloquence. La Société comptait 838 membres à la fin de sa première année; à la fin de 1900, elle en avait 2185, parmi lesquels 14 membres de la famille impériale et à peu près tout l'épiscopat autrichien. Son revenu annuel est de 33 000 couronnes, et elle possède un capital de 60 000.

Comme la Société Goerres, la Société Léon XIII a pour but le développement de la vie intellectuelle parmi les catholiques. Je relève cependant deux différences essentielles. D'une part, elle fait rentrer dans le programme de ses travaux l'art au même titre que la science; de l'autre, elle ne s'interdit pas aussi rigoureusement que la Société allemande d'agir à la fois sur les savants et sur le

grand public. Il en résulte, avec une propagande plus diffuse, une multiplicité d'aspects qui n'est pas pour faciliter la tâche d'un rapporteur consciencieux. Je tâcherai toutefois de tout dire brièvement et de ne rien omettre d'essentiel.

La Société est partagée en cinq sections : historique, sociale, juridique, littéraire, philosophique. Comme on peut le remarquer, pas plus que la Société Goerres, elle ne possède une section de sciences proprement dites, et la *Société scientifique* de Bruxelles reste sous ce rapport l'unique groupement réalisé dans ce domaine parmi les catholiques. La *Leo-Gesellschaft* possède deux organes périodiques. Le premier, intitulé ALLGEMEINES LITTERATURBLATT, est une revue critique universelle dans le genre du POLYBIBLION; elle paraît tous les quinze jours et elle présente cette particularité d'être, pour les étrangers, l'organe qui leur offre le tableau le plus complet du mouvement de la librairie dans les états de la couronne d'Autriche : à ce titre déjà, elle a sa place marquée dans toutes les bibliothèques bien tenues. Un second organe, DIE KULTUR *(La civilisation)* est venu en 1899 prendre place à côté de la revue critique : c'est une revue d'intérêt général qui veut renseigner les catholiques d'une manière claire et intéressante sur tout ce qu'un homme cultivé a besoin de savoir de nos jours. Elle paraît jusqu'à présent huit fois par an, mais elle se flatte de devenir bientôt mensuelle et d'augmenter le volume de ses livraisons.

Je passerai rapidement sur l'activité de la Société en tant qu'elle vise le grand public : elle a été intense et remarquable. Des mystères du moyen âge ont été représentés avec un grand succès, ainsi que des pièces de Caldéron; des séries de brochures sur des questions à l'ordre du jour ont répandu dans le public les solutions chrétiennes des problèmes; des cours d'extension universitaire, consacrés surtout aux questions sociales, ont réuni de nombreux auditeurs; une bibliothèque populaire universelle *(Allgemeine Bücherei)* dans le genre des collections Reclam et Meyer, a mis à la portée du peuple, à des prix très bas, quantité d'ouvrages connus, irréprochables pour le fond et pour la forme; une nombreuse série d'images de dévotion choisies parmi les chefs-d'œuvre de l'art chrétien s'est attachée à populariser des types et des souvenirs chers à la piété catholique; plusieurs études d'apologétique ont vu le jour. Qu'un malveillant ne se hâte pas

de me dire : Οὐδὲν πρὸς τὸν Διόνυσον, il n'y a là rien pour la science. La courte énumération que je viens de faire ne vise en effet que les moyens par lesquels la Société cherche à gagner les sympathies du public et à exciter son intérêt pour ses entreprises; il est temps d'aborder l'exposé de son activité sur le terrain proprement scientifique.

Dès le début, la Société est entrée en campagne avec de vastes projets. Il a été question à tour de rôle d'une Collection des Pères grecs, d'un *Corpus Inscriptionum christianarum Austriae,* d'une *Austria Sacra,* d'une *Revue trimestrielle de l'Histoire ecclésiastique de l'Autriche,* d'un *Corpus Theologorum Medii Aevi* et d'autres entreprises de longue haleine, parmi lesquelles il est probable qu'il faudra faire un choix. Ce qui a déjà reçu un notable commencement d'exécution, c'est une importante collection intitulée : *Sources et mémoires pour servir à l'histoire politique, littéraire et sociale des états de la Couronne d'Autriche ;* elle paraît sous la direction de MM. Hirn et Waekernell, professeurs à l'université d'Innsbrück, et elle contient à l'heure qu'il est sept forts volumes dont on trouvera les titres en note (*).

Une autre grande entreprise, qui n'en est plus à ses débuts, c'est la vaste collection intitulée : *L'action sociale de l'Église catholique en Autriche,* qui paraît sous la direction de Mgr Schindler, professeur à l'Université de Vienne. Il s'agit ici d'une statistique raisonnée qui se fait diocèse par diocèse et qui, arrivée dès aujourd'hui à son septième volume (on compte qu'elle en aura 16), permettra d'asseoir sur une base scientifique l'histoire de la civi-

---

(*) Quellen und Forschungen zur Geschichte, Kultur und Spracbe Oesterreichs und seiner Kronländer :

1° Wackernell, *Altdeutsche Passionsspiele aus Tyrol.*, Graz, 1897.

2° Grillenberger, *Die ältesten Todtenbücher des Cisterzienser Stiftes Wilhe,* Graz, 1896.

3° Hauffen, *Die deutsche Sprachinsel Gottschee,* Graz, 1895.

4° Schneller, *Tridentinische Urbare aus dem XIII Jahrhundert,* Innsbrück, 1898.

5° Hirn, *Kanzler Bienner und sein Prozess,* Innsbrück, 1898.

6° Melich, *Deutsche Elemente des Ungarischen Sprachschatzes.*

7° Von Helffert. *Die Gründung des lombardisch-venezianischen Koenigreiches.*

lisation autrichienne. Ce travail servira d'exemple à d'autres pays et méritera d'y être imité (*).

Je note en troisième lieu le *Commentaire scientifique sur les écrits de l'Ancien Testament,* publié sous les auspices de la Société par un comité de professeurs d'université et de grand séminaire, et dont plusieurs volumes ont déjà paru.

En quatrième lieu, il me reste à signaler un grand nombre d'ouvrages isolés qui ont vu le jour sous le patronage de la Société, et dont plusieurs ont obtenu un grand succès de librairie. Tels sont, entre autres, le livre de P. Ohrwalder sur l'Empire du Mahdi et sur sa captivité, qui est arrivé en quelques années à plusieurs éditions (**) ; *La question féministe,* par le P. Rösler, qui vient d'être traduit en français et qui est à ma connaissance le meilleur ouvrage sur la matière (***) ; *La correspondance de Radetzky avec sa fille Frédérique* (****), qui a fait sensation en Autriche et, sans parler de beaucoup d'autres, le monumental ouvrage intitulé : *Die Katholische Kirche unserer Zeit und ihre Diener in Wort und Bild,* publié sous la direction de Mgr Baumgarten (3 volumes parus).

En outre, la Société Léon XIII suit l'exemple de la Société Goerres en fournissant des subsides à de jeunes savants catholiques pour la continuation de leurs travaux; et, stimulée par l'exemple de sa sœur allemande, elle a voulu prendre sa part de l'exploitation des *Archives Vaticanes.* Elle a jeté son dévolu sur les *Comptes de la Chambre apostolique* et sur toutes les sources relatives à l'histoire de la cour et des finances pontificales pendant l'époque avignonnaise; et comme ici elle se rencontrait en partie avec les travailleurs de la Société Goerres, les deux sociétés se sont mises d'accord pour faire le travail en commun. Déjà en ce moment, le docteur Pogatscher travaille à Rome pour le compte de la *Leo-Gesellschaft,* qui se propose de lui adjoindre prochainement des collaborateurs de mérite et qui semble s'acheminer ainsi

---

(*) *Das sociale Wirken der Katholischen Kirchen in Oesterreich,* 7 volumes.

(**) P. Ohrwalder, *Aufstand und Reich des Mahdi und meine Zehnjährige Gefangenschaft dortselbst.* Innsbrück, 1892.

(***) A. Rösler, *Die Frauenfrage vom Standpunkte der Natur, der Geschichte und der Offenbarung,* Vienne 1893.

(****) Duhr, *Briefe des Feldmarschalls Radetsky an seine Tochter Friederike,* 1847-1857. Vienne, 1892.

tout doucement vers la création d'un nouvel Institut auprès du Vatican.

Comme on le voit par ce rapide exposé, la jeune Société autrichienne a déployé en quelques années une activité extraordinaire et est arrivée à des résultats déjà considérables. Sans doute, des censeurs sévères pourront trouver que cette activité se disperse sur beaucoup de sujets à la fois, au lieu de concentrer tous les efforts sur quelques entreprises importantes. Mais ces critiques seraient injustes. Il s'agissait avant tout pour la *Leo-Gesellschaft* de conquérir l'opinion, de s'imposer à l'attention des indifférents, d'enthousiasmer les amis pour le grand but à poursuivre : grâce aux multiples manifestations de sa vitalité conquérante, c'est aujourd'hui chose faite, et l'on peut dire qu'elle a sa place au grand jour de la publicité. Pour le reste, il ne sera pas difficile aux hommes éminents qui dirigent ses destinées de concentrer ses efforts sur quelques-unes des grandes entreprises inscrites à son programme et de doter le xx[e] siècle d'un monument durable de sa science et de sa foi.

Que la *Leo-Gesellschaft* soit donc saluée ici comme la plus jeune et non la moins brillante de nos œuvres intellectuelles ! Elle nous apporte une fière et ferme réponse aux déclamateurs trop souvent écoutés qui ne cessent de nous parler de la décadence de l'Autriche catholique. La propagande des pervers qui ont pris pour mot d'ordre *Los von Rom* est un phénomène affligeant, sans doute, mais plus bruyant que redoutable. Il est contrepesé par la prospérité soutenue et croissante d'une œuvre de science qui a inscrit sur son drapeau le nom du vicaire de Jésus-Christ, et qui voit toute l'Autriche se rallier autour d'elle.

LISTE DES OUVRAGES

OFFERTS A LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES

du 1er mai 1900 au 1er mai 1901

Fr. Alexis-M. G. Bilan géographique du XIXe siècle (Extrait du BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ ROYALE DE GÉOGRAPHIE D'ANVERS). Une broch. in-8° de 40 pages. Anvers, Vve De Backer, 1901.

Ch. André. Traité d'astronomie stellaire. Deuxième partie : Étoiles doubles et multiples. Amas d'étoiles. Un vol. in-8° de XXIV-429 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1900.

Bachelier. Théorie de la spéculation. Un vol. in-4° de 70 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1900.

G. Bigourdan. Le système métrique des poids et mesures. Son établissement et sa propagation graduelle, avec l'histoire des opérations qui ont servi à déterminer le mètre et le kilogramme. Un vol. in-8° de VI-458 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1901.

O. Chemin. De Paris aux mines d'or de l'Australie occidentale. Un vol. petit in-8° de 370 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1900.

L. Cruls. Méthode pour déterminer les heures des occultations d'étoiles par la lune basée sur la connaissance exacte de l'instant de la conjonction apparente des deux astres. Un vol. in-4° cartonné de 28 pages avec planches. Rio de Janeiro, 1899.

E Deharme et A. Pulin. Chemins de fer. Étude de la locomotive. La chaudière (*Encyclopédie industrielle fondée par M.-C. Lechalas*). Un vol. in-8° de 607 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1900.

G. De Lescluze, Pbr. Les secrets du coloris révélés par l'étude comparée du spectre et de l'échelle harmonique sonore. Deuxième édition. Un vol. in-8° de 192 pages. Bruxelles, Roulers, 1900.

R. P. **Arthur Devine**, passionniste. Les sacrements expliqués d'après la doctrine et les enseignements de l'Église catholique, traduit de l'anglais par C. Maillet. Un vol. in-8° de LII-658 pages. Avignon, Aubanel frères, 1901.

Ernest Doudou. La station préhistorique d'Ampsin (Extrait du BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ D'ANTHROPOLOGIE DE BRUXELLES). Une broch. in-8° de 5 pages. Bruxelles, 1900.

Ernest Dubois. L'industrie du tissage du lin dans les Flandres (Extrait de la publication du Ministère de l'industrie et du travail : *Les industries à domicile en Belgique)*. Un vol. in-8° de 184 pages. Bruxelles, Goemaere, 1900.

Antoine Ernst. Régime successoral des petits héritages. Commentaire théorique et pratique de la loi du 16 mai 1900. Un vol. in-8° de 268 pages. Bruxelles, Bruylant-Christophe et Cie, 1900.

J. Fontaine, S. J. Les infiltrations protestantes et le clergé français. Un vol. in-18 de IX-288 pages. Paris, Victor Retaux, 1901.

Éric Gérard. Mesures électriques, 2e édition. Un vol. in-8° cartonné de VIII-532 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1901.

P. Janet. Leçons d'électrotechnique générale professées à l'École supérieure d'électricité. Un vol. gr. in-8° de IX-614 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1900.

Le Dr **P. Jousset**. L'homme-singe et la doctrine évolutionniste. Une broch. in-8° de 36 pages. Paris, J.-B. Baillière et fils, 1901.

Ch. Lacouture, S. J. Esthétique fondamentale, précédée d'une lettre de M. Eug. Guillaume, de l'Institut, professeur d'esthétique au Collège de France. Le beau. Sa définition. Sa division. Sa gradation. Son impression. Son appréciation. Un vol. in-8° de XVII-422 pages. Paris, V. Retaux, 1900.

A. de Lapparent. Vers les pôles (Extrait du CORRESPONDANT). Une broch. in-8° de 30 pages. Paris, 1901.

S. S. Laurie. L. L. D., professeur in the Department of Philosophy à l'Université d'Edimbourg.. Metaphysica nova et vetusta (Retour au dualisme), traduit de l'anglais sur la 2e édition par Georges Remacle, professeur à l'athénée royal de Hasselt. Un vol. in-8° de VIII-328-VIII pages. Tournai, Decallonne-Liagre, 1901.

L. Léau. Une langue universelle est-elle possible? Une broch. petit in-8° de 13 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1900.

E. Mascart. Traité de magnétisme terrestre. Un vol. in-8° de VI-441 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1900.

L. de Maupeou. Étude sur le choc (Extrait de la REVUE MARITIME de janvier 1901). Une broch. in-8° de 24 pages. Paris, librairie militaire R. Chapelot et Cie, 1901.

Pol. Meirschaut, du secrétariat de l'Académie royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. Les sculptures de plein air à Bruxelles. Guide explicatif. Un vol. in-8° de 210 pages. Bruxelles, Émile Bruylant, 1901.

Fernand Meunier. Sur les Mymaridae de l'Ambre et du Copal (Extrait du BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ ENTOMOLOGIQUE DE FRANCE), 4 pages. Paris, 1900.

F. Michel. Recueil de problèmes de géométrie analytique à l'usage des classes de mathématiques spéciales. Solutions des problèmes donnés au concours d'admission à l'École polytechnique de 1860 à 1900. Un vol. in-8° de VI-240 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1900.

Marcel Monier. Recherches sur le traitement de la tuberculose par le suc de viande crue ou zomothérapie (Extrait des ARCHIVES INTERNATIONALES DE PHARMACODYNAMIE ET DE THÉRAPIE, vol. VIII, fasc. 3 et 4). Une broch. in-8° de 8 pages. Bruxelles, Paris, 1901.

Félix Müller. Vocabulaire mathématique français-allemand et allemand-français. Erste Hälfte. Un vol. in-8° de IX-132 pages. Leipzig, Teubner, 1900.

P. de Paepe. Études sur la compétence civile à l'égard des étrangers, avec un exposé sommaire de la loi qui leur est applicable et mises en rapport avec la convention franco-belge du 8 juillet 1899. Tome I. Un vol. gr. in-8° de XLV-458 pages. Bruxelles, Bruylant-Christophe et Cie, 1900.

Eugène Rouché et Lucien Lévy. Analyse infinitésimale à l'usage des ingénieurs (*Encyclopédie industrielle fondée par M.-C. Lechalas*). Tome I. Un vol. in-8° de VIII-557 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1900.

Bertrand-A.-W. Russell. M. A. Essai sur les fondements de la géométrie, traduit de l'anglais par Albert Cadenat. Un vol. in-8° de X-274 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1901.

J.-A. Serret, membre de l'Institut et du Bureau des longitudes. Cours de calcul différentiel et intégral, 5e édition. T. I et II. 2 vol. in-8° de XIII-617 pages et XIII-904 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1900.

G. Soisson. Les principes fondamentaux de la géométrie. Une broch. in-4° de 59 pages. Luxembourg, Ch. Praum, 1900.

Dr Surbled. La lévitation (Extrait de la SCIENCE CATHOLIQUE, 1901). Une broch. in-8° de 28 pages. Paris, Arras, Sueur-Charruey, 1901.

Dr Surbled. La raison (Extrait de la SCIENCE CATHOLIQUE, mai-juin 1900). Une broch. in-8° de 20 pages. Paris, Arras, Sueur-Charruey, 1900.

Dr Surbled. Récamier, d'après un livre récent (Extrait de la SCIENCE CATHOLIQUE, 1900). Une broch. in-8° de 16 pages. Arras, Paris, Sueur-Charruey, 1900.

Dr Surbled. Spirites et médiums, choses de l'autre monde. Un vol. in-18 de II-221 pages. Paris, Charles Amat, 1901.

Dr Surbled. La vie affective. Un vol. in-12 de 221 pages. Paris, Charles Amat.

J.-J. Thomson. D. Sc. F. R. S. Les décharges électriques dans les gaz. Ouvrage traduit de l'anglais avec des notes par Louis Barbillon, et une préface par Ch.-Éd. Guillaume. Un vol. in-8° de XIV-172 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1900.

J.-H. Van 't Hoff. Leçons de chimie physique professées à l'Université de Berlin. Ouvrage traduit de l'allemand par H. Corvisy. Troisième partie. Relations entre les propriétés et la composition. Un vol. in-8° de II-170 pages. Paris, Librairie scientifique A. Hermann, 1900.

Le cardinal **Wiseman**. Méditations sur l'Évangile, traduit de l'anglais par l'abbé J. Caudron. Un vol. in-8° de 280 pages. Avignon, Albanel frères, 1901.

G. Zumoffen, S. J. La Phénicie avant les Phéniciens. L'âge de la pierre. Un vol. petit in-4° de 126 pages accompagné d'un atlas contenant 15 planches photographiées. Beyrouth, Imprimerie catholique, 1900.

Encyclopédie scientifique des Aide-Mémoire publiée sous la direction de M. Léauté, membre de l'Institut. Collection de vol. petit in-8°. Paris, Gauthier-Villars et Masson.

Section de l'ingénieur :

L. Gages. Travail des métaux dérivés du fer.
Pozzi-Escot. Les diastases et leurs applications.
V. Thomas. Les phénomènes de dissolution et leurs applications.
Vanutberghe. Exploitation commerciale des forêts.
Vanutberghe. Exploitation technique des forêts.

Université catholique de Louvain. Souvenir de la manifestation en l'honneur de M. le professeur Louis Henry (7 juin 1900). Une broch. in-8° de 78 pages. Louvain, J. B. Istas, 1900.

Louis Henry. Hommage de la REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES (livraison du 20 juillet 1900). Une broch. in-8° de 22 pages. Louvain, Polleunis et Ceuterick, 1900.

Ministère de la justice. Statistique judiciaire de la Belgique. Première année. Statistique pénale : 1898. Statistique civile et commerciale : 1897-1898. Un vol. in-4° de 52 pages. Bruxelles, Larcier, Schepens.

Les ouvriers des deux mondes publiés par la Société d'économie sociale reconnue d'utilité publique.

Troisième série, 1er fascicule. Fermier normand de Jersey, par M. François Escard.

Troisième série, fasc. supplémentaire A. La Société générale des papeteries du Limousin, par Pierre du Maroussem.

Rapports présentés au Congrès de physique réuni à Paris en 1900, sous les auspices de la Société française de physique, rassemblés et publiés par Ch.-Éd. Guillaume et L. Poincaré, secrétaires généraux du Congrès. Tomes I, II et III. Trois vol. gr. in-8° respectivement de 696, 567 et 616 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1900.

Recueil des travaux techniques des officiers du génie de l'armée belge. Tome II, 1900. Un vol. in-8° de 257 pages. Bruxelles, Gand.

Dott. **Aroldo Norlenghi**. Violazioni di Legge. Studi sociali. Un vol. in-8° de 182 pages. Torino, G. Sacerdote, 1900.

El Doctor **D. Victorino Garcia de la Cruz**, catedratico de la Facultad de Ciencias. Discurso leido en la Universidad central en la solemne inauguracion del curso academico de 1900 à 1901. Une broch. in-4° de 63 pages. Madrid, Imprenta colonial, 1900.

Enrique Sanchez Torres (**Antonio**). La luz, el sonido y la musica. Un vol. in-8° de 256 pages. Barcelona, Tipografia La economica, 1900.

Observatorio astronomico y meteorologico de Madrid. Observaciones del Eclipse total de sol del 28 de Mayo de 1900 verificadas en Plasencia por la comision oficial. Un vol. in-8° de 43 pages. Madrid, 1900.

P. José Coronas, S. J. La activitad seismica en el Archipielago filipino durante el año 1897. Manila, 1899.

Moreno y Anda y Antonio Gomez. El clima de la Republica Mexicana en el año de 1896. Año II. Un vol. pet. in-8° de 179 pages. Mexico, 1900.

Doctor **Antonio de Gordon y de Acosta.** El acuzar como alimento del hombre. Une broch. in-8° de 32 pages. Habana, 1899.

Doctor **Antonio de Gordon y de Acosta.** La legislacion sanitaria escolar en los principales estados de Europa. Une broch. pet. in-8° de 36 pages. Habana, 1900.

W. Ahrens. Mathematische Unterhaltungen und Spiele. Un vol. in-8° de xii-428 pages. Leipzig, Teubner, 1901.

Sophus Lie. Ausführliches Verzeichnis seiner Schriften zusammengestellt von Friedrich Engel. Un vol. in-8° de 41 pages. Leipzig, Teubner, 1900.

H. Lorenz. Dynamik der Kurbelgetriebe mit besonderer Berüksichtigung der Schiffsmaschinen. Un vol. in-8° de 156 pages. Leipzig, Teubner, 1901.

Fernand Meunier. Ueber einige Coleopteren. Flügeldecken aus der präglacialen Braunkohle und dem interglacialen Torflager von Lauenburg (Elbe). (Extrait du Jahrbuch der konigl. preuss. geologischen Landesanstalt für 1900). 8 pages. Berlin, 1900.

Oskar Schlömilch. Uebungsbuch zum Studium der höheren Analysis. Zweiter Teil : Aufgaben aus der Integralrechnung. Vierte Auflage bearbeitet von Prof. Dr. R. Henke. Un vol. in-8° de 448 pages. Leipzig, Teubner, 1900.

Otto Stolz und **J. A. Gmeiner.** Theoretische Arithmetik. I Abtheilung. Un vol. in-8° de 98 pages. Leipzig, Teubner, 1901.

V. v. Turin. Ueber den Betrag, um welchen die Wechselwirkungen der Ionenladungen den osmotischen Druck vermindern (Separat-Abdruck aus : Zeitschrift für physikalische Chemie, XXXIV, 4, 1900). Une broch. in-8° de 6 pages. Leipzig, Wilhelm Engelmann, 1900.

Ueber die Nomographie von M. d'Ocagne. Eine Einführung in dieses Gebiet von Dr. Friedrich Schilling. Un vol. in-8° de 47 pages. Leipzig, Teubner, 1900.

Michael Maher. S. J. Psychology : empirical and rational. Un vol. pet. in-8° cart. de xvi-602-xii pages. London, New-York and Bombay, Longmans, Green and C°, 1900.

Johan August Udden. An Old Indian Village. Un vol. gr. in-8° de 80 pages. Rock Island, Ill. 1900.

Philosophical Society of Washington. Bulletin, vol. XIV, pp. 139-166. Report of the Committee on mathematical science for 1900. Geodesy, J. F. Hazford; Astronomy, T. J. J. See; Astrophysics, J. G. Hagen; Pure mathematics, F. G. Radelfinger. Une broch. in-8° de 28 pages. Washington, 1901.

Den Norske Nordhaus-Expedition 1876-1878. Christiania.

XXVII Zoologi. Polyzoa.

⁂

Académie des sciences. Comptes rendus hebdomadaires des séances (année 1901). Paris.

Académie royale de médecine de Belgique :

Bulletin : 4e série, tome XIV, année 1900.

Mémoires couronnés et autres mémoires. Collection in-8°. T. XV, 5e, 6e, 7e et 8e fasc.

Procès-verbaux des séances de l'année 1900.

Annales de la Faculté des sciences de Marseille. Tome X.

Annales de la Faculté des sciences de l'Université de Toulouse pour les sciences mathématiques et les sciences physiques. Deuxième série. Tome II. Année 1900.

Annales de la Société géologique de Belgique. T. XXV*(bis)*, 1re livr. T. XXVII, 3e et 4e livr. T. XXVIII, 1re livr. Liége.

Annales de la Société royale malacologique de Belgique. T. XXXIV, bulletin f. 9, 10 et 11. Mém. f. 2. T. XXXV, bulletin, f. 1 et 2. Bruxelles, 1900.

Annales de la Société belge de microscopie. Tomes XXV (1899) et XXVI (1899-1900). Bruxelles.

Annales de Philosophie chrétienne, 1901. Paris.

Annuaire pour l'an 1901 publié par le Bureau des longitudes. Paris.

Annuaire de l'Observatoire royal de Belgique pour 1899. Supplément. Bruxelles, 1900.

Annuaire astronomique de l'Observatoire royal de Belgique pour 1901. Bruxelles.

Annuaire météorologique de l'Observatoire royal de Belgique pour 1901. Bruxelles.

L'Anthropologie. Tome XII, 1901. Paris.

Bulletin de la Société astronomique de France, 1901. Paris.

Bulletin de la Société bibliographique et des publications populaires (32e année), 1901. Paris.

Bulletin de la Société belge d'électriciens. Tome XVII, 1900. Bruxelles.

Bulletin de la Société centrale forestière de Belgique, 8e année sociale, 1901. Bruxelles.

Bulletin de la Société belge de Géologie, de Paléontologie et d'Hydrologie. T. XI, fasc. 4; t. XIII, fasc. 2; t. XIV, fasc. 2, 3 et 4; t. XV, fasc. 1. Bruxelles.

Bulletin mensuel du magnétisme terrestre de l'Observatoire royal de Belgique. 1901. Bruxelles.

Bulletin de la Société mathématique de France. Tome XXIX, 1901. Paris.

Bulletin de la Société des sciences de Nancy. Série II. Tome XVI. Fasc. XXXIV, 32e année, 1899. Série III. Tome I, fasc. 1 à 6. Nancy.

Ciel et Terre, 1900-1901. Bruxelles.

Le Cosmos, 50e année, 1901. Paris.

Études publiées par des Pères de la Compagnie de Jésus, 38e année, 1901. Paris.

Journal des sciences médicales de Lille, 24e année, 1901. Lille.

Polybiblion. Partie littéraire et partie technique, 34e année, 1901. Paris.

Le Progrès médical, 1901. Paris.

La Réforme sociale. Bulletin de la Société d'économie sociale et des Unions de la paix sociale, fondées par P.-F. Le Play, 21e année, 1901. Paris.

La Revue générale, 37e année, 1901. Bruxelles.

Revue néo-scolastique, publiée par la Société philosophique de Louvain, 7e année, 1901. Louvain.

Revue de philosophie, 1901. Paris.

Séances de la Société française de physique, année 1900. Paris.

Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux :

Mémoires, 5e série, t. III, 2e cahier; t. V, 1er cahier.

Procès-verbaux des séances, année 1898-1899.

Observations pluviométriques et thermométriques faites dans le département de la Gironde de juin 1898 à mai 1899.

L'Université catholique, 1901. Lyon.

La Civilta cattolica, 1901. Roma.

Rivista di Fisica, Matematica e Scienze naturali, anno II, 1901. Pavia.

Rivista internazionale di Scienze sociali e discipline ausiliarie, 1901. Roma.

Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas, publicado pelo Dr F. Gomes. Teixeira. Vol. XIV, nos 1, 2 et 3. Coimbra.

Observatorio de Manila bajo la dirección de los Padres de la Compañia de Jesus. Boletin mensual. Año 1898. Segundo Trimestre, Tercer Trimestre. Manila, 1900.

Anuario del Observatorio astronomico nacional de Tacubaya para el año de 1901 : año XXI. Mexico.

Boletin del Instituto geológico de Mexico. Num. 14. Mexico, 1900.

Memorias y Revista de la Sociedad cientifica " Antonio Alzate ". Tomo XIV (1899 1900). Mexico.

Anales del Museo nacional de Montevideo publicados bajo la direccion de J. Arechavaleta. Fasc. XVI, XVII, XVIII. Montevideo, 1900.

Annuario publicado pelo observatorio de Rio de Janeiro para o anno de 1900 (decimo sexto anno). Rio de Janeiro.

The Damien Institute, 1901. Birmingham.

The Dublin Review, 1901. London.

The Month, 1901. London.

Stonyhurst College Observatory. Results of Meteorological and Magnetical Observations with report and notes of the director, 1900. Clitheroe, 1901.

The royal Society of Edinburg :
Proceedings. Vol. XXII.
Transactions. Vol. XXXIX. Part. II, III, IV.

St Xavier's College Observatory, 1900. Calcutta.

Bulletin of the U. S. Agricultural experiment station of Nebraska :
Thirteenth annual report.
Bulletin. Vol. XII, n° 60 et 64.

U. S. Department of Agriculture. Section of foreign Markets. Bulletin n° 13-19. Washington, 1900.

Missouri Botanical Garden. Eleventh Annual Report, 1900. St. Louis Mo.

The American Catholic Quarterly Review, 1901. Philadelphia.

The Catholic World, 1901. New-York.

American Chemical Journal, edited by Ira Remsen. Vol. 21 (1899), n° 6. Vol. 22 (1899), n°s 1 à 6. Baltimore.

United States Geological Survey. Washington :
Twentieth Annual Report (1898-1899). Part. I, VI, VI (continued).
Monographs XXXII part II, XXXIII, XXXIV, XXXVI, XXXVII, XXXVIII.
Bulletin, n°s 150 à 162.

Bulletin of the University of Kansas. Kansas University Quarterly. Vol. I, n°s 2, 3, 1900. Lawrence, Kansas.

American Journal of Mathematics. Vol. XXI (1899), number 2, 3, 4. Vol. XXII (1900), number 1. Baltimore.

Transactions of the American mathematical Society. Vol. I (1900). Lancaster and New-York.

The American Museum of Natural history :
Bulletin. Vol. XI, part. III, 1900. Vol. XII, 1899.
Annual Report of the President for the Year 1899.

The Proceedings and Transactions of the Nova Scotian Institute of Science. Vol. X. Part. 1 (Session of 1898-1899). Halifax, Nova Scotia.

Transactions of the Academy of Science of St Louis. Vol. VIII, n°s 9, 10. Vol. IX, n°s 6, 8, 9. Vol. X, n°s 1 à 8.

Bulletin of the Geological Institution of the University of Upsala. Vol. IV, Part. 2, n° 8. Upsala.

Antiqvarisk tidskrift för Sverige. Tomes I à XVI (1869 à 1898). Stockolm.

Kongl. Vitterhets historie och antiqvitetsakademiens Manadsblad (1872 à 1895). Stockolm.

Musée des antiquités nationales de Stockolm. Catalogue sommaire publié par Oscar Montelius. Stockolm, 1899.

Mathematisch-naturwissenschaftliche Mitteilungen begründet von Dr O. Böhlen im Auftrag des mathematisch-naturwissenschaftlichen Vereins in Württemberg herausgegeben von Dr A. Schmidt, Dr A. Haas, Dr E. Wölffing, 1901. Stuttgart.

Bijdragen tot de taal-, land- en volkenkunde van Nederlansch-Indië, uitgegeven door het koninklijk Instituut voor de Taal- Land- en Volkenkunde van Nederlansch-Indië, 6e volgr., VIII, 1, 2. 's Gravenhage.

Revue semestrielle des publications mathématiques, rédigée sous les auspices de la Société mathématique d'Amsterdam. Tome IX (1900-1901). Amsterdam.

FIN DE LA PREMIÈRE PARTIE

SECONDE PARTIE

MÉMOIRES

LES THÉORIES ÉLECTRIQUES

DE

J. CLERK MAXWELL (*)

ÉTUDE HISTORIQUE ET CRITIQUE

PAR

M. P. DUHEM

Professeur de physique théorique
à la Faculté des Sciences de l'Université de Bordeaux

PREMIÈRE PARTIE

LES ÉLECTROSTATIQUES DE MAXWELL

CHAPITRE PREMIER

Les propriétés fondamentales des diélectriques. — Les doctrines de Faraday et de Mossotti

§ 1. *La théorie de l'aimantation par influence, précurseur de la théorie des diélectriques*

La théorie du magnétisme a influé à tel point sur le développement de nos connaissances touchant les corps diélectriques qu'il nous faut, tout d'abord, dire quelques mots de cette théorie.

Æpinus se représentait les aimants comme des corps sur lesquels

(*) Voir l'*Introduction* dans le t. XXIV des ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE, 2e partie : Mémoires, pp. 239-253.

les deux fluides magnétiques, égaux en quantité, se séparaient de manière à se porter l'un à une extrémité du barreau, l'autre à l'autre extrémité. Coulomb (*) modifia cette manière de voir, universellement admise de son temps.

“ Je crois, dit-il, que l'on pourrait concilier le résultat des expériences avec le calcul, en faisant quelques changements aux hypothèses; en voici une qui paraît pouvoir expliquer tous les phénomènes magnétiques dont les essais qui précèdent ont donné des mesures précises. Il consiste à supposer, dans le système de M. Æpinus, que le fluide magnétique est renfermé dans chaque molécule ou partie intégrante de l'aimant ou de l'acier; que le fluide peut être transporté d'une extrémité à l'autre de cette molécule, ce qui donne à chaque molécule deux pôles; mais que ce fluide ne peut pas passer d'une molécule à une autre. Ainsi, par exemple, si une aiguille aimantée était d'un très petit diamètre, ou si chaque molécule pouvait être regardée comme une petite aiguille dont l'extrémité nord serait unie à l'extrémité sud de l'aiguille qui la précède, il n'y aurait que les deux extrémités *n* et *s* de cette aiguille qui donneraient des signes de magnétisme; parce que ce ne serait qu'aux deux extrémités où un des pôles des molécules ne serait pas en contact avec le pôle contraire d'une autre molécule. „

“ Si une pareille aiguille était coupée en deux parties après avoir été aimantée, en *a* par exemple, l'extrémité *a* de la partie *na* aurait la même force qu'avait l'extrémité *s* de l'aiguille entière, et l'extrémité *a* de la partie *sa* aurait également la même force qu'avait l'extrémité *n* de l'aiguille entière avant d'être coupée. „

“ Ce fait se trouve très exactement confirmé par l'expérience; car si l'on coupe en deux parties une aiguille très longue et très fine, après l'avoir aimantée, chaque partie, éprouvée à la balance, se trouve aimantée à saturation, et quoiqu'on l'aimante de nouveau, elle n'acquerra pas une plus grande force directrice. „

Poisson avait lu ce passage. “ Avant les travaux de Coulomb

(*) Coulomb, *Septième Mémoire sur l'Électricité et le Magnétisme. — Du Magnétisme* (Mémoires de l'Académie des Sciences pour 1789, p. 488. — Collection de Mémoires relatifs a la Physique, publiés par la Société française de Physique, t. I : *Mémoires de Coulomb*).

sur le magnétisme, dit-il (*), on supposait les deux fluides transportés, dans l'acte de l'aimantation, aux deux extrémités des aiguilles de boussole et accumulés à leurs pôles; tandis que, suivant cet illustre physicien, les fluides boréal et austral n'éprouvent que des déplacements infiniment petits et ne sortent pas de la molécule du corps aimanté à laquelle ils appartiennent. „

La notion d'élément magnétique, ainsi introduite en physique par Coulomb, est la base sur laquelle repose la théorie, donnée par Poisson, de l'induction magnétique du fer doux; voici, en effet, comment Poisson énonce (**) les hypothèses fondamentales de cette théorie.

" Considérons un corps aimanté par influence, de forme et de dimensions quelconques, dans lequel la force *coercitive* soit nulle et que nous appellerons A, pour abréger.

„ D'après ce qui précède, nous regarderons ce corps comme un assemblage d'*éléments magnétiques*, séparés les uns des autres par des intervalles inaccessibles au magnétisme, et voici, par rapport à ces éléments, les diverses suppositions résultant de la discussion dans laquelle nous venons d'entrer :

„ 1° Les dimensions des éléments magnétiques, et celles des espaces qui les isolent, sont insensibles et pourront être traitées comme des infiniment petits relativement au corps A.

„ 2° La matière de ce corps n'oppose aucun obstacle à la séparation des deux fluides *boréal* et *austral* dans l'intérieur des éléments magnétiques.

„ 3° Les portions des deux fluides que l'aimantation sépare dans un élément quelconque sont toujours très petites relativement à la totalité du *fluide neutre* que cet élément renferme et ce fluide neutre n'est jamais épuisé.

„ 4° Ces portions de fluide, ainsi séparées, se transportent à la surface de l'élément magnétique où elles forment une couche dont l'épaisseur, variable d'un point à un autre, est partout très petite et pourra aussi être considérée comme infiniment petite, même en la comparant aux dimensions de l'élément. „

(*) Poisson, *Mémoire sur la théorie du Magnétisme*, lu à l'Académie des Sciences, le 2 février 1824 (Mémoires de l'Académie des Sciences pour les années 1821 et 1822, t. V, p. 250).

(**) Poisson, *loc. cit.*, p. 262.

La théorie de l'aimantation fondée par Poisson sur ces hypothèses est loin d'être irréprochable ; plus d'un raisonnement essentiel manque de rigueur ou pèche contre l'exactitude (*) ; mais ces défauts, auxquels il a été possible de remédier plus tard, ne doivent point faire oublier les résultats d'une importance capitale que le grand théoricien a définitivement introduits dans la science ; rappelons quelques-uns de ces résultats, dont nous aurons à faire usage dans la suite :

Soit $d\omega$ un élément de volume découpé dans un aimant quelconque ; si, sur une droite, dirigée comme l'axe magnétique de cet élément, nous portons une longueur égale au quotient de son moment magnétique par son volume, nous obtenons une grandeur dirigée qui est l'*intensité d'aimantation* en un point de l'élément $d\omega$; M est cette grandeur et A, B, C en sont les composantes.

Les composantes X, Y, Z du *champ magnétique*, en un point (x, y, z) extérieur à l'aimant, sont données par les formules

$$X = -\frac{\partial V}{\partial x}, \qquad Y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \qquad Z = -\frac{\partial V}{\partial z},$$

V étant la *fonction potentielle magnétique* de l'aimant ; cette fonction est définie par l'égalité :

$$(1) \qquad V = \int \left(A_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_1} + B_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y_1} + C_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z_1} \right) d\omega_1,$$

(x_1, y_1, z_1) étant un point de l'élément $d\omega_1$,
A_1, B_1, C_1, les composantes de l'aimantation en ce point,
r la distance des deux points (x, y, z) et (x_1, y_1, z_1)
et l'intégration s'étendant à l'aimant tout entier.

Cette fonction potentielle est identique à celle qui proviendrait d'une *distribution fictive* de fluide magnétique, distribution ayant pour densité, en chaque point (x, y, z) de la masse de l'aimant,

$$(2) \qquad \rho = -\left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} \right),$$

(*) *Étude historique sur l'aimantation par influence* (ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE, t. II, 1888).

et, en chaque point de la surface de l'aimant, où N_i est la normale dirigée vers l'intérieur de l'aimant, ayant pour densité superficielle

$$(3) \quad \sigma = -[A\cos(N_i, x) + B\cos(N_i, y) + C\cos(N_i, z)].$$

En chaque point intérieur à l'aimant, on a

$$(4) \quad \Delta V = -4\pi\rho = 4\pi\left(\frac{\delta A}{\delta x} + \frac{\delta B}{\delta y} + \frac{\delta C}{\delta z}\right).$$

En chaque point de la surface de l'aimant, on a

$$(5) \quad \frac{\delta V}{\delta N_i} + \frac{\delta V}{\delta N_e} = -4\pi\sigma = 4\pi[A\cos(N_i, x) + B\cos(N_i, y) + C\cos(N_i, z)].$$

Si un corps parfaitement doux est soumis à l'influence d'un aimant, il s'aimante à son tour de telle sorte que les composantes de l'aimantation en chaque point (x, y, z) de l'aimant soient liées par les égalités suivantes à la fonction potentielle de l'aimantation tant inductrice qu'induite :

$$(6) \quad A = -K\frac{\delta V}{\delta x}, \quad B = -K\frac{\delta V}{\delta y}, \quad C = -K\frac{\delta V}{\delta z}.$$

Dans ces égalités, K est une quantité, constante pour un corps donné, à une température donnée; on lui donne le nom de *coefficient d'aimantation* du corps.

Ce point de départ suffit à mettre complètement en équations le problème de l'aimantation par influence sur les corps dénués de force coercitive.

Ces divers résultats, nous l'avons dit, sont demeurés acquis à la science; seules, les égalités (6) ont été modifiées; pour rendre compte des divers phénomènes présentés par les corps fortement magnétiques, tels que le fer doux, et, en particulier, du phénomène de la *saturation*, G. Kirchhoff a proposé (*) de remplacer le coeffi-

(*) G. Kirchhoff, *Ueber den inducirten Magnetismus eines unbegrenzten Cylinders von weichem Eisen* (Crelle's Journal für reine und angewandte Mathematik, Bd. XLVIII, p. 348, 1853. — G. Kirchhoff's Abhandlungen, p. 103, Berlin, 1882).

cient d'aimantation K par une *fonction magnétisante* $f(M)$, variable non seulement avec la nature et la température du corps, mais encore avec l'intensité M de l'aimantation. Les égalités (6) sont alors remplacées par les égalités

$$(7) \qquad A = f(M)\frac{\delta V}{\delta x}, \quad B = -f(M)\frac{\delta V}{\delta y}, \quad C = -f(M)\frac{\delta V}{\delta z}.$$

Pour les corps faiblement magnétiques, cette fonction magnétisante se réduit, comme le voulait Poisson, à un coefficient d'aimantation.

On peut, comme l'ont indiqué Émile Mathieu (*) et plus tard, M. H. Poincaré (**), faire disparaître les inexactitudes de raisonnement qui entachent la théorie de Poisson et éviter les difficultés d'ordre expérimental qui militent contre elle. Toutefois, les hypothèses mêmes sur lesquelles repose cette théorie ont quelque chose de naïf qui choque les habitudes des physiciens contemporains. « Dans l'état présent de la science, dit W. Thomson (***), une théorie fondée sur les hypothèses admises par Poisson, de deux fluides magnétiques mobiles au sein des éléments magnétiques ne saurait être satisfaisante; on s'accorde, en général, à regarder l'exactitude de semblables hypothèses comme extrêmement improbable. Aussi est-il désirable aujourd'hui que la théorie complète de l'induction magnétique sur les substances cristallines et non cristallines soit établie indépendamment de toute hypothèse sur les fluides magnétiques et, autant que possible, sur une base purement expérimentale. Dans ce but, j'ai cherché à détacher la théorie de Poisson des hypothèses relatives aux fluides magnétiques, et de substituer à ces hypothèses des principes élémentaires qu'on en pourrait déduire et qui servent de fonde-

---

(*) E. Mathieu, *Théorie du Potentiel et ses applications à l'Électrostatique et au Magnétisme; 2e partie: Applications* (Paris, 1886).

(**) H. Poincaré, *Électricité et Optique*, I. — *Les théories de Maxwell et la théorie électromagnétique de la lumière,* leçons professées à la Sorbonne pendant le second semestre 1888-1889, p. 44 (Paris, 1890).

(***) W. Thomson, *On the theory of magnetic induction in crystalline and non-crystalline substances* (PHILOSOPHICAL MAGAZINE, 4e série, vol. I, pp. 177 à 186, 1851. — PAPERS ON ELECTROSTATICS AND MAGNETISM, art. XXX, sect. 604; Londres, 1872.

ment à une théorie identique, dans ses conclusions essentielles, à celle de Poisson. „

Au lieu d'imaginer un aimant comme un amas de particules magnétiques également chargées de fluide boréal et de fluide austral, et noyées dans un milieu imperméable aux fluides magnétiques, Sir W. Thomson traite cet aimant comme un corps continu dont les propriétés dépendent de la valeur prise, en chaque point, par une certaine grandeur dirigée, l'intensité d'aimantation; les hypothèses fondamentales qui caractérisent cette grandeur dans les aimants, en général, et dans les corps dénués de force coercitive, en particulier, sont équivalentes aux diverses égalités que nous venons d'écrire. Cette manière de traiter les aimants est aujourd'hui généralement admise; elle rend plus aisés et plus élégants les développements de la théorie du magnétisme, en même temps qu'elle satisfait davantage notre désir de rendre les hypothèses physiques indépendantes de toute supposition sur l'existence ou les propriétés des molécules.

Il est, dans l'étude du magnétisme, un point spécial qui a certainement influé sur la théorie des diélectriques et qui, en particulier, a contribué à faire adopter cette idée de Faraday que l'éther, vide de toute matière pondérable, est doué de propriétés diélectriques. Ce point, c'est l'étude des corps *diamagnétiques*.

Faraday a reconnu qu'un barreau de bismuth prenait, en chaque point, une aimantation dirigée non pas comme le champ magnétique, mais en sens inverse de ce champ; le bismuth est *diamagnétique*.

Au premier abord, le diamagnétisme semble difficilement compatible avec la théorie du magnétisme imaginée par Poisson; les corpuscules magnétiques ne peuvent s'aimanter que dans la direction du champ. La contradiction se dissipe si l'on admet une hypothèse émise par Edmond Becquerel (*).

Selon cette hypothèse, tous les corps, même le bismuth, seraient magnétiques; mais l'éther, privé de toute autre matière, serait, lui aussi, magnétique; dans ces conditions, les corps que nous nommons magnétiques seraient des corps plus magnétiques que

---

(*) Edmond Becquerel, *De l'action du Magnétisme sur tous les corps* (Comptes rendus, t. XXXI, p. 198; 1850. — Annales de Chimie et de Physique, 3e série, t. XXVIII, p. 283, 1850).

l'éther; les corps moins magnétiques que l'éther nous sembleraient diamagnétiques.

L'impossibilité de corps proprement diamagnétiques, manifeste dans l'hypothèse de Poisson, ne l'est plus au même degré lorsque l'on expose les fondements de la théorie du magnétisme comme l'a proposé W. Thomson; rien, semble-t-il, n'empêche d'attribuer à la fonction magnétisante une valeur négative dans les équations (7), devenues de pures hypothèses. Aussi, en maint endroit de ses écrits sur le magnétisme, W. Thomson n'a-t-il point fait difficulté de traiter des corps proprement diamagnétiques.

Les contradictions qu'entraînerait l'existence de tels corps apparaissent de nouveau lorsqu'on compare les lois du magnétisme aux principes de la thermodynamique.

Ces contradictions ont été remarquées pour la première fois par W. Thomson, au témoignage de Tait (*) : " L'opinion communément reçue, selon laquelle un corps diamagnétique, placé dans un champ magnétique, prend une polarisation *opposée* à celle que les mêmes circonstances déterminent dans un corps paramagnétique a été attaquée par W. Thomson au nom du principe de l'énergie. On sait que le développement complet du magnétisme sur un corps diamagnétique exige un certain temps, et que ce magnétisme ne disparaît pas instantanément lorsque le champ magnétique est supprimé; il est naturel de supposer qu'il en est de même des corps diamagnétiques; dès lors, il est aisé de voir qu'une sphère diamagnétique, homogène et isotrope, animée d'un mouvement de rotation dans un champ magnétique, et prenant dans ce champ une distribution magnétique opposée à celle que le fer y prendrait, serait soumise à un couple qui tendrait constamment à lui imprimer une rotation de même sens autour de son centre; cette sphère permettrait de réaliser le mouvement perpétuel. "

M. John Parker (**), par des raisonnements analogues, a montré que l'existence des corps diamagnétiques serait contradictoire avec le principe de Carnot.

(*) Tait, *Sketch of Thermodynamics.*

(**) John Parker, *On diamagnetism and concentration of energy* (PHILOSOPHICAL MAGAZINE, 5e série, vol. XXVII, p. 403, 1889).

Enfin, M. E. Beltrami (*) et nous-même (**) sommes arrivés à cette conclusion que si l'on peut trouver, sur un corps diamagnétique placé dans un champ donné, une distribution magnétique qui satisfasse aux équations (7), cette distribution correspond à un état d'équilibre instable. Il est donc impossible d'admettre l'existence de corps diamagnétiques proprement dits et indispensable de recourir à l'hypothèse d'Edmond Becquerel : l'éther est susceptible de s'aimanter.

§ 2. *La polarisation des diélectriques*

Si les hypothèses de Coulomb et de Poisson sur la constitution des corps aimantés s'écartent extrêmement des principes en faveur aujourd'hui auprès des physiciens, leur netteté, leur simplicité, la facilité avec laquelle l'imagination pouvait les saisir, devaient en faire, pour les théoriciens du commencement du siècle, une des hypothèses les plus séduisantes de la physique. Toutes les propriétés que nous représentons aujourd'hui par des *grandeurs dirigées* étaient attribuées alors à des *molécules polarisées*, c'est-à-dire à des molécules possédant, à leurs deux extrémités, des qualités opposées; à la *polarisation magnétique* on cherchait des analogues.

L'idée de comparer au fer, soumis à l'influence de l'aimant, les substances isolantes, telles que le verre, le soufre ou la gomme-laque, soumises à l'action de corps électrisés, s'est sans doute offerte de bonne heure à l'esprit des physiciens. Déjà Coulomb, à la suite du passage que nous avons cité, écrivait (***) ceci :

(*) E. Beltrami, *Note fisico-matematiche, lettera al prof. Ernesto Cesàro* (Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, t. III, séance du 10 mars 1889).

(**) *Sur l'aimantation par influence* (Comptes rendus, t. CV, p. 798, 1887) — *Sur l'aimantation des corps diamagnétiques* (Comptes rendus, t. CVI, p. 736, 1888). — *Théorie nouvelle de l'aimantation par influence fondée sur la thermodynamique* (Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, t. II, 1888). — *Sur l'impossibilité des corps diamagnétiques* (Comptes rendus, t. CVIII, p. 1042, 1889). — *Des corps diamagnétiques* (Travaux et Mémoires des Facultés de Lille, mémoire n° 2, 1889). — *Leçons sur l'Électricité et le Magnétisme*, t. II, p. 221, 1892.

(***) Coulomb, *Septième Mémoire sur l'Électricité et le Magnétisme* (Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris pour 1789, p. 489. — Collection de Mémoires relatifs a la Physique, publiés par la Société française de Physique; t. I : *Mémoires de Coulomb*).

" L'hypothèse que nous venons de faire paraît très analogue à cette expérience électrique très connue : lorsqu'on charge un carreau de verre garni de deux plans métalliques; quelque minces que soient les plans, si on les éloigne du carreau, ils donnent des signes d'électricité très considérables; les surfaces du verre, après que l'on a fait la décharge de l'électricité des garnitures, restent elles-mêmes imprégnées des deux électricités contraires et forment un très bon électrophore; ce phénomène a lieu quelque peu d'épaisseur qu'on donne au plateau de verre; ainsi le fluide électrique, quoique d'une nature différente des deux côtés du verre, ne pénètre qu'à une distance infiniment petite de sa surface; et ce carreau ressemble exactement à une molécule aimantée de notre aiguille. Et si à présent l'on plaçait l'un sur l'autre une suite de carreaux ainsi électrisés de manière que, dans la réunion des carreaux, le côté positif qui forme la surface du premier carreau se trouve à plusieurs pouces de distance de la surface négative du dernier carreau; chaque surface des extrémités, ainsi que l'expérience le prouve, produira, à des distances assez considérables, des effets aussi sensibles que nos aiguilles aimantées; quoique le fluide de chaque surface des carreaux des extrémités ne pénètre ces carreaux qu'à une profondeur infiniment petite et que les fluides électriques de toutes les surfaces en contact s'équilibrent mutuellement, puisqu'une des faces étant positive, l'autre est négative. "

Peu d'années après, Avogadro (*) admettait également que les molécules d'un corps non conducteur de l'électricité se polarisaient sous l'influence d'un conducteur chargé. Au témoignage de Mossotti (**) " le professeur Orioli a employé l'induction qui s'exerce d'une molécule à une autre, ou d'une couche mince du disque de verre à une autre, pour expliquer le mode d'action de la machine électrique. "

(*) Avogadro, *Considérations sur l'état dans lequel doit se trouver une couche d'un corps non conducteur de l'électricité lorsqu'elle est interposée entre deux surfaces douées d'électricité de différente espèce* (JOURNAL DE PHYSIQUE, t. LXIII, p. 450, 1806). — *Second Mémoire sur l'Électricité* (JOURNAL DE PHYSIQUE, t. LXV, p. 130, 1807).

(**) Mossotti, *Recherches théoriques sur l'induction électrostatique envisagée d'après les idées de Faraday* (BIBLIOTHÈQUE UNIVERSELLE, ARCHIVES, t. VI, p. 193, 1847).

Mais c'est à Faraday que nous devons les premiers développements étendus sur l'électrisation des corps isolants.

Faraday a pris soin d'indiquer la suite des pensées qui l'ont conduit à imaginer ses hypothèses touchant la constitution des *corps diélectriques*.

« Au cours de la longue suite de recherches expérimentales dans laquelle je me suis engagé, dit-il (*), un résultat général m'a constamment frappé : nous sommes dans la nécessité d'admettre deux forces, ou deux formes ou directions de force, et en même temps, nous sommes dans l'impossibilité de séparer ces deux forces (ou ces deux électricités) l'une de l'autre, soit par les phénomènes de l'électricité statique, soit par les effets des courants. Cette impossibilité dans laquelle nous nous trouvons jusqu'ici, en toutes circonstances, de charger la matière d'une manière absolue, exclusivement de l'une ou de l'autre électricité, m'est demeurée sans cesse présente à l'esprit. J'ai ainsi conçu le désir de rendre plus claire la vue que j'avais acquise au sujet du mécanisme par lequel les pouvoirs électriques et les particules de matière sont en relation; en particulier, sur les actions inductives, qui paraissent être le fondement de toutes les autres; et j'ai entrepris des recherches dans ce but. »

Deux théories ont, par voie d'analogie, guidé Faraday en ses suppositions touchant la polarisation des corps diélectriques : la théorie du magnétisme, et la théorie des actions électrolytiques.

Tout le monde connaît la représentation, imaginée par Grotthuss, de l'état dans lequel se trouve un électrolyte traversé par un courant; chaque molécule y est orientée dans le sens du courant, l'atome électro-positif du côté de l'électrode négative et l'atome électro-négatif du côté de l'électrode positive. Or Faraday est frappé (**) de la ressemblance qu'un voltamètre présente avec un condensateur. Mettez une plaque de glace entre deux feuilles de platine; chargez l'une des feuilles d'électricité positive et l'autre d'électricité négative; vous aurez un condensateur à lame diélec-

---

(*) Faraday, *On induction*, lu à la Société Royale de Londres, le 21 décembre 1837 (PHILOSOPHICAL TRANSACTIONS OF THE ROYAL SOCIETY OF LONDON, 1838, p. 1. — FARADAY'S EXPERIMENTAL RESEARCHES IN ELECTRICITY, série I, vol. I, n° 1163, p. 361).

(**) Faraday, *loc. cit.* (EXPERIMENTAL RESEARCHES, t. I, p. 361).

trique; fondez maintenant la glace; l'eau sera électrolysée; vous aurez un voltamètre. D'où provient cette différence? Simplement de l'état liquide de l'eau qui permet aux ions de se rendre sur les deux électrodes; quant à la polarisation électrique des particules, on doit supposer qu'elle préexiste à leur mobilité, qu'elle est déjà réalisée dans la glace. " Et comme tous les phénomènes présentés par l'électrolyte paraissent dûs à une action des particules placées dans un état particulier de polarisation, j'ai été conduit à supposer que l'induction ordinaire elle-même était, dans tous les cas, une *action de particules contiguës*, et que l'action électrique à distance (c'est-à-dire l'action inductrice ordinaire) ne s'exerçait que par l'intermédiaire de la matière interposée. „

Comment ces particules contiguës s'influencent-elles les unes les autres? Faraday décrit à plusieurs reprises cette action. " L'induction apparaît (*) comme consistant en un certain état de polarisation des particules, état dans lequel elles sont mises par le corps électrisé qui exerce l'action; les particules présentent des points ou des parties positives, des points ou des parties négatives; les parties positives et les parties négatives occupent, à la surface induite des particules, deux régions symétriques l'une de l'autre. „

" La théorie (**) suppose que toutes les *particules* d'un corps, aussi bien d'une matière isolante que d'une matière conductrice, sont des conducteurs parfaits; ces particules ne sont pas polarisées dans leur état normal, mais elles peuvent le devenir sous l'influence de particules chargées situées dans leur voisinage; l'état de polarisation se développe instantanément, exactement comme dans une *masse* conductrice isolée formée d'un grand nombre de particules. „

" ...... Les particules d'un diélectrique isolant soumis à l'induction peuvent se comparer à une série de petites aiguilles magnétiques ou, plus correctement encore, à une série de petits conducteurs isolés. Considérons l'espace qui entoure un globe électrisé; remplissons-le d'un diélectrique isolant, comme l'air ou

---

(*) Faraday, *loc. cit.* (EXPERIMENTAL RESEARCHES, vol. I, p. 409).

(**) Faraday, *Nature of the electric force or forces*, lu à la Société Royale de Londres, le 21 juin 1838 (PHILOSOPHICAL TRANSACTIONS OF THE ROYAL SOCIETY OF LONDON, 1838, pp. 265 à 282. — EXPERIMENTAL RESEARCHES, série XIV, vol. I, p. 534).

l'essence de térébenthine, et parsemons-le de petits conducteurs globulaires, de telle sorte que de petites distances seulement les séparent les uns des autres et du globe électrisé; chacun d'eux est ainsi isolé; l'état et l'action de ces particules ressembleront exactement à l'état et à l'action des particules d'un diélectrique isolé, tels que je les conçois. Lorsque le globe sera chargé, les petits conducteurs seront tous polarisés; lorsque le globe sera déchargé, les petits conducteurs retourneront tous à leur état normal, pour se polariser de nouveau si le globe est rechargé. „

Il est clair que Faraday imagine la constitution des corps diélectriques à l'exacte ressemblance de celle que Coulomb et Poisson ont attribuée aux corps magnétiques; il ne paraît pas, toutefois, que Faraday ait songé à rapprocher de ses idées sur la polarisation électrique les conséquences auxquelles la théorie de l'aimantation par influence avait conduit Poisson.

Ce rapprochement se trouve indiqué pour la première fois, d'une manière succincte, mais très nette, dans un des premiers écrits de W. Thomson (*). " Il faut donc, dit-il, qu'il y ait une action tout à fait spéciale dans l'intérieur des corps *diélectriques* solides, pour produire cet effet. Il est probable que ce phénomène se trouverait expliqué en attribuant au corps une action semblable à celle qui aurait lieu s'il n'y avait pas d'action diélectrique dans le milieu isolant et s'il y avait un très grand nombre de petites sphères conductrices réparties uniformément dans ce corps. Poisson a montré que l'action électrique, dans ce cas, serait tout à fait semblable à l'action magnétique du fer doux sous l'influence des corps magnétisés. En s'appuyant sur les théorèmes qu'il a donnés relativement à cette action, on parvient aisément à démontrer que si l'espace entre A et B est rempli d'un milieu ainsi constitué, les surfaces d'équilibre seront les mêmes que quand il n'y a qu'un milieu isolant sans pouvoir diélectrique, mais que le potentiel dans l'intérieur de A sera plus petit que dans le dernier cas, dans un rapport qu'il est facile de déterminer d'après les données relatives

(*) W. Thomson, *Note sur les lois élémentaires de l'électricité statique* (Journal de Liouville, t. X, p. 220, 1845. — Reproduit, avec des développements, sous le titre : *On the elementary laws of statical electricity*, dans Cambridge and Dublin mathematical Journal, nov. 1845, et dans les Papers on Electrostatics and Magnetism, art. II, sect. 25).

à l'état du milieu isolant. Cette conclusion paraît être suffisante pour expliquer les faits que M. Faraday a observés relativement aux milieux diélectriques... „

Vers la même époque, la Société italienne des sciences, de Modène, mit au concours la question suivante :

“ En prenant pour point de départ les idées de Faraday sur l'induction électrostatique, donner une théorie physico-mathématique de la distribution de l'électricité sur les conducteurs de forme diverse. „

Il suffit à Mossotti (*), pour résoudre le problème, de faire subir une sorte de transposition aux formules que Poisson avait obtenues dans l'étude du magnétisme ; cette transposition fut ensuite complétée par Clausius (**).

Accepter les idées de Faraday, de Mossotti et de Clausius sur la constitution des corps diélectriques paraît aussi difficile aujourd'hui que d'admettre les suppositions de Coulomb et de Poisson au sujet des corps magnétiques ; mais il est aisé de faire subir à la théorie de la polarisation une modification analogue à celle que W. Thomson a fait subir à la théorie de l'aimantation ; c'est d'une théorie ainsi débarrassée de toute considération sur les molécules polarisées que H. von Helmholtz fait usage (***).

Précisons les fondements de cette théorie.

Au début de l'étude de l'électrostatique, deux espèces de gran-

---

(*) Mossotti, *Discussione analitica sull' influenza che l'azzione di un mezzo dielettrico ha sulla distribuzione dell' elettricità alla superfizie dei piu corpi elettrici disseminati in esso* (Mémoires de la Société italienne de Modène, t. XXIV, p. 49, 1850). — Extraits du même (Bibliothèque universelle, Archives, t. VI, p. 357, 1847). — *Recherches théoriques sur l'induction électrostatique envisagée d'après les idées de Faraday* (Bibliothèque universelle, Archives, t. VI, p. 193; 1847).

(**) R. Clausius, *Sur le changement d'état intérieur qui a lieu, pendant la charge, dans la couche isolante d'un carreau de Franklin ou d'une bouteille de Leyde, et sur l'influence de ce changement sur le phénomène de la décharge* (Abhandlungensammlung über die mechanische Theorie der Warme, Bd. II, Zusatz zu Abhandl. X, 1867. — Théorie mécanique de la Chaleur, traduite en français par F. Folie, t. II, Addition au Mémoire X, 1869).

(***) H. Helmholtz, *Ueber die Bewegungsgleichungen der Elektricität für ruhende leitende Körper*, § 8 (Borchardt's Journal für reine und angewandte Mathematik, Bd. LXXII, p. 114, 1870. — Wissenschaftliche Abhandlungen, Bd. I, p. 611).

deurs non dirigées suffisaient à définir la distribution électrique sur un corps ; ces deux grandeurs étaient la *densité électrique solide* σ en chaque point intérieur au corps et la *densité électrique superficielle* Σ en chaque point de la surface du corps ; encore les fondateurs de l'électrostatique ramenaient-ils cette notion-ci à celle-là ; ils regardaient la surface du corps comme portant une couche électrique très mince, mais non pas infiniment mince.

Plus tard l'étude des chutes brusques de niveau potentiel au contact de deux conducteurs différents conduisit à introduire une troisième grandeur non dirigée, irréductible aux précédentes, le *moment d'une double couche* en chaque point de la surface de contact des deux conducteurs.

Ces trois espèces de grandeurs ne suffisent plus à représenter complètement la distribution électrique sur un système lorsque ce système renferme des corps mauvais conducteurs ; pour parfaire la représentation d'un semblable système, il faut faire usage d'une grandeur nouvelle, grandeur dirigée qui est affectée à chaque point d'un corps diélectrique et que l'on nomme l'*intensité de polarisation* en ce point.

Un corps diélectrique est donc un corps qui présente en chaque point une intensité de polarisation, définie en grandeur et en direction, comme un corps magnétique est un corps qui présente en chaque point une intensité d'aimantation, définie en grandeur et en direction ; les hypothèses élémentaires auxquelles on soumet l'intensité de polarisation sont, d'ailleurs, calquées sur les hypothèses élémentaires qui caractérisent l'intensité d'aimantation ; une seule hypothèse, essentielle il est vrai, est propre à l'intensité de polarisation ; cette hypothèse, à laquelle on est nécessairement conduit par la manière dont Faraday et ses successeurs ont représenté la constitution des diélectriques, est la suivante :

Un élément diélectrique, de volume $d\omega$, *dont l'intensité de polarisation a pour composantes* A, B, C, *exerce sur une charge électrique*, PLACÉE A DISTANCE FINIE, *la même action que deux charges électriques égales l'une à* μ, *l'autre à* $-\mu$, *placées la première en un point* M *de l'élément* $d\omega$, *la seconde en un point* M' *du même élément, de telle sorte que la direction* M'M *soit celle de la polarisation et que l'on ait l'égalité*

$$\mu . \overline{MM'} = (A^2 + B^2 + C^2)^{\frac{1}{2}} \, d\omega.$$

Au contraire, on admet qu'*un élément magnétique n'agit pas sur une charge électrique.*

Avant de résumer les conséquences que l'on peut tirer de ces hypothèses, insistons un instant encore sur la transformation qu'ont subie les suppositions émises par les fondateurs de l'électrostatique.

Quatre espèces de grandeurs : la densité électrique solide, la densité électrique superficielle, le moment d'une couche double, l'intensité de polarisation, sont employées aujourd'hui à représenter la distribution électrique sur un système. Les fondateurs de l'électrostatique, Coulomb, Laplace, Poisson, ne faisaient usage que d'une seule de ces grandeurs, la densité électrique solide ; ils l'admettaient volontiers dans leurs théories, parce qu'ils parvenaient sans peine à l'imaginer comme la densité d'un certain fluide ; à cette grandeur, ils réduisaient les trois autres. Au lieu de regarder comme sans épaisseur la couche électrique qui recouvre un corps et de lui attribuer une densité superficielle, ils l'imaginaient comme une couche d'une épaisseur finie, quoique très petite, au sein de laquelle l'électricité avait une densité solide finie, quoique très grande ; deux telles couches, identiques au signe près de l'électricité dont elles sont formées, placées à une petite distance l'une de l'autre, remplaçaient notre double couche actuelle, sans épaisseur ; enfin, au lieu de concevoir, en chaque point d'un diélectrique, une intensité de polarisation définie en grandeur et en direction, ils y plaçaient une particule conductrice recouverte d'une couche électrique qui contenait autant de fluide positif que de fluide négatif.

Aujourd'hui, nous ne demandons plus aux théories physiques un mécanisme simple et facile à imaginer, qui *explique* les phénomènes ; nous les regardons comme des constructions rationnelles et abstraites qui ont pour but de symboliser un ensemble de lois expérimentales ; dès lors, pour *représenter* les *qualités* que nous étudions, nous admettons sans difficulté dans nos théories des grandeurs d'une nature quelconque, pourvu seulement que ces grandeurs soient nettement définies ; peu importe que l'imagination saisisse ou non les propriétés signifiées par ces grandeurs ; par exemple, les notions d'intensité d'aimantation, d'intensité de polarisation, demeurent inaccessibles à l'imagination, qui saisit fort bien, au contraire, les corpuscules magnétiques de Poisson, les

particules électriques de Faraday, recouverts, à leurs deux extrémités, par des couches fluides de signes opposés ; mais la notion d'intensité de polarisation implique un bien moins grand nombre d'hypothèses arbitraires que la notion de particule polarisée ; elle est plus complètement dégagée de toute supposition sur la constitution de la matière ; substituant la continuité à la discontinuité, elle prête à des calculs plus simples et plus rigoureux ; nous lui devons la préférence.

§ 3. *Propositions essentielles de la théorie des diélectriques*

Les principes que nous avons analysés permettent de développer une théorie complète de la distribution électrique sur les systèmes formés de corps conducteurs et de corps diélectriques. Indiquons brièvement, et sans aucune démonstration (*), les propositions essentielles dont nous aurons à faire usage par la suite.

Imaginons deux petits corps, placés à la distance r l'un de l'autre et portant des quantités q et q' d'électricité; concevons ces deux petits corps placés non pas dans l'*éther*, c'est-à-dire dans ce que contiendrait un récipient où l'on aurait fait le vide physique, mais dans le *vide absolu,* c'est-à-dire dans un milieu identique à l'espace des géomètres, ayant longueur, largeur et profondeur, mais dénué de toute propriété physique, en particulier du pouvoir de s'aimanter ou de se polariser. La distinction est d'importance ; en effet, nous avons vu que l'existence des corps diamagnétiques serait contradictoire si l'on n'attribuait à l'éther la faculté de s'aimanter, selon l'hypothèse émise par Edmond Becquerel; et, depuis Faraday, tous les physiciens s'accordent pour attribuer à l'éther la polarisation diélectrique.

Par une extension des lois de Coulomb (l'expérience vérifie ces lois pour des corps placés dans l'air, mais n'est point concevable pour des corps placés dans le vide absolu), nous admettrons que ces deux petits corps se repoussent avec une force

$$F = \epsilon \frac{qq'}{r^2}, \tag{8}$$

ϵ étant une certaine constante positive.

(*) Le lecteur pourra trouver ces démonstrations dans nos Leçons sur l'Électricité et le Magnétisme, t. II, 1892.

Supposons qu'un ensemble de corps électrisés soit placé dans l'espace et soit

$$(9)\qquad V = \sum \frac{q}{r}$$

leur *fonction potentielle.* En un point quelconque (x, y, z) *extérieur* aux conducteurs électrisés, ou *intérieur* à l'un d'entre eux, une charge électrique μ subit une action dont les composantes sont μX, μY, μZ et l'on a

$$(10)\qquad X = -\epsilon \frac{\partial V}{\partial x}, \quad Y = -\epsilon \frac{\partial V}{\partial y}, \quad Z = -\epsilon \frac{\partial V}{\partial z}.$$

Imaginons maintenant un ensemble de corps diélectriques polarisés; soient $d\omega_1$ un élément diélectrique, (x_1, y_1, z_1), un point de cet élément, et A_1, B_1, C_1, les composantes de la polarisation au point (x_1, y_1, z_1).

$$(11)\qquad \overline{V}(x, y, z) = \int \left(A_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_1} + B_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y_1} + C_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z_1} \right) d\omega_1,$$

formule où l'intégration s'étend à l'ensemble des diélectriques polarisés, définit, au point (x, y, z), la *fonction potentielle* de cet ensemble. Dans cette formule (11), qui rappelle exactement l'expression (1) de la fonction potentielle magnétique, r est la distance mutuelle des deux points (x, y, z), (x_1, y_1, z_1).

Le champ électrostatique créé, au point (x, y, z), par les diélectriques, a pour composantes

$$(12)\qquad \overline{X} = -\epsilon \frac{\partial \overline{V}}{\partial x}, \quad Y = -\epsilon \frac{\partial \overline{V}}{\partial y}, \quad Z = -\epsilon \frac{\partial \overline{V}}{\partial z}.$$

La fonction potentielle $\overline{V}$, définie par l'égalité (11), est identique à la fonction potentielle électrostatique que définit la formule (9) appliquée à une certaine *distribution électrique fictive;* en cette

distribution fictive, chaque point (x, y, z) intérieur au diélectrique polarisé est affecté d'une densité solide

$$(13) \qquad e = -\left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right)$$

et chaque point de la surface de contact de deux corps polarisés différents, désignés par les indices 1 et 2, correspond à une densité superficielle

$$(14) \qquad E = -[A_1 \cos(N_1, x) + B_1 \cos(N_1, y) + C_1 \cos(N_1, z) + A_2 \cos(N_2, x) + B_2 \cos(N_2, y) + C_2 \cos(N_2, z)].$$

Si l'un des deux corps, le corps 2 par exemple, est incapable de polarisation diélectrique, il suffit, dans la formule précédente, de supprimer les termes en A_2, B_2, C_2.

On voit qu'en tout point intérieur à un diélectrique continu, on a

$$(15) \qquad \Delta\overline{V} = -4\pi e = 4\pi\left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right),$$

tandis qu'en tout point de la surface de contact de deux diélectriques, on a

$$(16) \qquad \frac{\partial\overline{V}}{\partial N_1} + \frac{\partial\overline{V}}{\partial N_2} = -4\pi E = 4\pi [A_1 \cos(N_1, x) + B_1 \cos(N_1, y) + C_1 \cos(N_1, z) + A_2 \cos(N_2, x) + B_2 \cos(N_2, y) + C_2 \cos(N_2, z)].$$

Considérons un système où tous les corps susceptibles d'être électrisés sont des corps bons conducteurs, homogènes et non décomposables par électrolyse, et où tous les corps susceptibles d'être polarisés sont des diélectriques parfaitement doux; sur un pareil système, l'équilibre électrique sera assuré par les conditions suivantes :

1° En chacun des corps conducteurs, on a

$$(17) \qquad V + \overline{V} = \text{const.}$$

2° En chaque point d'un diélectrique, on a

$$
(18)\qquad \left\{
\begin{aligned}
A &= -\ \epsilon F(M)\frac{\delta}{\delta x}(V+\overline{V}),\\
B &= -\ \epsilon F(M)\frac{\delta}{\delta y}(V+\overline{V}),\\
C &= -\ \epsilon F(M)\frac{\delta}{\delta z}(V+\overline{V}).
\end{aligned}
\right.
$$

Dans ces formules,

$$M = (A^2 + B^2 + C^2)^{\frac{1}{2}}$$

est l'intensité de polarisation au point (x, y, z) et F(M) est une fonction essentiellement positive de M; cette fonction dépend de la nature du diélectrique au point (x, y, z); d'un point à l'autre, elle varie d'une manière continue ou discontinue selon que la nature et l'état du corps varient d'une manière continue ou discontinue.

On se contente, en général, à titre de première approximation, de remplacer F(M) par un *coefficient de polarisation* F, indépendant de l'intensité M de la polarisation; moyennant cette approximation, les égalités (18) deviennent

$$
(19)\qquad \left\{
\begin{aligned}
A &= -\ \epsilon F\frac{\delta}{\delta x}(V+\overline{V}),\\
B &= -\ \epsilon F\frac{\delta}{\delta y}(V+\overline{V}),\\
C &= -\ \epsilon F\frac{\delta}{\delta z}(V+\overline{V}).
\end{aligned}
\right.
$$

Il en découle immédiatement deux relations qui auront, dans toute cette étude, une grande importance.

En premier lieu, comparées à l'égalité (13), les égalités (19) montrent que l'on a, en tout point d'un milieu diélectrique continu, l'égalité

$$(20)\quad \epsilon\frac{\delta}{\delta x}\left[F\frac{\delta(V+\overline{V})}{\delta x}\right] + \epsilon\frac{\delta}{\delta y}\left[F\frac{\delta(V+\overline{V})}{\delta y}\right] + \epsilon\frac{\delta}{\delta z}\left[F\frac{\delta(V+\overline{V})}{\delta z}\right] =$$

En second lieu, comparées à égalité (14), les égalités (19) montrent qu'en tout point de la surface de contact de deux milieux différents, on a

$$(21) \qquad \epsilon F_1 \frac{\delta (V + \overline{V})}{\delta N_1} + \epsilon F_2 \frac{\delta (V + \overline{V})}{\delta N_2} = E.$$

De ces égalités, tirons de suite quelques conséquences importantes. Dans le cas où on l'applique à un diélectrique homogène, la formule (20) devient

$$\epsilon F \Delta (V + \overline{V}) = e.$$

Cette égalité, jointe à l'égalité (15) et à l'égalité

$$\Delta V = 0,$$

vérifiée en tout point où il n'y a pas d'électricité réelle, donne l'égalité

$$(1 + 4\pi\epsilon F) \Delta (V + \overline{V}) = 0$$

et comme F est essentiellement positif, cette égalité donne, à son tour,

$$(22) \qquad \Delta (V + \overline{V}) = 0$$

et

$$(23) \qquad e = 0.$$

De là cette proposition, démontrée par Poisson dans le cas de l'aimantation par influence et transportée par W. Thomson et par Mossotti au cas des diélectriques :

Lorsqu'un corps diélectrique, homogène et parfaitement doux, est polarisé par influence, la distribution électrique fictive qui équivaudrait à la polarisation de ce corps est une distribution purement superficielle.

Imaginons maintenant qu'un diélectrique 1 soit en contact, le long d'une certaine surface, avec un corps 2, conducteur, mais incapable de toute polarisation. A chaque point de cette surface,

correspondent deux densités électriques superficielles : une densité *réelle* Σ et une densité *fictive* E; aux égalités (16) et (21), nous pouvons joindre l'égalité bien connue

$$\frac{\delta V}{\delta N_1} + \frac{\delta V}{\delta N_2} = -4\pi\Sigma$$

ainsi que l'égalité

$$\frac{\delta V}{\delta N_2} + \frac{\delta \overline{V}}{\delta N_2} = 0,$$

qui découle de la condition (17); nous obtenons ainsi l'égalité

$$4\pi\epsilon F_1\Sigma + (1 + 4\pi\epsilon F_1)\,E = 0. \tag{24}$$

A la surface de contact d'un conducteur et d'un diélectrique, la densité de la couche électrique réelle Σ *est à la densité de la couche électrique fictive* E *dans un rapport* $\left(-\frac{1+4\pi\epsilon F}{4\pi\epsilon F}\right)$ *négatif, plus grand que* 1 *en valeur absolue et dépendant uniquement de la nature du diélectrique.*

Les formules et les théorèmes que nous venons de passer rapidement en revue permettent de mettre en équations et de traiter les problèmes que soulève l'étude des diélectriques. Deux de ces problèmes joueront un grand rôle dans les discussions qui vont suivre; il importe donc d'en rappeler en quelques mots la solution.

Le premier de ces problèmes concerne le condensateur.

Imaginons un condensateur clos. En tout point de l'armature interne, la somme $(V + \overline{V})$ a la même valeur U_1, tandis qu'en tout point de l'armature externe, elle a la valeur U_0. L'intervalle compris entre les deux armatures est occupé en entier par un diélectrique homogène D dont F est le coefficient de polarisation. On démontre sans peine que, dans ces conditions, l'armature interne se couvre d'une charge électrique réelle Q donnée par la formule

$$Q = \frac{1 + 4\pi\epsilon F}{4\pi} A\,(U_1 - U_0),$$

A étant une quantité qui dépend uniquement de la forme géc

métrique de l'espace compris entre les deux armatures. La *capacité du condensateur*, c'est-à-dire le rapport

$$C = \frac{Q}{\epsilon (U_1 - U_0)},$$

a pour valeur

$$(25) \qquad C = \frac{1 + 4\pi\epsilon F}{4\pi\epsilon} A.$$

Prenons un condensateur de forme identique au précédent et coulons entre les armatures de ce condensateur un nouveau diélectrique D′, ayant un coefficient de polarisation F′; la capacité de ce second condensateur aura pour valeur

$$C' = \frac{1 + 4\pi\epsilon F'}{4\pi\epsilon} A.$$

Comme Cavendish l'a fait, dès 1771, dans des recherches (*) restées cent ans inédites, comme Faraday (**) l'a exécuté de nouveau dès 1837, déterminons expérimentalement le rapport de la capacité du second condensateur à la capacité du premier; le résultat de cette mesure sera le nombre

$$(26) \qquad \frac{C'}{C} = \frac{1 + 4\pi\epsilon F'}{1 + 4\pi\epsilon F}.$$

Ce nombre dépendra uniquement de la nature des deux diélectriques D et D′; à ce nombre, on donne le nom de *pouvoir inducteur spécifique du diélectrique* D′, *relatif au diélectrique* D.

Par définition, le *pouvoir inducteur spécifique absolu* d'un diélectrique D est le nombre $(1 + 4\pi\epsilon F)$; pour un milieu impolarisable il est égal à 1.

(*) *The electrical Researches of the honourable* Henry Cavendish, F. R. S., written between 1771 and 1781; edited by J. Clerk Maxwell (Cambridge).

(**) Faraday, Experimental Researches in Electricity, série XI, *On induction;* § 5. *On specific induction, on specific inductive capacity.* Lu à la Société Royale de Londres le 21 décembre 1837.

La considération du second problème s'impose de la manière la plus stricte du moment que l'on regarde l'éther comme susceptible de polarisation dielectrique.

L'électrostatique tout entière est construite en supposant que les corps conducteurs ou diélectriques sont isolés dans le vide absolu ; si l'on admet l'hypothèse dont nous venons de parler, une telle électrostatique est une pure abstraction, incapable de donner une image de la réalité ; mais, par une circonstance heureuse, on peut très simplement transformer cette électrostatique en une autre où l'espace illimité, qui était vide en la première, se trouve rempli par un éther homogène, incompressible et polarisable.

Soit F_0 le coefficient de polarisation de ce milieu dans lequel sont plongés les corps étudiés. Ces corps sont des conducteurs homogènes chargés d'électricité et des diélectriques parfaitement doux. Quelle sera la distribution électrique sur un tel système en équilibre ? Quelles forces solliciteront les divers corps dont il se compose ?

La règle suivante réduit à l'électrostatique classique la solution de ces questions :

Remplacez l'éther polarisable par le vide ; à chaque corps conducteur, laissez la charge électrique totale qu'il porte en réalité ; à chaque diélectrique, attribuez un coefficient de polarisation fictif φ, *égal à l'excès de son coefficient réel de polarisation* F *sur le coefficient de polarisation* F_0 *de l'éther :*

$$\varphi = F - F_0 \; ; \tag{27}$$

enfin, remplacez la constante ϵ *par une constante fictive*

$$\epsilon' = \frac{\epsilon}{1 + 4\pi\epsilon F_0} \, . \tag{28}$$

Vous obtiendrez un système fictif correspondant au système réel qui a été donné.

La distribution électrique sur les corps conducteurs sera la même dans le système fictif que dans le système réel.

Les actions pondéromotrices seront les mêmes dans le système fictif que dans le système réel.

Quant à la polarisation en chaque point de l'un des corps diélec-

triques autre que l'éther, elle a la même direction dans le système fictif et dans le système réel; mais, pour obtenir sa grandeur dans le second système, il faut multiplier la grandeur qu'elle a dans le premier par $\frac{F}{F - F_0}$.

§ 4. *L'idée particulière de Faraday*

Des idées de Faraday sur la polarisation nous avons extrait jusqu'ici ce qu'il y a de plus général, ce qui a donné naissance à la théorie des diélectriques. Ces idées générales sont loin de représenter, dans sa plénitude, la pensée de Faraday. Faraday professait, en outre, une opinion très particulière sur la relation qui existe entre la charge électrique qui recouvre un conducteur et la polarisation du milieu diélectrique dans lequel ce conducteur est plongé. Cette opinion de Faraday n'avait point échappé à Mossotti, qui l'avait adoptée; en revanche, elle semble n'avoir frappé aucun physicien contemporain; Heinrich Hertz (*) a exposé cette opinion, en observant qu'elle est un cas limite de la théorie de Helmholtz, déjà signalé par ce grand physicien ; mais ni Helmholtz, ni Hertz, ne l'ont attribuée à Faraday et à Mossotti.

Pour qui lit Faraday avec une minutieuse attention, il est clair qu'il admettait la loi suivante :

Lorsqu'un milieu diélectrique se polarise sous l'action de conducteurs électrisés, en chaque point de la surface de contact d'un conducteur et du diélectrique, la densité de la couche superficielle fictive qui recouvre le diélectrique est ÉGALE ET DE SIGNE CONTRAIRE *à la densité de la couche électrique réelle qui recouvre le conducteur :*

(29) $$E + \Sigma = 0.$$

« Lorsque j'emploie le mot *charge* dans son sens le plus simple, écrit Faraday au Dr Hare (**), j'entends qu'un corps *peut* être

(*) Heinrich Hertz, *Untersuchungen über die Ausbreitung der elektrischen Kraft. Einleitende Uebersicht;* Leipzig, 1892. — Traduit en français par M. Raveau (LA LUMIÈRE ÉLECTRIQUE, t. XLIV, pp. 285, 335 et 387; 1892).

(**) Faraday, *An Answer to Dr Hare's Letter on certain theoretical Opinions* (SILLIMANN'S JOURNAL. vol. XXXIX, p. 108; 1840. — EXPERIMENTAL RESEARCHES IN ELECTRICITY, vol. II, p. 268; Londres, 1844).

chargé de l'une ou de l'autre électricité, pourvu qu'on le considère seulement en lui-même; mais j'admets qu'une telle charge ne saurait exister sans induction, c'est-à-dire indépendamment du développement d'une quantité égale de l'autre électricité, non pas sur le corps chargé lui-même, mais dans les particules immédiatement voisines du diélectrique qui l'entoure, et, par l'intermédiaire de celles-ci, sur les particules en regard des corps conducteurs non isolés qui l'environnent et qui, dans cette circonstance, arrêtent, pour ainsi dire, cette induction particulière. „

C'est d'ailleurs à l'existence, au voisinage immédiat l'une de l'autre, de ces deux couches, égales en densité et de signes contraires, qu'est due, pour Faraday, la possibilité de maintenir une couche électrique à la surface d'un conducteur.

Puisque la théorie suppose parfaitement isolant le milieu qui entoure le corps conducteur, il n'y a pas lieu de chercher quelle force maintient la couche électrique adhérente à la surface du conducteur; ce qui l'y maintient, c'est la propriété attribuée au milieu de ne pouvoir livrer passage à l'électricité; si l'on peut parler de la *pression* que le milieu exerce sur l'électricité pour la maintenir, c'est au sens où l'on parle en mécanique de force de liaison; cette pression est l'action électromotrice qu'il *faudrait* appliquer à la couche électrique pour qu'elle demeurât à la surface du conducteur, *si le milieu cessait d'être isolant;* cette idée semble avoir été très nettement aperçue par Poisson (*) : „ La pression, dit-il, que le fluide exerce contre l'air qui le contient est en raison composée de la force répulsive et de l'épaisseur de la couche; et puisque l'un de ces éléments est proportionnel à l'autre, il s'ensuit que la pression varie à la surface d'un corps électrisé et qu'elle est proportionnelle au carré de l'épaisseur ou de la quantité d'électricité accumulée en chaque point de cette surface. L'air imperméable à l'électricité doit être regardé comme un vase dont la forme est déterminée par celle du corps électrisé; le fluide que ce vase contient exerce contre ses parois des pressions

(*) S D. Poisson, *Mémoire sur la distribution de l'électricité à la surface des corps conducteurs,* lu à l'Académie des sciences le 9 mai et le 3 août 1812 (Mémoires de la classe des sciences mathématiques et physiques pour l'année 1811, Mémoires des savants étrangers, p. 6).

différentes en différents points, de telle sorte que la pression qui a lieu en certains points est quelquefois très grande et comme infinie par rapport à celle que d'autres éprouvent. Dans les endroits où la pression du fluide vient à surpasser la résistance que l'air lui oppose, l'air cède, ou, si l'on veut, le vase crève, et le fluide s'écoule comme par une ouverture. C'est ce qui arrive à l'extrémité des pointes et sur les arêtes vives des corps anguleux. „

Faraday ne comprend pas la pensée de Poisson ; il confond la résistance que l'air oppose à l'échappement de l'électricité, en vertu de sa non conductibilité, avec la *pression atmosphérique,* c'est-à-dire avec la résistance que ce même air oppose au mouvement des masses matérielles, en vertu de sa pesanteur et de son inertie; et, triomphant sans peine de l'explication ainsi interprétée, il en tire avantage pour sa théorie qui attribue à l'action de la couche répandue sur le diélectrique l'équilibre de la couche recouvrant le conducteur :

“ Sur ce point, dit-il (*), je pense que mes vues sur l'induction ont un avantage marqué sur toutes les autres et, en particulier, sur celle qui attribue à la *pression de l'atmosphère* la rétention de l'électricité à la surface des conducteurs placés dans l'air. Cette manière de voir est celle qui a été adoptée par Poisson et Biot, et je la crois généralement reçue ; cette théorie associe par de grossières relations mécaniques, par l'intermédiaire d'une pression purement statique, deux éléments aussi dissemblables que l'air pondérable d'une part et que, d'autre part, le ou les fluides électriques, fluides subtils et, d'ailleurs, hypothétiques. „ ... “ Cela nous fournit une nouvelle preuve (**) que la seule pression de l'atmosphère ne suffit pas à prévenir ou à gouverner la décharge, mais que ce rôle appartient à une qualité ou relation électrique du milieu gazeux. C'est, par conséquent, un nouvel argument pour la théorie moléculaire de l'action inductive. „

D'ailleurs, un lecteur attentif des *Recherches expérimentales sur l'électricité* reconnaît aisément, dans l'hypothèse que nous déve-

(*) Faraday, Experimental Researches in Electricity, série XII, *On Induction,* vol. I, p. 438.
(**) Faraday, *Ibid.,* p. 445.

loppons en ce moment, ce que Faraday entend énoncer lorsqu'il affirme que l'action électrique ne s'exerce pas à distance, mais seulement entre particules contiguës; il veut certainement dire par là qu'aucune quantité d'électricité ne peut se développer à la surface d'une molécule matérielle sans qu'une charge égale et de signe contraire se développe sur la face en regard d'une autre molécule extrêmement voisine.

C'est bien ainsi que Mossotti a compris la pensée de Faraday: " Ce physicien, dit-il (*), considérant l'état de polarisation moléculaire électrique, pense qu'il doit exister deux systèmes de forces opposées qui alternent rapidement et se dissimulent alternativement dans l'intérieur du corps diélectrique, mais qui doivent manifester deux effets spéciaux et opposés aux extrémités de ce même corps. D'un côté, par l'action simultanée des deux systèmes de forces qui se développent dans le corps diélectrique, il naît, dans chaque point de la couche électrique qui recouvre le corps excité, une force égale et contraire à celle avec laquelle la même couche tend à expulser ses atomes; et l'opposition de ces deux forces fait que le fluide qui compose la couche est retenu sur la superficie du corps électrique. Du côté opposé, où le corps diélectrique touche ou enveloppe les surfaces des autres corps électriques environnants, il déploie une force d'une espèce analogue à celle du corps électrisé et au moyen de laquelle ces surfaces sont amenées à l'état électrique contraire. " Mossotti, ayant démontré l'existence des couches superficielles qui équivalent à un diélectrique polarisé par influence, ajoute (**): " Ces couches qui représenteraient, aux limites du corps diélectrique, les effets non neutralisés des deux systèmes réciproques de forces intérieures, exercent, sur la surface des corps conducteurs environnants, des actions équivalentes à celles que les couches électriques propres de ces mêmes corps exerceraient directement entre elles sans l'intervention du corps dielectrique. Ce théorème nous donne la conclusion principale de la question que nous

(*) Mossotti, *Recherches théoriques sur l'induction électrostatique envisagée d'après les idées de Faraday* (Bibliothèque universelle, Archives. t. VI, p. 194; 1847).

(**) Mossotti, *Ibid.*, p. 196.

nous étions proposée. Le corps diélectrique, par le moyen de la polarisation des atmosphères de ses molécules, ne fait que transmettre de l'un à l'autre corps l'action entre les corps conducteurs, neutralisant l'action électrique sur l'un et transportant sur l'autre une action égale à celle que le premier aurait exercée directement. »

Si l'on observe que pour Faraday et pour Mossotti, les mots *action électrique, force électrique,* sont à chaque instant pris comme synonymes de *charge électrique, densité électrique,* on ne peut pas ne pas reconnaître, dans les passages que nous venons de citer, l'hypothèse que traduit l'égalité (29). Nous pourrons donc dire que cette égalité exprime l'*hypothèse particulière de Faraday et de Mossotti.*

Prise en toute rigueur, cette hypothèse n'est pas compatible avec les principes sur lesquels repose la théorie de la polarisation diélectrique ; nous avons vu, en effet, comme conséquence de l'égalité (24), que la densité de la couche électrique réelle répandue à la surface d'un corps conducteur avait toujours une plus grande valeur absolue que la densité, au même point, de la couche électrique fictive qui équivaudrait à la polarisation du diélectrique contigu.

Mais cette même égalité (24) nous enseigne que l'hypothèse de Faraday et de Mossotti, inacceptable si on la prend à la rigueur, peut être approximativement vraie ; c'est ce qui arrive si ϵF_1 a une valeur très grande par rapport à $\frac{1}{4\pi}$.

On peut donc dire que l'*hypothèse de Faraday et de Mossotti représentera une loi approchée si le nombre abstrait* ϵF *a, pour tous les diélectriques, une valeur numérique extrêmement grande.*

Examinons les conséquences auxquelles conduit cette supposition.

La capacité d'un condensateur à lame d'air ne varie guère lorsqu'on fait, en ce condensateur, un vide aussi parfait que possible ; on peut donc admettre que le pouvoir inducteur spécifique de l'air par rapport à l'éther ne surpasse guère l'unité ou que le nombre $(1 + 4\pi\epsilon F)$ relatif à l'air peut être substitué au nombre $(1 + 4\pi\epsilon F_0)$ relatif à l'éther.

Prenons deux charges électriques Q et Q' placées dans l'éther

(pratiquement dans l'air) et soit r la distance qui les sépare; ces charges se repoussent avec une force qui a pour valeur

$$(30) \qquad R = \frac{\epsilon}{1 + 4\pi\epsilon F_0} \frac{QQ'}{r^2}.$$

Si l'on admet l'hypothèse de Faraday et de Mossotti, cette valeur diffère peu de

$$(31) \qquad R = \frac{1}{4\pi F_0} \frac{QQ'}{r^2}.$$

Supposons que l'on se serve du système d'unités électromagnétiques C. G. S.; que les nombres Q, Q', r, qui mesurent, dans ce système, les charges et leurs distances, soient des nombres de grandeur modérée; qu'ils soient, par exemple, tous trois égaux à 1. L'expérience nous montre que la force répulsive n'est pas mesurée par un nombre extrêmement petit, mais, au contraire, par un grand nombre; le coefficient de polarisation F_0 de l'éther ne peut donc pas être regardé comme ayant une très grande valeur en système électromagnétique C. G. S.; l'hypothèse de Faraday entraîne alors la proposition suivante :

En système électromagnétique C. G. S., *la constante* ϵ *a une valeur extrêmement grande; chaque formule pourra être remplacée par la forme limite que l'on obtient lorsque l'on y fait croître* ϵ *au delà de toute limite.*

L'expérience dont nous venons de parler nous renseigne, d'ailleurs, sur la valeur de F_0. La répulsion de deux charges représentées par le nombre 1 dans le système électromagnétique C. G. S., placées à un centimètre de distance l'une de l'autre, est mesurée sensiblement par le même nombre que le *carré de la vitesse de la lumière,* c'est-à-dire par le nombre 9×10^{22}; si donc l'on admet l'hypothèse de Faraday, on a sensiblement

$$\frac{1}{4\pi F_0} = 9 \times 10^{22}$$

ou

$$F_0 = \frac{1}{36\pi \times 10^{22}}.$$

ϵF_0 devant être extrêmement grand par rapport à $\frac{1}{4\pi}$, on voit que, *dans le système électromagnétique* C. G. S., ϵ *doit être mesuré par un nombre extrêmement grand par rapport à* 10^{22}.

Le pouvoir inducteur spécifique relatif à l'éther (pratiquement à l'air) d'un diélectrique quelconque est le rapport $\frac{1 + 4\pi\epsilon F}{1 + 4\pi\epsilon F_0}$; pour tous les diélectriques connus, il a une valeur finie ; il varie entre 1 (éther) et 64 (eau distillée).

Or, *dans la théorie de Faraday, le pouvoir inducteur spécifique d'un diélectrique* D' *par rapport à un autre diélectrique* D *est sensiblement égal au rapport entre le coefficient de polarisation* F' *du premier diélectrique et le coefficient de polarisation* F *du second :*

$$\frac{1 + 4\pi\epsilon F'}{1 + 4\pi\epsilon F} = \frac{F'}{F}. \tag{32}$$

Donc, pour tous les diélectriques, le rapport $\frac{F}{F_0}$ est compris entre 1 et 64; en d'autres termes, pour tous les diélectriques, le coefficient de polarisation F, mesuré en unités électromagnétiques C. G. S., est au plus de l'ordre de 10^{-22}.

Helmholtz, après avoir développé une électrodynamique très générale, a proposé (*), pour retrouver diverses conséquences de la théorie de Maxwell, une opération qui revient à prendre la forme limite des équations obtenues lorsqu'on y fait croître ϵF au delà de toute limite; cette supposition, on le voit, se ramène immédiatement à l'hypothèse de Faraday et de Mossotti.

(*) H. Helmholtz, *Ueber die Gesetze der inconstanten elektrischen Ströme in körperlich ausgedehnten Leitern* (VERHANDLUNGEN DES NATURHISTORISCH-MEDICINISCHEN VEREINS ZU HEIDELBERG, 21 janvier 1870; p. 89. — WISSENSCHAFTLICHE ABHANDLUNGEN, Bd. I, p. 543).—*Ueber die Bewegungsgleichungen der Elektricität für ruhende leitende Körper* (BORCHARDT'S JOURNAL FUR REINE UND ANGEWANDTE MATHEMATIK, Bd. LXXII, p. 127 et p. 129. — WISSENSCHAFTLICHE ABHANDLUNGEN, Bd. I, p. 625 et p. 628). — Voir aussi : H. Poincaré. *Électricité et Optique; II. Les théories de Helmholtz et les expériences de Hertz*, p. VI et p. 103; Paris, 1891.

CHAPITRE II

La première électrostatique de Maxwell

§ 1. *Rappel de la théorie de la conductibilité de la chaleur*

Avant d'aller plus loin et d'aborder l'exposé des idées de Maxwell, il nous faut arrêter un moment à l'étude de la conductibilité de la chaleur.

Considérons une substance, homogène ou hétérogène, mais isotrope.

Soient : (x, y, z) un point pris à l'intérieur de cette substance ;

T, la température en ce point;

k, le coefficient de conductibilité calorifique en ce point.

Le flux de chaleur en ce point aura pour composantes suivant les axes de coordonnées :

$$(33) \qquad u = -k\frac{\partial T}{\partial x}, \quad v = -k\frac{\partial T}{\partial y}, \quad w = -k\frac{\partial T}{\partial z}.$$

Considérons une partie continue d'un conducteur; un élément de volume

$$d\omega = dx\,dy\,dz,$$

découpé dans cette région, renferme une source de chaleur qui dégage, dans le temps dt, une quantité de chaleur $j\,d\omega\,dt$; nous pouvons nommer j l'*intensité de la source*. Nous aurons, d'après cette définition,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = j.$$

ou bien, en vertu des égalités (33),

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right)+j=0. \tag{34}$$

Soit maintenant S la surface qui sépare deux substances, 1 et 2, de conductibilités différentes. L'élément dS de cette surface renferme une source de chaleur superficielle qui, dans le temps dt, dégage une quantité de chaleur $J\,dS\,dt$; J est l'*intensité superficielle de la source.* Nous aurons alors

$$\begin{aligned} &u_1\cos(N_1,x)+v_1\cos(N_1,y)+w_1\cos(N_1,z)\\ &+u_2\cos(N_2,x)+v_2\cos(N_2,y)+w_2\cos(N_2,z)=J \end{aligned}$$

ou bien, en vertu des égalités (33),

$$k\frac{\partial T}{\partial N_1}+k_2\frac{\partial T}{\partial N_2}+J=0. \tag{35}$$

Telles sont les équations fondamentales, données par Fourier, qui régissent la propagation de la chaleur par conductibilité. On sait comment l'œuvre de G. S. Ohm, complétée plus tard par G. Kirchhoff, a permis de les étendre à la propagation du courant électrique au sein des corps conducteurs. Pour passer du premier problème au second, il suffit de remplacer le flux de chaleur par le flux électrique, la conductibilité calorifique par la conductibilité électrique, la température T par le produit ϵV de la constante des lois de Coulomb par la fonction potentielle électrostatique; enfin de substituer à j et à J les rapports $\frac{\partial\sigma}{\partial t}$, $\frac{\partial\Sigma}{\partial t}$, σ, Σ désignant les densités électriques solide et superficielle.

Une extension analogue des équations de la conductibilité calorifique peut servir à traiter de la diffusion d'un sel au sein d'une dissolution aqueuse, selon la remarque bien connue de Fick.

Une analogie analytique peut aussi être établie entre certains problèmes relatifs à la conductibilité de la chaleur et certains problèmes d'électrostatique.

Considérons, par exemple, le problème suivant :

Un corps C est plongé dans un espace E. Le corps C et l'espace E sont tous deux homogènes, isotropes et conducteurs, mais ils ont

des conductibilités différentes; k_1 est la conductibilité du corps C; k_2 est la conductibilité de l'espace E. Le corps C est supposé maintenu à une température invariable, la même en tous ses points, que nous désignerons par A; les divers éléments de l'espace E ne renferment point d'autre cause de dégagement ou d'absorption de chaleur que celle qui provient de leur chaleur spécifique γ; chaque élément $d\omega$, de densité ρ, dégage donc, dans le temps dt, une quantité de chaleur $-\rho\, d\omega\, \gamma \frac{\delta T}{\delta t} dt$, en sorte que

$$j = -\rho\gamma \frac{dT}{\delta t};$$

enfin, l'état de ce milieu E est supposé stationnaire, T y a, en chaque point, une valeur indépendante de t, ce qui transforme l'égalité précédente en

$$j = 0.$$

Comment, pour réaliser un semblable état, faut-il distribuer les sources de chaleur à la surface du corps C? Quelle sera, aux divers points de l'espace E, la valeur de la température T?

La température T, continue dans tout l'espace, devra prendre, en tout point du corps C et de la surface qui le termine, la valeur constante A; en tout point de l'espace E, elle devra vérifier l'équation

$$\Delta T = 0,$$

à laquelle se réduit l'équation (34), lorsqu'on y fait

$$j = 0$$

et qu'on y suppose k indépendant de x, y, z; T étant ainsi déterminé, l'équation (35), qui se réduira à

$$k_2 \frac{\delta T}{\delta N_2} + J = 0,$$

fera connaître la valeur de J en chaque point de la surface qui limite le corps C.

Ce problème est analytiquement identique à celui-ci :

Un conducteur homogène et électrisé C est plongé dans un milieu isolant E; quelle est la distribution de l'électricité à la surface de ce conducteur en équilibre?

Pour passer du premier problème au second, il suffit de remplacer, dans la solution, la température T par la fonction potentielle électrique V, le quotient $\frac{J}{k_2}$ par le produit $4\pi\Sigma$, où Σ désigne la densité superficielle de la couche électrique qui recouvre le conducteur C.

Il serait peut-être difficile de citer le géomètre qui a le premier remarqué cette analogie; les mathématiciens du commencement du siècle étaient si parfaitement habitués au maniement des équations différentielles auxquelles conduisent les diverses théories de la physique qu'une semblable analogie devait, pour ainsi dire, leur sauter aux yeux. En tous cas, on la trouve explicitement énoncée dans d'anciens travaux de Chasles (*) et de W. Thomson (**).

§ 2. *Théorie des milieux diélectriques, construite par analogie avec la théorie de la conduction de la chaleur*

On a cherché, dans les propriétés des milieux diélectriques, une analogie plus profonde avec les lois de la conductibilité de la chaleur.

Ayant traité un problème quelconque de conductibilité, on passerait au problème analogue de l'électrostatique en conservant les mêmes équations et en changeant le sens des lettres qui y figurent selon les règles que voici :

On remplacerait la température T par une certaine fonction Ψ;

(*) M. Chasles, *Énoncé de deux théorèmes généraux sur l'attraction des corps et la théorie de la chaleur* (Comptes rendus, t. VIII, p. 209; 1839).

(**) W. Thomson, *On the uniform Motion of Heat in homogeneous solid Bodies, and its Connexion with the mathematical Theory of Electricity* (Cambridge and Dublin mathematical Journal, février 1842. — Réimprimé dans le Philosophical Magazine en 1854 et dans les Papers on Electrostatics and Magnetism, Art. I).

cette fonction Ψ déterminerait les composantes P, Q, R du *champ électrostatique* au point (x, y, z) par les formules

$$(36) \qquad P = -\frac{\delta \Psi}{\delta x}, \quad Q = -\frac{\delta \Psi}{\delta y}, \quad R = -\frac{\delta \Psi}{\delta z}.$$

Le coefficient de conductibilité k serait remplacé par un coefficient K, caractérisant les propriétés diélectriques du milieu et que l'on nommerait son *pouvoir inducteur spécifique*.

Les composantes du flux de chaleur u, v, w seraient remplacées par les composantes f, g, h d'un vecteur qu'on nommerait la *polarité* au point (x, y, z), en sorte que l'on aurait

$$(37) \qquad \begin{cases} f = KP = -K\dfrac{\delta \Psi}{\delta x}, \\ g = KQ = -K\dfrac{\delta \Psi}{\delta y}, \\ h = KR = -K\dfrac{\delta \Psi}{\delta z}. \end{cases}$$

L'intensité j de la source calorifique serait remplacée par $4\pi K e$, e étant la *densité électrique solide*, en sorte que l'équation (34) deviendrait

$$(38) \qquad \frac{\delta}{\delta x}\left(K\frac{\delta \Psi}{\delta x}\right) + \frac{\delta}{\delta y}\left(K\frac{\delta \Psi}{\delta y}\right) + \frac{\delta}{\delta z}\left(K\frac{\delta \Psi}{\delta z}\right) + 4\pi K e = 0.$$

Dans le mémoire où il traite de la théorie que nous exposons en ce moment, Maxwell ne considère jamais les surfaces de discontinuité qui séparent les divers corps les uns des autres ; on peut en effet, si l'on veut, supposer que le passage des divers corps les uns dans les autres se fait d'une manière continue au travers d'une couche très mince ; les physiciens ont souvent usé de ce procédé.

Ces diverses règles, si elles existaient seules, pourraient être regardées comme un simple jeu de formules, comme des conventions purement arbitraires ; elles perdent ce caractère, pour prendre celui d'une électrostatique, d'une théorie physique susceptible d'être confirmée ou contredite par l'expérience, lorsqu'on y joint l'hypothèse suivante :

Le système est le siège d'actions qui admettent pour potentiel la quantité

$$U = \frac{1}{2} \int \Psi e \, d\omega, \tag{39}$$

l'intégrale s'étendant au système tout entier.

Quelques linéaments de cette électrostatique nouvelle se trouvent dans les recherches de Faraday; c'est, il est vrai, non point au sujet des corps diélectriques, mais au sujet des corps magnétiques qu'il les trace; mais on connaît les liens intimes qui unissent le développement de la théorie des aimants au développement de la théorie des corps diélectriques. Divers phénomènes, dit Faraday (*), " m'ont conduit à l'idée que des corps possèdent à des degrés différents un *pouvoir conducteur* pour le magnétisme „... " J'use des mots *pouvoir conducteur* comme expression générale pour désigner la capacité que les corps possèdent d'effectuer la transmission des forces magnétiques, sans rien supposer sur la façon dont s'effectue cette transmission. „ Certains corps auraient un pouvoir conducteur plus grand que le milieu ambiant; ce seraient les corps magnétiques proprement dits; d'autres conduiraient moins bien que le milieu; ce seraient les corps diamagnétiques. Faraday semble d'ailleurs avoir entrevu (**) que cette théorie ne s'accordait pas en tout point avec la théorie classique de la polarisation des aimants.

Déjà, quelques années auparavant, les idées mêmes de Faraday sur l'induction électrique avaient suggéré à W. Thomson (***) quelques aperçus analogues : " Il est possible, je n'en doute pas, écrivait-il, de découvrir que de telles forces à distance peuvent être produites entièrement par l'action des parties contiguës de tout le milieu interposé, et nous en trouvons une analogie dans le

(*) Faraday, *Experimental Researches in Electricity*, XXVIe série, lue à la Société royale de Londres le 28 nov. 1850 (Experimental Researches, vol. III, p. 100).

(**) Faraday, *loc. cit.*, p. 208.

(***) W. Thomson, *On the elementary Laws of statical Electricity* (Cambridge and Dublin mathematical Journal, 1845. — Papers on electrostatics, Art. II, n° 50).

cas de la chaleur, dont certains effets, qui suivent les mêmes lois, sont propagés sans doute de particule à particule. „

Mais si quelques vestiges de l'idée que nous venons d'exposer se peuvent soupçonner dans les écrits de certains auteurs, il n'est point douteux que Maxwell l'ait développée le premier en une véritable théorie; à cette théorie, il a consacré la première partie de son plus ancien mémoire sur l'électricité (*).

Maxwell commence par proclamer le rôle fécond de l'*analogie physique*. " Par analogie physique, dit-il, j'entends cette ressemblance partielle entre les lois d'une science et les lois d'une autre science qui fait que l'une des deux sciences peut servir à illustrer l'autre „ et il montre comment l'analogie physique entre l'acoustique et l'optique a contribué au progrès de cette dernière science.

Il développe alors non point la théorie de la propagation de la chaleur dans un milieu conducteur, mais une théorie du mouvement d'un fluide dans un milieu résistant; celle-ci ne diffère d'ailleurs de celle-là que par la signification des lettres qu'elle emploie; mais, en toutes deux, ces lettres se groupent selon les mêmes formules.

Ces formules, Maxwell les étend à l'électricité, conformément à ce que nous venons d'indiquer (**): " L'induction électrique, dit-il, exercée sur un corps à distance, dépend non seulement de la distribution de l'électricité sur le corps inducteur et de la forme et de la position du corps induit, mais encore de la nature du milieu interposé ou diélectrique. Faraday exprime ce fait par la concep-

---

(*) J. Clerk Maxwell, *On Faraday's Lines of Force*, lu à la Société philosophique de Cambridge, le 10 décembre 1855 et le 11 février 1856 (Transactions of the Cambridge philosophical Society, vol. X, part. I p. 27; 1864. — Scientific Papers of James Clerk Maxwell, vol. I, p. 156; Cambridge, 1890).

(**) Pour faire concorder nos notations avec celles qu'emploie Maxwell dans le mémoire cité, il faut remplacer

$$\Psi \text{ par } -V,$$
$$e\,d\omega \text{ par } dm,$$
$$K \text{ par } \frac{1}{K},$$
$$f, g, h \text{ par } u, v, w,$$
$$P, Q, R \text{ par } X, Y, Z.$$

tion qu'une substance a une *plus grande capacité inductive* ou conduit mieux les lignes d'action inductive qu'une autre. Si nous supposons que, dans notre analogie du mouvement d'un fluide dans un milieu résistant, la résistance est différente dans différents milieux, lorsque nous donnerons à la résistance une moindre valeur, nous obtiendrons un milieu analogue à un diélectrique qui conduit plus aisément les lignes de Faraday. „

§ 3. *Discussion de la première électrostatique de Maxwell*

Lorsque Maxwell, dans l'exposé que nous venons d'analyser, parle de polarité, de charge électrique, de fonction potentielle, entend-il destituer ces mots du sens qu'ils avaient reçu jusque-là en électrostatique, entend-il définir des grandeurs nouvelles, essentiellement distinctes de celles qui portaient les mêmes noms avant lui, et destinées à les remplacer dans une théorie irréductible à l'ancienne électrostatique ? Maint passage de son mémoire nous prouve clairement qu'il n'en est rien ; qu'en usant des mots charge électrique, fonction potentielle, polarité, il entend les employer dans le sens accepté de tous ; qu'il ne prétend pas créer une électrostatique nouvelle, mais, par une comparaison, illustrer l'électrostatique traditionnelle, la théorie de la polarisation des diélectriques telle que Faraday et Mossotti l'ont conçue, à l'imitation de la théorie du magnétisme donnée par Poisson.

Tout d'abord, en parlant de l'état de l'électrostatique au moment où il écrit, Maxwell ne semble pas se proposer de modifier quoi que ce soit aux formules admises ; puis, il indique par quel changement dans le sens des lettres que renferment les formules on passera du problème du mouvement d'un fluide dans un milieu résistant au problème électrique " ordinaire „, épithète dont l'emploi exclut toute intention de révolutionner cette branche de la Physique. A propos des aimants, Maxwell marque nettement que les deux théories en question sont, pour lui, mathématiquement équivalentes : " Un aimant, dit-il, est conçu comme formé de parties aimantées élémentaires, dont chacune possède un pôle nord et un pôle sud ; l'action de chacun de ces pôles sur un autre pôle nord ou sud est gouvernée par des lois mathématique mentidentiques à celles de l'électricité. Par conséquent, la même application de

l'idée de lignes de force peut être faite à ce sujet et la même analogie du mouvement d'un fluide peut être employée à l'illustrer. „ Cette analogie, Maxwell la développe, l'applique aux corps magnétiques regardés comme plus conducteurs que le milieu ambiant, aux corps diamagnétiques, regardés comme moins conducteurs que ce milieu, et il ajoute : “ Il est évident que nous obtiendrons les mêmes résultats mathématiques si nous supposions que la force magnétique a le pouvoir d'exciter la polarité dans les corps, polarité qui a la *même* direction que les lignes de force dans les corps paramagnétiques et la direction *contraire* dans les corps diamagnétiques. „

Il est donc palpable que Maxwell, en s'appuyant sur une analogie avec les équations de la chaleur, a simplement prétendu donner une théorie des diélectriques, différente au point de vue des hypothèses physiques, mais identique au point de vue des équations mathématiques, à la théorie que domine l'hypothèse des molécules polarisées.

Aussi Maxwell n'hésite-t-il pas à admettre (*) que la fonction Ψ est analytiquement identique à la fonction potentielle électrostatique :

(40) $$\Psi = \int \frac{e}{r} d\omega.$$

Il n'a été question jusqu'ici, dans la théorie de Maxwell, que de corps diélectriques; comment Maxwell se représente-t-il les corps conducteurs? “ Si la conductibilité du diélectrique est parfaite ou presque parfaite pour la petite quantité d'électricité que nous considérons, dit-il, le diélectrique est alors considéré comme un conducteur; sa surface est une surface d'égal potentiel, et l'attraction résultante au voisinage de la surface est normale à la surface. „

(*) J. Clerk Maxwell, Scientific Papers, vol. I, p. 176; Maxwell écrit l'égalité

$$V = -\sum \frac{dm}{r}$$

qui, avec ses notations, équivaut à la précédente.

Ainsi, pour Maxwell, il n'y a pas, à proprement parler, de corps conducteur; tous les corps sont des diélectriques, qui diffèrent seulement les uns des autres par la valeur attribuée à K; pour l'éther du vide, K est égal à 1; pour les autres diélectriques, K est supérieur à 1; pour certains, K a une très grande valeur; ceux-là sont les conducteurs.

Dès lors, le problème électrostatique se pose de la manière suivante :

La fonction Ψ, que définit l'égalité (40), doit vérifier dans tout l'espace l'égalité (38); une fois cette fonction Ψ déterminée, les égalités (37) feront connaître, en chaque point, l'état de polarisation du milieu.

Or, l'égalité (40), qui est une définition, entraîne l'identité

$$\Delta\Psi = 4\pi e,$$

en sorte que l'égalité (38) peut aussi bien s'écrire

$$\frac{\partial K}{\partial x}\frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial K}{\partial y}\frac{\partial \Psi}{\partial y} + \frac{\partial K}{\partial z}\frac{\partial \Psi}{\partial z} = 0. \tag{41}$$

Cette condition est *tout* ce que nous fournit la première électrostatique de Maxwell pour déterminer la fonction Ψ; or, il est clair qu'elle est insuffisante à cet objet; tout d'abord, en un milieu homogène, où K est indépendant d' x, y, z, elle se réduit à une identité et laisse la fonction Ψ entièrement indéterminée en un semblable milieu; mais, même au cas où, pour éviter cette difficulté, on repousserait l'existence de tout milieu homogène, on n'aurait pas fait faire un pas à la détermination de Ψ, car si une fonction Ψ vérifie l'équation (41), la fonction λΨ, où λ est une constante, la vérifie également.

La première électrostatique de Maxwell n'a donc que l'apparence d'une théorie physique; lorsqu'on la serre de près, elle s'évanouit.

CHAPITRE III

La deuxième électrostatique de Maxwell

§ 1. *L'hypothèse des cellules électriques*

La première électrostatique n'était, pour Maxwell, qu'une simple ébauche; la seconde électrostatique, celle que nous allons maintenant exposer, constitue, au contraire, une théorie développée, à laquelle son auteur est revenu à plusieurs reprises; plus étroitement que la première théorie, elle s'inspire des vues de Faraday et surtout de Mossotti sur la constitution des diélectriques.

Faraday avait considéré un diélectrique soumis à l'influence comme composé de particules dont les deux extrémités portent des charges égales et contraires; mais il avait fui toute hypothèse déterminée sur la nature intrinsèque de cette électricité que les particules matérielles possèdent, et par laquelle elles peuvent être soit polarisées, soit laissées à l'état neutre; il aime à insister sur ce fait que sa théorie de l'induction est indépendante de toute hypothèse sur la nature de l'électricité.

« Ma théorie de l'induction, dit-il (*), n'émet aucune assertion au sujet de la nature de l'électricité, ou des diverses questions posées par quelqu'une des théories qui ont été émises à ce sujet. Un certain pouvoir ou deux certains pouvoirs peuvent se développer ou être excités dans les corps; quelle en est l'origine? C'est une question qu'elle ne prétend pas embrasser; mais, regardant

(*) M. Faraday, *An Answer to Dr Hare's Letter on certain theoretical Opinions* (Sillimann's Journal, vol. XXXIX, p. 108 à 120; 1840. — Faraday's Experimental Researches in Electricity, vol. II, p. 262).

ce fait comme donné par l'observation et l'expérience, elle le considère uniquement en lui-même; elle étudie comment la force se comporte, tandis qu'elle se communique à distance dans le phénomène particulier, mais très répandu, que l'on nomme l'*induction électrostatique*. Cette théorie ne décide ni de la valeur absolue de la force, ni de sa nature, mais seulement de sa distribution. „

Mossotti n'a pas imité la circonspection avec laquelle Faraday se tenait à l'écart de toute hypothèse sur la nature de l'électricité et évitait de se prononcer entre la théorie qui suppose deux fluides électriques et celle qui admet un fluide unique. Partisan résolu des idées de Franklin, il les transporte dans l'exposé de la doctrine de Faraday; il admet que l'électricité est constituée par un fluide unique, qu'il nomme l'*éther;* ce fluide existe, à un certain degré de densité, dans les corps à l'état neutre; s'il se condense en une région, cette région se trouve électrisée positivement; elle se trouve électrisée négativement lorsque l'éther y est raréfié; dans un diélectrique à l'état neutre, l'éther forme atmosphère autour de chacune des particules matérielles qu'il ne peut quitter; lorsque la molécule est soumise à une force inductive, “ l'atmosphère éthérée (*) condensée à une extrémité, déploie une force électrique positive et raréfiée à l'extrémité opposée, laisse à découvert une force électrique négative „.

C'est en s'autorisant de ce passage de Mossotti que Maxwell écrit (**) ce qui suit, au début de l'exposé de sa deuxième électrostatique :

“ Une force électromotrice agissant sur un diélectrique, produit un état de polarisation de ses parties semblable, comme distribution, à la polarité des particules de fer sous l'influence d'un aimant et, comme la polarisation magnétique, capable d'être représentée sous forme d'un état dans lequel chaque particule a des pôles doués de propriétés opposées. „

(*) Mossotti, *Recherches théoriques sur l'induction électrostatique envisagée d'après les idées de Faraday* (BIBLIOTHÈQUE UNIVERSELLE, ARCHIVES, t. VI, p. 195, 1847).

(**) J. Clerk Maxwell, *On physical Lines of Force, Part. III: The Theory of molecular Vortices applied to statical Electricity* (PHILOSOPHICAL MAGAZINE, janvier et février 1862. — SCIENTIFIC PAPERS, vol. I, p. 491).

“ Dans un diélectrique soumis à l'induction, on peut concevoir, en chaque molécule, l'électricité déplacée de telle manière que l'une des faces soit électrisée positivement et l'autre négativement, en sorte que l'électricité demeure en entier attachée à chaque molécule et ne peut passer d'une molécule à l'autre. „

“ L'effet de cette action sur l'ensemble de la masse électrique est de produire un déplacement de l'électricité dans une certaine direction... La grandeur de ce déplacement dépend de la nature du corps et de la force électromotrice, en sorte que si h est le déplacement, R la force électromotrice et E un coefficient qui dépend de la nature du diélectrique,

$$(42) \qquad R = -4\pi E^2 h \ (*).$$

... Ces relations sont indépendantes de toute théorie sur le mécanisme interne des diélectriques... „

Ce passage, où se trouve affirmé si formellement l'accord de la théorie qui va être développée, d'une part avec la théorie de l'aimantation par influence donnée par Coulomb et Poisson, d'autre part avec les vues semblables de Mossotti touchant la polarisation des diélectriques, est un renseignement de première importance sur les opinions de Maxwell; nous le retrouverons, en effet, presque textuellement reproduit dans tout ce que Maxwell écrira dorénavant sur l'électricité et jusque dans les premiers chapitres de la deuxième édition de son Traité, dernière œuvre à laquelle il ait mis la main.

Dans le mémoire : *On physical Lines of Force,* que nous nous proposons d'analyser, Maxwell ne se contente pas d'accepter ces résultats “ indépendants de toute théorie „; il cherche un agencement de corps fluides et de corps solides qui permette d'en donner une interprétation mécanique; selon le mot en honneur auprès des physiciens anglais, il construit un *modèle mécanique* des diélectriques.

Maxwell admet que tout diélectrique est un mécanisme formé au moyen de deux substances : un fluide incompressible et dénué

(*) Le signe —, au second membre de l'égalité (42), provient, comme nous le verrons plus loin, d'une faute matérielle.

de viscosité, qu'il nomme l'*éther*, et un solide parfaitement élastique, qu'il nomme l'*électricité*.

L'électricité forme les parois très minces de cellules que remplit l'éther. L'éther est animé, au sein de chaque cellule, de mouvements tourbillonnaires qui expliquent les propriétés magnétiques du milieu.

„ Lorsque les particules du fluide éthéré sont tirées dans une certaine direction, leurs actions tangentielles sur la substance élastique qui forme les cellules déforment chaque cellule et mettent en action une force égale et opposée due à l'élasticité des cellules. Lorsque la première force est supprimée, les cellules reprennent leur forme primitive, et l'électricité reprend la position qu'elle avait abandonnée. „

Dans cette représentation de la polarisation diélectrique, le *déplacement* de la substance élastique nommée *électricité* va jouer exactement le même rôle que le *déplacement du fluide éthéré* dont parlait Mossotti; il *mesurera,* en chaque point, l'*intensité de polarisation.*

Les parois élastiques des cellules sont déformées par les forces qui agissent sur elles; soient P, Q, R, les composantes de la force en un point, f, g, h, les composantes du déplacement au même point; les composantes f, g, h du déplacement dépendent des composantes P, Q, R de la force. Comment en dépendent-elles?

La réponse à cette question dépend d'un problème d'élasticité qui serait fort compliqué si la forme des cellules était donnée, et qui ne peut même être mis en équation tant que cette forme demeure inconnue ; faute de solution exacte, Maxwell se contente d'une solution grossièrement approchée ; il étudie la déformation d'une cellule unique, ayant la forme sphérique, et soumise à une force qui est parallèle à OZ et qui a en tout point la même valeur R. Il trouve alors que l'on a

$$(42^{bis}) \qquad R = 4\pi E^2 h,$$

E^2 étant une quantité qui dépend des deux coefficients d'élasticité de la matière qui forme les cellules.

Généralisant ce résultat, il admet que l'on a, en toutes circonstances, les égalités

$$(43^{bis}) \qquad P = 4\pi E^2 f, \quad Q = 4\pi E^2 g, \quad R = 4\pi E^2 h.$$

En réalité, ces formules ne sont pas celles que Maxwell a données, mais celles que lui aurait fournies un calcul correct. Par suite d'une faute de signe manifeste (*), il substitue à ces formules les formules incorrectes

$$(42) \qquad R = -4\pi E^2 h,$$

$$(43) \qquad P = -4\pi E^2 f, \quad Q = -4\pi E^2 g, \quad R = -4\pi E^2 h.$$

Les formules que nous venons d'écrire sont générales ; elles prennent une forme plus particulière dans le cas où l'équilibre électrique est établi sur le système ; dans ce cas, en effet, les théories électrodynamiques développées par Maxwell dans le mémoire même que nous analysons (**) montrent qu'il existe une certaine fonction $\Psi\ (x, y, z)$, telle que l'on ait

$$(44) \qquad P = -\frac{\delta\Psi}{\delta x}, \quad Q = -\frac{\delta\Psi}{\delta y}, \quad R = -\frac{\delta\Psi}{\delta z}.$$

D'ailleurs, si les raisonnements de Maxwell démontrent l'existence de cette fonction, ils ne nous renseignent en aucune façon sur sa nature, bien que Maxwell insinue ce qui suit : " L'interprétation physique de Ψ est que cette fonction représente la *tension électrique* en chaque point de l'espace. "

(*) J. Clerk Maxwell, Scientific Papers, vol. I, p. 495. Des équations

$$(100) \qquad R = -2\pi m a\,(e + 2f),$$

$$(103) \qquad h = \frac{ae}{2\pi},$$

Maxwell tire l'équation

$$(104) \qquad R = 4\pi^2 m\,\frac{e + 2f}{e}\,h.$$

D'ailleurs, tout ce mémoire de Maxwell est littéralement criblé de fautes de signe.

(**) J. Clerk Maxwell. Scientific Papers, vol. I, p. 482.

§ 2. *Les principes précédents dans les écrits ultérieurs de Maxwell*

Avant de suivre plus loin les conséquences de ces principes et de les analyser, nous allons indiquer sous quelle forme on les retrouve dans les écrits publiés par Maxwell postérieurement à son mémoire : *On physical Lines of Force.*

En 1864, Maxwell publiait un nouveau mémoire (*), très étendu, sur les actions électromagnétiques ; il y définissait lui-même, de la manière suivante, l'esprit qui a dirigé la composition de ce travail :

« J'ai tenté dans une occasion précédente, disait-il (**), de décrire une espèce particulière de mouvement et un genre particulier de déformation combinés de manière à rendre compte des phénomènes. Dans le présent mémoire, j'ai évité toute hypothèse de cette nature ; lorsqu'à propos des phénomènes connus de l'induction électrodynamique et de la polarisation diélectrique, j'emploie des termes comme moment électrique et élasticité électrique, je n'ai d'autre but que de diriger l'esprit du lecteur vers des phénomènes mécaniques qui l'aideront à comprendre les phénomènes électriques correspondants. Dans le présent mémoire, de semblables manières de parler doivent être regardées comme des illustrations et non comme des explications. »

Sans faire aucune hypothèse sur la nature des phénomènes électriques, donner aux lois qui les régissent des formes analogues de tout point à celles qu'affectent les équations de la dynamique, ce sera précisément l'objet du *Traité d'Électricité et de Magnétisme*, dont le mémoire : *A dynamical Theory of the electromagnetic Field* est l'ébauche.

Maxwell ne s'y montre pas moins que dans son précédent mémoire : *On physical Lines of Force* respectueux des hypothèses traditionnelles touchant la polarisation des diélectriques. Il écrit (***), en citant Faraday et Mossotti : « Lorsqu'une force électro-

---

(*) J. Clerk Maxwell, *A dynamical Theory of the Electromagnetic Field,* lu à la Société Royale de Londres le 8 décembre 1854 (Philosophical Transactions, vol. CLV. — Scientific Papers, vol. I, p. 526).

(**) J. Clerk Maxwell, Scientific Papers, vol. I, p. 563.

(***) J. Clerk Maxwell, Ibid., vol. I, p. 131.

motrice agit sur un diélectrique, elle y produit un état de polarisation qui s'y distribue comme la polarité des diverses parties d'une masse de fer soumise à l'influence d'un aimant; de même que la polarisation magnétique, cette polarité peut être représentée comme un état dans lequel les pôles opposés de chaque particule se trouvent dans des conditions opposées. „

“ Lorsqu'un diélectrique est soumis à l'action d'une force électromotrice, on doit admettre que l'électricité est déplacée en chaque molécule de telle manière que l'une des extrémités de cette molécule est électrisée positivement et l'autre négativement; mais l'électricité demeure totalement retenue par la molécule, de sorte qu'elle ne peut passer de cette molécule à une molécule voisine. L'effet que cette action produit sur la masse entière du diélectrique est un déplacement général de l'électricité dans une certaine direction... Dans l'intérieur du diélectrique, on ne remarque aucun signe d'électrisation, car l'électrisation de la surface de chaque molécule est neutralisée par l'électrisation opposée qui se trouve à la surface des molécules contiguës; mais à la surface qui limite le diélectrique, l'électrisation ne se trouve plus neutralisée et nous observons des phénomènes qui indiquent une électrisation positive ou négative. „

“ La relation qui existe entre la force électromotrice et la grandeur du déplacement électrique qu'elle produit dépend de la nature du diélectrique; en général, la même force électromotrice produit un plus grand déplacement électrique dans un diélectrique solide, comme le verre et le soufre, que dans l'air. „

Si l'on désigne par K le rapport entre la force électromotrice et le déplacement, on aura

$$(45) \qquad P = Kf, \qquad Q = Kg, \qquad R = Kh.$$

D'ailleurs, dans le cas où l'équilibre est établi sur le système, les composantes P, Q, R de la force électromotrice sont données par les formules

$$(44) \qquad P = -\frac{\delta\Psi}{\delta x}, \quad Q = -\frac{\delta\Psi}{\delta y}, \quad R = -\frac{\delta\Psi}{\delta z},$$

où Ψ est une fonction d'x, y, z sur la forme analytique de laquelle les raisonnements électrodynamiques de **Maxwell** ne

nous apprennent rien : “ Ψ, dit Maxwell (*), est une fonction d'x, y, z et t qui demeure indéterminée en ce qui concerne la solution des équations de l'électrodynamique, car les termes qui en dépendent disparaissent lorsqu'on intègre le long d'un circuit fermé. Toutefois, la quantité Ψ peut être déterminée dans chaque cas particulier, lorsque l'on connaît les conditions actuelles de la question. L'interprétation physique de Ψ est qu'elle représente le *potentiel électrique* en chaque point de l'espace. „

Ce passage ne diffère guère de celui que Maxwell écrit, au sujet de la quantité Ψ, dans son mémoire : *On physical Lines of Force,* que par la substitution des mots *potentiel électrique* aux mots *tension électrique.* Mais, malgré la précision plus grande du nouveau terme, rien, dans les raisonnements de Maxwell, ne justifie l'identification analytique de la fonction Ψ et de la *fonction potentielle électrostatique* de Green ; rien non plus, ni une ligne de texte, ni une équation, ne marque que Maxwell ait admis cette assimilation, qui serait incompatible avec plusieurs des résultats auxquels il parvient.

Les équations que nous venons d'écrire concordent évidemment avec celles que nous avons empruntées au mémoire : *On physical Lines of Force;* elles n'en diffèrent que par la substitution du coefficient K au produit $4\pi E^2$; en outre, la faute de signe qui affectait les équations (42) et (43) est corrigée dans les équations (45).

§ 3. *L'équation de l'électricité libre*

Par la lettre e, Maxwell représente, dans son Mémoire : *A dynamical Theory of the electromagnetic Field* (**) “ la quantité d'électricité positive libre contenue dans l'unité de volume d'une portion quelconque du champ, due à ce que l'électrisation des différentes parties du champ n'est pas exactement neutralisée par l'électrisation des parties voisines. „

Rapprochée du passage sur la polarisation diélectrique que nous avons, au § précédent, emprunté au même mémoire, cette définition ne laisse aucun doute sur le sens que Maxwell attribue

(*) J. Clerk Maxwell, Scientific Papers, vol. I, p. 558.

(**) Ibid., vol. I, p. 161.

à la lettre e; c'est la densité solide de la distribution électrique fictive qui équivaut à la polarisation diélectrique ; c'est donc cela même qu'au Chapitre I, nous avons désigné par la lettre e.

D'autre part, comme le déplacement (f, g, h) est certainement, pour Maxwell, l'exact équivalent de l'intensité de polarisation, entre les composantes du déplacement et la quantité e, il n'hésite pas à écrire (*) la relation que Poisson avait établie entre les composantes de l'aimantation et la densité magnétique fictive, et que Mossotti avait étendue aux diélectriques :

$$e + \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} = 0. \tag{46}$$

Une équation complète celle-là en fixant la densité superficielle de l'*électricité libre* à la surface de séparation de deux diélectriques 1 et 2 ; dans les deux mémoires que nous analysons en ce moment, Maxwell ne parle jamais de surfaces de discontinuité ; il n'écrit donc pas cette équation ; mais la forme en est forcée, du moment que l'on admet, d'une part, l'équation précédente et, d'autre part, l'équivalence entre une surface de discontinuité et une couche de passage très mince ; on peut donc adjoindre à l'équation précédente la relation

$$\begin{aligned} E + f_1 \cos(N_1, x) + g_1 \cos(N_1, y) + h_1 \cos(N_1, z) \\ + f_2 \cos(N_2, x) + g_2 \cos(N_2, y) + h_2 \cos(N_2, z) = 0. \end{aligned} \tag{47}$$

Moyennant les équations (45), l'égalité (47) devient

$$\begin{aligned} E + \frac{1}{K_1}[P_1 \cos(N_1, x) + Q_1 \cos(N_1, y) + R_1 \cos(N_1, z)] \\ + \frac{1}{K_2}[P_2 \cos(N_2, x) + Q_2 \cos(N_2, y) + R_2 \cos(N_2, z)] = 0, \end{aligned} \tag{48}$$

tandis que l'équation (46) devient

$$e + \frac{\partial}{\partial x}\frac{P}{K} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{Q}{K} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{R}{K} = 0 \tag{49}$$

(*) J. Clerk Maxwell, Scientific Papers, vol. I, p. 561, égalité (G).

et, dans le cas où le milieu est homogène,

$$(50) \qquad e + \frac{1}{K}\left(\frac{\delta P}{\delta x} + \frac{\delta Q}{\delta y} + \frac{\delta R}{\delta z}\right) = 0.$$

Cette équation, Maxwell ne l'a pas écrite dans son mémoire : *A dynamical Theory of the electromagnetic Field,* mais elle résulte immédiatement des équations (45) et (46) qu'il y écrit.

Dans le mémoire : *On physical Lines of Force,* il l'obtient par des considérations, à peine différentes des précédentes, qu'il nous faut relater.

Il part (*) de ce principe que " la variation du déplacement est assimilable à un courant ,, en sorte que $\frac{\delta f}{\delta t}$, $\frac{\delta g}{\delta t}$, $\frac{\delta h}{\delta t}$, sont les composantes d'un flux, le *flux de déplacement,* qui doivent être respectivement ajoutées aux composantes du flux de conduction, pour former les composantes p, q, r, du flux total. " Si e désigne la quantité d'électricité libre par unité de volume, l'équation de continuité donne

$$\frac{\delta p}{\delta x} + \frac{\delta q}{\delta y} + \frac{\delta r}{\delta z} + \frac{\delta e}{\delta t} = 0. \text{ ,,}$$

Mais, par des considérations que nous retrouverons lorsque nous étudierons l'électrodynamique de Maxwell, celui-ci attribue aux composantes du flux de conduction la forme

$$-\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\delta\gamma}{\delta y} - \frac{\delta\beta}{\delta z}\right), \qquad -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\delta\alpha}{\delta z} - \frac{\delta\gamma}{\delta x}\right), \qquad -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\delta\beta}{\delta x} - \frac{\delta\gamma}{\delta y}\right),$$

où α, β, γ, sont trois fonctions d' x, y, z. Il en résulte que l'équation précédente demeure exacte si l'on y substitue à p, q, r, les seules composantes du flux de déplacement, et qu'elle peut s'écrire

$$\frac{\delta}{\delta t}\left(\frac{\delta f}{\delta x} + \frac{\delta g}{\delta y} + \frac{\delta h}{\delta z}\right) + \frac{\delta e}{\delta t} = 0$$

(*) J. Clerk Maxwell, Scientific Papers, vol. I, p. 496.

ou bien, en vertu des égalités (43[bis]),

$$(51) \qquad \frac{\delta}{\delta t}\left[\frac{\delta}{\delta x}\frac{P}{4\pi E^2} + \frac{\delta}{\delta y}\frac{Q}{4\pi E^2} + \frac{\delta}{\delta z}\frac{R}{4\pi E^2}\right] + \frac{\delta e}{\delta t} = 0$$

et, dans le cas d'un milieu homogène,

$$(52) \qquad \frac{1}{4\pi E^2}\frac{\delta}{\delta t}\left(\frac{\delta P}{\delta x} + \frac{\delta Q}{\delta y} + \frac{\delta R}{\delta z}\right) + \frac{\delta e}{\delta t} = 0.$$

Jusqu'à ce point du raisonnement, on pourrait douter si **Maxwell** désigne simplement par e la densité de la distribution électrique fictive équivalente à la polarisation diélectrique, ou bien s'il y comprend quelque électrisation réelle communiquée au milieu; un membre de phrase résout la question : « Lorsqu'il n'y a pas de forces électromotrices, dit-il (*), on a

$$e = 0. \text{ »}$$

Il est donc clair que e a le même sens que dans le mémoire : *A dynamical Theory of the electromagnetic Field;* en outre, des équations (51) et (52), il est permis de tirer les équations

$$(53) \qquad \frac{\delta}{\delta x}\frac{P}{4\pi E^2} + \frac{\delta}{\delta y}\frac{Q}{4\pi E^2} + \frac{\delta}{\delta z}\frac{R}{4\pi E^2} + e = 0,$$

$$(54) \qquad \frac{1}{4\pi E^2}\left(\frac{\delta P}{\delta x} + \frac{\delta Q}{\delta y} + \frac{\delta R}{\delta z}\right) + e = 0,$$

identiques, à la notation près, aux équations (49) et (50).

Indiquons en passant qu'au lieu d'écrire l'équation (54), **Maxwell**, par suite de la faute de signe qui affecte les égalités (43), écrit (**)

$$(54^{bis}) \qquad \frac{1}{4\pi E^2}\left(\frac{\delta P}{\delta x} + \frac{\delta Q}{\delta y} + \frac{\delta R}{\delta z}\right) = e.$$

(*) J. Clerk **Maxwell**, Scientific Papers, vol. I, p. 497.
(**) Ibid., vol. I, p. 497, égalité (115).

§ 4. *La deuxième électrostatique de Maxwell est illusoire*

Les diverses égalités que nous venons d'écrire sont générales; dans le cas où l'équilibre est établi sur le système, P, Q, R sont liés à la fonction Ψ par les égalités (44), qui donnent

$$(55)\quad \begin{cases} f = -\dfrac{1}{4\pi E^2}\dfrac{\delta\Psi}{\delta x}, \quad g = -\dfrac{1}{4\pi E^2}\dfrac{\delta\Psi}{\delta y}, \quad h = -\dfrac{1}{4\pi E^2}\dfrac{\delta\Psi}{\delta z}, \\ \text{ou} \\ f = -\dfrac{1}{K}\dfrac{\delta\Psi}{\delta x}, \quad g = -\dfrac{1}{K}\dfrac{\delta\Psi}{\delta y}, \quad h = -\dfrac{1}{K}\dfrac{\delta\Psi}{\delta z}. \end{cases}$$

Moyennant les égalités (44), les égalités (53) et (49) deviennent

$$(56)\quad \begin{cases} \dfrac{\delta}{\delta x}\left(\dfrac{1}{4\pi E^2}\dfrac{\delta\Psi}{\delta x}\right) + \dfrac{\delta}{\delta y}\left(\dfrac{1}{4\pi E^2}\dfrac{\delta\Psi}{\delta y}\right) + \dfrac{\delta}{\delta z}\left(\dfrac{1}{4\pi E^2}\dfrac{\delta\Psi}{\delta z}\right) - e = 0, \\ \dfrac{\delta}{\delta x}\left(\dfrac{1}{K}\dfrac{\delta\Psi}{\delta x}\right) + \dfrac{\delta}{\delta y}\left(\dfrac{1}{K}\dfrac{\delta\Psi}{\delta y}\right) + \dfrac{\delta}{\delta z}\left(\dfrac{1}{K}\dfrac{\delta\Psi}{\delta z}\right) - e = 0. \end{cases}$$

Les égalités (54) et (50) deviennent

$$(57)\qquad \frac{1}{4\pi E^2}\Delta\Psi - e = 0, \qquad \frac{1}{K}\Delta\Psi - e = 0.$$

Enfin, l'égalité (48) devient la seconde des égalités

$$(58)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{4\pi E_1^2}\dfrac{\delta\Psi}{\delta N_1} + \dfrac{1}{4\pi E_2^2}\dfrac{\delta\Psi}{\delta N_2} - E = 0, \\ \dfrac{1}{K_1}\dfrac{\delta\Psi}{\delta N_1} + \dfrac{1}{K_2}\dfrac{\delta\Psi}{\delta N_2} - E = 0. \end{cases}$$

Si la fonction Ψ était connue, les relations (55) détermineraient les composantes du déplacement en chaque point du milieu diélectrique. Mais comment sera déterminée la fonction Ψ? Par elles-mêmes, les égalités (56), (57) et (58) ne nous apprennent rien de plus, au sujet de cette fonction, que les égalités (55), dont elles

découlent. Il en serait autrement si quelque théorie, indépendante de celle qui nous fournit les équations (55), nous permettait d'exprimer e, E au moyen des dérivées partielles de Ψ, par des relations irréductibles aux relations (56), (57) et (58); alors, en éliminant e, E entre les relations (56), (57), (58) et ces nouvelles relations, on obtiendrait des conditions auxquelles les dérivées partielles de la fonction Ψ seraient soumises, soit en tout point du milieu diélectrique, soit à la surface de séparation de deux diélectriques différents.

C'est par cette méthode que se développe la théorie de l'aimantation par influence donnée par Poisson, la théorie de la polarisation des diélectriques conçue, à l'imitation de la précédente, par Mossotti.

Lorsqu'en cette dernière théorie, on a posé les équations de la polarisation sous la forme [Chapitre I, égalités (19)]

$$A = -\epsilon F \frac{\partial}{\partial x}(V + \overline{V}),$$

$$B = -\epsilon F \frac{\partial}{\partial y}(V + \overline{V}),$$

$$C = -\epsilon F \frac{\partial}{\partial z}(V + \overline{V}),$$

on en tire, en tout point d'un milieu continu, la relation [Chapitre I, égalité (20)]

$$(59) \quad \epsilon\frac{\partial}{\partial x}\left[F\frac{\partial(V+\overline{V})}{\partial x}\right] + \epsilon\frac{\partial}{\partial y}\left[F\frac{\partial(V+\overline{V})}{\partial y}\right] + \epsilon\frac{\partial}{\partial z}\left[F\frac{\partial(V+\overline{V})}{\partial z}\right] - e = 0,$$

analogue à nos égalités (56), et, à la surface de séparation de deux milieux diélectriques, la relation [Chapitre I, égalité (21)]

$$(60) \qquad \epsilon F_1 \frac{\partial(V+\overline{V})}{\partial N_1} + \epsilon F_2 \frac{\partial(V+\overline{V})}{\partial N_2} - E = 0,$$

analogue à nos relations (58). Mais là ne s'arrête pas la solution. La fonction $(V + \overline{V})$ qui figure dans ces formules n'est pas simple-

ment une fonction uniforme et continue de x, y, z; c'est une fonction dont l'expression analytique est donnée d'une manière très précise lorsqu'on connaît la distribution électrique, réelle ou fictive; et de cette expression analytique découlent, en vertu des théorèmes de Poisson, deux relations indépendantes des précédentes; l'une [Chapitre I, égalité (15)], vérifiée en tout point d'un diélectrique continu, polarisé mais non électrisé,

$$(61) \qquad \Delta (V + \overline{V}) = - 4\pi e;$$

l'autre [Chapitre I, égalité (16)], vérifiée à la surface de séparation de deux tels diélectriques,

$$(62) \qquad \frac{\partial (V + \overline{V})}{\partial N_1} + \frac{\partial (V + \overline{V})}{\partial N_2} = - 4\pi E.$$

Si alors nous comparons, d'une part, les égalités (59), (61), d'autre part, les égalités (60) et (62), nous trouvons que les dérivées partielles de la fonction $(V + \overline{V})$ doivent vérifier, en tout point d'un diélectrique continu, la relation.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[(1 + 4\pi e F)\frac{\partial (V + \overline{V})}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[(1 + 4\pi \epsilon F)\frac{\partial (V + \overline{V})}{\partial y}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[(1 + 4\pi \epsilon F)\frac{\partial (V + \overline{V})}{\partial z}\right] = 0$$

et, à la surface de séparation de deux milieux diélectriques, la relation

$$(1 + 4\pi \epsilon F_1)\frac{\partial (V + \overline{V})}{\partial N_1} + (1 + 4\pi \epsilon F_2)\frac{\partial (V + \overline{V})}{\partial N_2} = 0.$$

Ce sont précisément ces équations aux dérivées partielles qui serviront à déterminer la fonction $(V + \overline{V})$ et, par suite, l'état de polarisation des diélectriques.

Les mêmes circonstances se rencontrent d'ailleurs dans tous les problèmes analogues que fournit la physique mathématique. Prenons, par exemple, le problème de la conductibilité de la

chaleur dans un milieu isotrope. Des hypothèses de Fourier découlent, en désignant par j, J, l'intensité solide ou superficielle des sources de chaleur, l'équation [Chapitre II, équation (34)]

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right)+j=0,$$

vérifiée en tout point d'un milieu continu, et l'équation [Chapitre II, équation (35)]

$$k_1\frac{\partial T}{\partial N_1}+k_2\frac{\partial T}{\partial N_2}+J=0,$$

vérifiée à la surface de séparation de deux milieux.

Mais le problème qui consiste à déterminer la distribution de la chaleur sur le système n'est pas mis en équation tant que des hypothèses nouvelles n'ont pas relié les intensités j, J à la température T. Pour pousser plus loin, il nous faudra supposer, par exemple, que le milieu ne contient d'autre source de chaleur ou de froid que sa propre capacité calorifique, ce qui reviendra à écrire

$$j=-\rho\gamma\frac{\partial T}{\partial t},\qquad J=0,$$

ρ étant la densité du corps et γ sa chaleur spécifique. Les équations précédentes deviendront alors, pour la fonction T, les équations aux dérivées partielles

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right)-\rho\gamma\frac{\partial T}{\partial t}=0,$$

$$k_1\frac{\partial T}{\partial N_1}+k_2\frac{\partial T}{\partial N_2}=0,$$

qui serviront à déterminer la distribution de la température sur le système.

Rien d'analogue dans l'électrostatique de Maxwell. De la fonction Ψ, qui figure dans les équations (56), (57), (58), il ne sait rien

en dehors de ces équations, si ce n'est qu'elle est uniforme et continue; il n'a le droit d'écrire, au sujet de cette fonction, aucune égalité qui ne soit une conséquence de celles qui sont déjà données, et, de fait, il n'en écrit aucune qu'il ne prétende tirer de celles-là; il ne possède donc aucun moyen d'éliminer e, E et d'obtenir une équation qui puisse servir à déterminer cette fonction Ψ.

Il faut donc reconnaître que *la deuxième électrostatique de Maxwell n'aboutit pas même à mettre en équations le problème de la polarisation d'un milieu diélectrique donné.*

§ 5. *Détermination de l'énergie électrostatique*

Néanmoins, Maxwell s'efforce de tirer quelques conclusions de ce problème incomplètement posé; c'est, il faut bien le reconnaître, dans cet essai de constitution d'une électrostatique que son imagination, insoucieuse de toute logique, se donne le plus librement carrière.

Le premier problème traité est la formation de l'*énergie électrostatique* ou du potentiel des actions qui s'exercent en un diélectrique polarisé.

Dans son mémoire : *On physical Lines of Force*, Maxwell admet purement et simplement (*) que cette énergie a pour valeur

$$(63)\qquad U = -\frac{1}{2}\int (Pf + Qg + Rh)\, d\omega.$$

Invoquant alors les formules (43) et (44), il trouve que U se peut mettre sous la forme

$$(64)\qquad U = \frac{1}{2}\int \frac{1}{4\pi E^2}\left[\left(\frac{\delta\Psi}{\delta x}\right)^2 + \left(\frac{\delta\Psi}{\delta y}\right)^2 + \left(\frac{\delta\Psi}{\delta z}\right)^2\right] d\omega.$$

Les formules (43) sont affectées d'une faute de signe; si l'on faisait usage des formules correctes (43bis), on trouverait

$$(64^{bis})\qquad U = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{4\pi E^2}\left[\left(\frac{\delta\Psi}{\delta x}\right)^2 + \left(\frac{\delta\Psi}{\delta y}\right)^2 + \left(\frac{\delta\Psi}{\delta z}\right)^2\right] d\omega.$$

(*) J. Clerk Maxwell, Scientific Papers, vol. I, p. 497.

Cette formule (64) peut se transformer au moyen d'une intégration par parties ; comme Maxwell rejette l'existence de surfaces de discontinuité (*), elle peut se mettre sous la forme

$$(65) \qquad U = -\frac{1}{2}\int \Psi \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{4\pi E^2}\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{4\pi E^2}\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{4\pi E^2}\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right)\right] d\omega$$

De là, au moyen des égalités (44) et de l'égalité (54bis), affectée d'une faute de signe semblable à celle qui affecte les équations (43), Maxwell tire l'égalité

$$(66) \qquad U = \frac{1}{2}\int \Psi e\, d\omega.$$

On y parviendrait également si, à l'égalité correcte (64bis), on appliquait la relation correcte (53).

Maxwell parvient ainsi à une expression de l'énergie électrostatique semblable de forme à l'expression (39) qu'il a admise en sa première théorie. Mais, chemin faisant, il a rencontré l'égalité (64) qui, une fois corrigée la faute de signe essentielle qui affecte les équations du mémoire : *On physical Lines of Force*, prend la forme (64bis).

Or, cette égalité (64bis) conduit à un résultat inquiétant.

L'énergie électrostatique du système, nulle en un système dépolarisé, serait négative en un système polarisé ; elle diminuerait du fait de la polarisation ; un ensemble de diélectriques à l'état neutre serait dans un état instable ; aussitôt cet état troublé, il irait se polarisant avec une intensité toujours croissante.

Lorsque Maxwell composa son Mémoire : *A dynamical Theory of the electromagnetic Field,* il reprit les équations données dans le Mémoire précédent, mais après les avoir débarrassées des fautes de signe qui les altéraient. Dès lors, la conséquence que nous venons de signaler a pu lui apparaître. Est-ce là la raison

(*) Dans ce passage, Maxwell raisonne toujours comme si E^2 avait la même valeur dans tout l'espace ; mais on peut aisément libérer ses raisonnements de cette supposition.

pour laquelle il a, dans ce nouveau travail, changé l'expression de l'énergie électrostatique ? Toujours est-il qu'au lieu de conserver, pour définition de cette quantité, l'égalité (63), il définit maintenant cette grandeur par l'égalité (*)

$$U = \frac{1}{2} \int (Pf + Qg + Rh)\, d\omega. \tag{67}$$

A la vérité, cette égalité n'est point donnée ici comme une définition ou un postulat, mais découle d'un raisonnement que nous allons reproduire :

„ De l'énergie peut être créée dans le champ magnétique de diverses manières, notamment par l'action d'une force électromotrice qui produit un déplacement électrique. Le travail produit par une force électromotrice variable P qui produit un déplacement variable f, s'obtient en formant la valeur de l'intégrale

$$\int P\, df$$

depuis

$$P = 0$$

jusqu'à la valeur donnée de P.

Comme l'on a

$$P = Kf,$$

cette quantité devient

$$\int Kf\, df = \frac{1}{2} Kf^2 = \frac{1}{2} Pf.$$

Dès lors, l'énergie intrinsèque qui existe dans une partie quelconque du champ, sous forme de déplacement électrique, a pour valeur :

$$\frac{1}{2} \int (Pf + Qg + Rh)\, d\omega. \text{ „}$$

Il nous semble que ce raisonnement devrait bien plutôt justifier la conclusion opposée et obliger Maxwell à conserver l'expression

(*) J. Clerk Maxwell, Scientific Papers, vol. I, p. 563.

de l'énergie électrique, donnée par l'égalité (63), qu'il avait adoptée tout d'abord.

Il paraît assez clairement que, dans le raisonnement qui précède, P, Q, R doivent être regardés comme les composantes d'une force électromotrice *intérieure* au système, et non comme les composantes d'une force électromotrice *extérieure* engendrée dans le système par des corps qui lui sont étrangers.

En effet, on peut remarquer, en premier lieu, que Maxwell ne décompose jamais l'ensemble des corps qu'il étudie en deux groupes, dont l'un est regardé comme arbitrairement donné, tandis que l'autre, soumis à l'action du premier, éprouve des modifications que le physicien analyse. Il semble bien plutôt que ses calculs s'appliquent à tout l'univers, assimilé à un système isolé, en sorte que toutes les actions qu'il considère sont des actions intérieures.

En second lieu, si, dans le raisonnement précédent, P, Q, R désignaient les composantes d'une force électromotrice extérieure, Maxwell aurait dû leur adjoindre les composantes de la force électromotrice intérieure qui naît du fait même de la polarisation du milieu diélectrique; l'omission de cette dernière force rendrait son calcul fautif.

On doit donc penser que le travail évalué par Maxwell est pour lui un *travail interne;* mais alors ce travail équivaut à une *diminution* et non à un accroissement de l'énergie interne, en sorte que la conclusion de Maxwell doit être renversée.

Maxwell la conserve cependant et, dans un champ où l'équilibre est établi, où l'on a, par conséquent,

$$(44) \qquad P = -\frac{\delta\Psi}{\delta x}, \qquad Q = -\frac{\delta\Psi}{\delta y}, \qquad R = -\frac{\delta\Psi}{\delta z},$$

il écrit (*) l'équation (67) sous la forme

$$U = -\frac{1}{2}\int\left(\frac{\delta\Psi}{\delta x}f + \frac{\delta\Psi}{\delta y}g + \frac{\delta\Psi}{\delta z}h\right)d\omega$$

(*) J. Clerk Maxwell, Scientific Papers, vol. I, p. 568.

qu'une intégration par parties transforme en

$$U = \frac{1}{2}\int \Psi \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}\right) d\omega$$

ou bien, en vertu de l'égalité (46),

$$U = -\frac{1}{2}\int \Psi e \, d\omega. \tag{68}$$

§ 6. *Des forces qui s'exercent entre deux petits corps électrisés*

De l'expression de l'énergie électrostatique, Maxwell va chercher à déduire les lois des forces pondéromotrices qui s'exercent en un système électrisé.

Étudions d'abord cette solution dans le Mémoire : *On physical Lines of Force* (*).

Le point de départ est l'expression de l'énergie électrostatique donnée par la formule (66).

Maxwell qui, dans le Mémoire en question, ne considère jamais de surface de discontinuité, n'y a fait figurer aucune électrisation superficielle ; néanmoins, pour éviter certaines objections qui pourraient être faites aux considérations suivantes, il sera bon de tenir compte d'une telle électrisation et de mettre l'énergie électrostatique sous la forme

$$U = \frac{1}{2}\int \Psi e \, d\omega + \frac{1}{2}\int \Psi E \, dS, \tag{69}$$

la seconde intégrale s'étendant aux surfaces électrisées.

Imaginons que l'espace entier soit rempli par un diélectrique homogène ; E^2 aura en tout point la même valeur (**).

(*) J. Clerk Maxwell, Scientific Papers, vol. I, p. 497 et p. 498.

(**) Le lecteur évitera sans peine toute confusion entre le coefficient E^2 et la densité superficielle E.

La densité électrique solide sera donnée par l'égalité

$$(57) \qquad \frac{1}{4\pi E^2}\Delta\Psi - e = 0,$$

que Maxwell devrait écrire, par suite de la faute de signe qui affecte les égalités (43),

$$(57^{bis}) \qquad \frac{1}{4\pi E^2}\Delta\Psi + e = 0.$$

D'autre part, en un point d'une surface de discontinuité où la normale a les deux directions N_i, N_e, la densité superficielle aura, d'après la première égalité (58), la valeur donnée par l'égalité

$$(70) \qquad \frac{1}{4\pi E^2}\left(\frac{\delta\Psi}{\delta N_i} + \frac{\delta\Psi}{\delta N_e}\right) - E = 0,$$

que Maxwell devrait écrire

$$(70^{bis}) \qquad \frac{1}{4\pi E^2}\left(\frac{\delta\Psi}{\delta N_i} + \frac{\delta\Psi}{\delta N_e}\right) + E = 0.$$

Une surface de discontinuité S_1 est supposée séparer de l'ensemble du milieu diélectrique une portion 1 que l'on regardera comme susceptible de se mouvoir dans ce milieu, à la façon d'un solide dans un fluide. La fonction Ψ, que l'on désignera par Ψ_1, sera supposée harmonique dans tout l'espace, sauf en la région 1 ; en cette région, existera une densité solide e_1 ; la surface S_1 pourra porter, en outre, la densité superficielle E_1. L'énergie électrostatique du système sera

$$U_1 = \frac{1}{2}\int \Psi_1 e_1\, d\omega_1 + \frac{1}{2}\int \Psi_1 E_1\, dS_1.$$

Si le corps 1 se déplace en entraînant sa polarisation, U_1 restera invariable.

Par une surface S_2, isolons de même une autre partie 2 du diélectrique. Soit Ψ_2 une fonction harmonique en dehors de la région 2 ; elle correspond à une densité solide e_2 en tout point de la

région 2 et à une densité solide E_2 en tout point de la surface S_2 ; si cette électrisation existait seule dans le milieu, l'énergie électrostatique serait

$$U_2 = \frac{1}{2}\int \Psi_2 e_2\, d\omega_2 + \frac{1}{2}\int \Psi_2 E_2\, dS_2.$$

Imaginons maintenant que ces deux corps électrisés existent simultanément dans le milieu diélectrique, et que la fonction Ψ ait pour valeur $(\Psi_1 + \Psi_2)$; l'électrisation de chacun des deux corps sera la même que s'il existait seul; quant à l'énergie électrostatique du système, elle sera visiblement, d'après l'égalité (69).

$$U = \frac{1}{2}\int (\Psi_1 + \Psi_2)\, e_1\, d\omega_1 + \frac{1}{2}\int (\Psi_1 + \Psi_2)\, E_1\, dS_1$$
$$+ \frac{1}{2}\int (\Psi_1 + \Psi_2)\, e_2\, d\omega_2 + \frac{1}{2}\int (\Psi_1 + \Psi_2)\, E_2\, dS_2$$

ou bien

$$(71) \qquad U = U_1 + U_2 + \frac{1}{2}\int \Psi_2 e_1\, d\omega_1 + \frac{1}{2}\int \Psi_2 E_1\, dS_1$$
$$+ \frac{1}{2}\int \Psi_1 e_2\, d\omega_2 + \frac{1}{2}\int \Psi_1 E_2\, dS_2.$$

Mais le théorème de Green donne sans peine l'égalité

$$\int \Psi_1 \Delta \Psi_2\, d\omega_2 + \int \Psi_1 \left(\frac{\delta \Psi_2}{\delta N_{2i}} + \frac{\delta \Psi_2}{\delta N_2}\right) dS_2$$
$$= \int \Psi_2 \Delta \Psi_1\, d\omega_1 + \int \Psi_2 \left(\frac{\delta \Psi_1}{\delta N_{1i}} + \frac{\delta \Psi_1}{\delta N_{1e}}\right) dS_1.$$

Soit que l'on fasse usage des équations (57) et (70), soit que l'on fasse usage des équations (57bis) et (70bis), cette égalité peut s'écrire

$$\int \Psi_1 e_2\, d\omega_2 + \int \Psi_1 E_2\, dS_2 = \int \Psi_2 e_1\, d\omega_1 + \int \Psi_2 E_1\, dS_1$$

et transforme l'égalité (71) en

(72) $$U = U_1 + U_2 + \int \Psi_2 e_1 \, d\omega_1 + \int \Psi_2 E_1 \, dS_1.$$

Laissant immobile le corps 2, déplaçons le corps 1 ; U_1, U_2 demeurent invariables et U éprouve un accroissement

(73) $$\delta U = \delta \int \Psi_2 e_1 \, d\omega_1 + \delta \int \Psi_2 E_1 \, dS_1.$$

Maxwell remarque que δU représente le travail qu'il faudrait effectuer pour mouvoir le corps 1 ou, en d'autres termes, le *travail résistant* engendré par les actions du corps 2 sur le corps 1; le travail *effectué* par ces actions est donc

$$-\delta U = -\delta \int \Psi_2 e_1 \, d\omega_1 - \delta \int \Psi_2 E_1 \, dS_1.$$

Supposons que le corps 1 soit un corps très petit et que δx_1, δy_1 δz_1, soient les composantes du déplacement de ce corps; désignons par

(74) $$q_1 = \int e_1 \, d\omega_1 + \int E_1 \, \delta S_1$$

sa charge électrique totale; nous aurons

$$-\delta U = -q_1 \left(\frac{\delta \Psi_2}{\delta x_1} \delta x_1 + \frac{\delta \Psi_2}{\delta y_1} \delta y_1 + \frac{\delta \Psi_2}{\delta z_1} \delta z_1 \right).$$

Le corps 2 exerce donc sur le petit corps 1 une force dont les composantes sont

(75) $$\left\{ \begin{aligned} X_{21} &= -q_1 \frac{\delta \Psi_2}{\delta x_1} = q_1 P_2, \\ Y_{21} &= -q_1 \frac{\delta \Psi_2}{\delta y_1} = q_1 Q_2, \\ Z_{21} &= -q_1 \frac{\delta \Psi_2}{\delta z_1} = q_1 R_2. \end{aligned} \right.$$

En vertu des égalités (57bis) et (70bis), on peut écrire

$$\Psi_2 = \int \frac{E^2 e_2}{r} d\omega_2 + \int \frac{E^2 E_2}{r} dS_2$$
$$= E^2 \int \frac{e_2}{r} d\omega_2 + E^2 \int \frac{E_2}{r} dS_2.$$

Si le corps 2 est très petit, et si l'on désigne par

(74bis) $$q_2 = \int e_2 d\omega_2 + \int E_2 dS_2$$

sa charge électrique totale, on aura, au point (x_1, y_1, z_1).

(76) $$\Psi_2 = E^2 \frac{q_2}{r}.$$

Les égalités (75) deviendront alors

(77) $$\begin{cases} X_{21} = E^2 \dfrac{q_1 q_2}{r^2} \dfrac{\partial r}{\partial x_1}, \\ Y_{21} = E^2 \dfrac{q_1 q_2}{r^2} \dfrac{\partial r}{\partial y_1}, \\ Z_{21} = E^2 \dfrac{q_1 q_2}{r^2} \dfrac{\partial r}{\partial z_1}. \end{cases}$$

Elles nous enseignent que le corps 2 exerce sur le corps 1 une force ***répulsive***

(78) $$F = E^2 \frac{q_1 q_2}{r^2}.$$

Mais ce résultat est obtenu au moyen des égalités (57bis) et (70bis), qui sont affectées d'une faute de signe (*); si l'on faisait usage des

(*) En fait, Maxwell écrit non pas l'équation (57bis), mais l'équation (57) [*loc. cit.*, égalité (123)]; mais ensuite, il admet l'expression (76) de Ψ_2 comme s'il avait écrit l'équation (57bis).

égalités (57) et (70), où cette faute de signe est corrigée, on trouverait que l'égalité (76) devrait être remplacée par l'égalité

$$(76^{bis}) \qquad \Psi_2 = -E^2 \frac{q_2}{r}$$

et le corps 2 exercerait sur le corps 1 une force *attractive*

$$(78^{bis}) \qquad A = E^2 \frac{q_1 q_2}{r^2}.$$

Cette conséquence, qui eût assurément étonné Maxwell, ne se retrouvera pas dans le mémoire : *A dynamical Theory of the electromagnetic Field,* grâce au changement de signe qu'a subi l'expression de l'énergie électrostatique.

Dans ce mémoire (*), Maxwell traite très succinctement des actions mutuelles des corps électrisés en renvoyant le lecteur désireux de suivre les détails du raisonnement, à la théorie des forces magnétiques qu'il vient de donner.

Ce raisonnement est, d'ailleurs, conduit exactement suivant la marche que nous venons d'exposer; seulement, au lieu de prendre pour point de départ l'expression (66) de l'énergie électrostatique, il prend pour point de départ l'expression (68) de cette énergie ou mieux l'expression

$$(79) \qquad U = -\frac{1}{2}\int \Psi e \, d\omega - \frac{1}{2}\int \Psi E \, dS.$$

De ce changement de signe de l'énergie électrostatique, résulte le remplacement des égalités (75) par les égalités

$$(80) \qquad \begin{cases} X_{21} = q_1 \dfrac{\delta \Psi_2}{\delta x_1} = -q_1 P_2, \\ Y_{21} = q_1 \dfrac{\delta \Psi_2}{\delta y_1} = -q_1 Q_2, \\ Z_{21} = q_1 \dfrac{\delta \Psi_2}{\delta z_1} = -q_1 R_2. \end{cases}$$

(*) J. Clerk Maxwell, Scientific Papers, vol. I, pp. 566 à 568.

Selon ces équations, le *champ pondéromoteur* créé par le corps 2 au point (x, y, z) aurait pour composantes $-P_2$, $-Q_2$, $-R_2$, tandis que le *champ électromoteur* créé par le même corps, au même point, aurait pour composantes P_2, Q_2, R_2; ces deux champs seraient donc égaux, mais *de sens contraires*. Maxwell, qui a écrit (*) les égalités (80), ne s'arrête pas à cette conclusion paradoxale. Remplaçant (**) Ψ_2 par l'expression

$$\Psi_2 = -\frac{K}{4\pi}\frac{q_2}{r}, \tag{81}$$

analogue à l'égalité (76), il trouve les égalités

$$\left\{\begin{aligned} X_{21} &= \frac{K}{4\pi}\frac{q_1 q_2}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x_1}, \\ Y_{21} &= \frac{K}{4\pi}\frac{q_1 q_2}{r^2}\frac{\partial r}{\partial y_1}, \\ Z_{21} &= \frac{K}{4\pi}\frac{q_1 q_2}{r^2}\frac{\partial r}{\partial z_1}, \end{aligned}\right. \tag{82}$$

$$F = \frac{K}{4\pi}\frac{q_1 q_2}{r^2}, \tag{83}$$

analogues aux égalités (77) et (78).

Maxwell parvient ainsi à une loi analogue à la loi de Coulomb, mais à la condition de faire l'hypothèse assez étrange et singulièrement particulière que les corps électrisés ont même pouvoir diélectrique que le milieu qui les sépare.

En outre, cette conclusion n'est obtenue, dans le mémoire : *On physical Lines of Force,* qu'à la faveur d'une faute matérielle de signe et, dans le mémoire : *A dynamical Theory of the electromagnetic Field,* elle est déduite d'une expression de l'énergie électrostatique dont, visiblement, le signe est erroné.

(*) *Loc. cit.*, p. 568, égalités (D).

(**) En réalité, Maxwell écrit

$$\Psi_2 = \frac{K}{4\pi}\frac{q_2}{r},$$

[*loc. cit.*, égalité (43)]; mais cette faute de signe est compensée par une faute de signe dans l'égalité (44).

§ 7. *De la capacité d'un condensateur*

Un autre problème d'électrostatique préoccupe Maxwell dans les deux mémoires que nous analysons en ce Chapitre : c'est le calcul de la capacité d'un condensateur.

Suivons, tout d'abord, la solution de ce problème donnée (*) dans le mémoire : *On physical Lines of Force.*

Imaginons une lame diélectrique plane, d'épaisseur θ, placée entre deux lames conductrices 1 et 2; Maxwell admet que la fonction Ψ prend, à l'intérieur de la lame conductrice 1 la valeur invariable Ψ_1, à l'intérieur de la lame conductrice 2 la valeur invariable Ψ_2; il sous-entend que, dans le diélectrique, Ψ est fonction linéaire de la distance à l'une des armatures.

Pour calculer la distribution électrique sur un tel système, Maxwell fait usage, aussi bien pour les conducteurs que pour les diélectriques, de l'équation (54bis); il y faudrait joindre, pour rendre son raisonnement rigoureux, l'équation analogue relative à l'électrisation superficielle des surfaces de discontinuité. Il en déduit que l'électrisation est localisée aux surfaces de séparation des armatures et du diélectrique; à la surface de séparation de l'armature 1 et du diélectrique, la densité superficielle sera

$$E = -\frac{1}{4\pi E^2}\frac{\delta\Psi}{\delta N_i}, \tag{84}$$

N_i étant la normale vers l'intérieur du diélectrique.

D'ailleurs

$$\frac{\delta\Psi}{\delta N_i} = \frac{\Psi_2 - \Psi_1}{\theta}.$$

Si donc S est l'aire de la surface de chaque armature en contact avec le diélectrique, l'armature 1 portera une charge

$$Q = ES = \frac{S}{4\pi E^2}\frac{\Psi_1 - \Psi_2}{\theta}. \tag{85}$$

(*) J. Clerk Maxwell, Scientific Papers, vol. I, p. 500.

L'armature 2 portera une charge égale et de signe contraire. Maxwell définit la capacité du condensateur par la formule

$$(86) \qquad C = \frac{Q}{\Psi_1 - \Psi_2}.$$

L'égalité (85) donnera alors

$$(87) \qquad C = \frac{1}{4\pi E^2} \frac{S}{\theta},$$

ce qui permettra de regarder $\frac{1}{4\pi E^2}$ comme le *pouvoir inducteur spécifique* du diélectrique.

Mais ce résultat n'a été obtenu qu'en faisant usage de l'égalité (84), entachée de la même faute de signe que l'égalité (54bis); si l'on faisait usage de l'égalité correcte

$$(84^{bis}) \qquad E = \frac{1}{4\pi E^2} \frac{\delta \Psi}{\delta N_i},$$

à laquelle conduirait la première égalité (48), on trouverait pour la *capacité du condensateur* la valeur *négative*

$$(87^{bis}) \qquad C = - \frac{1}{4\pi E^2} \frac{S}{\theta}.$$

La faute de signe qui affecte les égalités (43) et, par là, tant d'égalités du mémoire : *On physical Lines of Force*, a disparu dans le mémoire : *A dynamical Theory of electromagnetic Field;* la théorie du condensateur que renferme ce mémoire (*) va-t-elle donc conduire à ce résultat paradoxal qu'un condensateur a une capacité négative? Plutôt que de se laisser acculer à cette extrémité, Maxwell commettra ici une nouvelle faute de signe, la

(*) J. Clerk Maxwell, Scientific Papers, vol. I, p. 572.

même que dans le mémoire : *On physical Lines of Force,* et il écrira (*)

$$\frac{\delta\Psi}{\delta x} = \mathrm{K}f,$$

alors que quelques pages auparavant, il a écrit (**)

$$\mathrm{P} = \mathrm{K}f$$

et aussi (***)

$$\mathrm{P} = -\frac{\delta\Psi}{\delta x}.$$

(*) *Loc. cit.*, p. 572, égalité (48).
(**) *Loc. cit.*, p. 560, égalités (E).
(***) *Loc. cit.*, p. 568.

CHAPITRE IV

La troisième électrostatique de Maxwell

§ 1. *Différence essentielle entre la deuxième et la troisième électrostatiques de Maxwell*

Les fautes de signe que nous venons de signaler peuvent seules cacher la contradiction inévitable à laquelle se heurte la théorie du condensateur donnée en la seconde électrostatique de Maxwell.

En cette électrostatique, on fait entrer en ligne de compte la densité électrique e; cette densité provient de ce que l'électrisation de quelque corpuscule polarisé, dont Maxwell admet l'existence, à l'instar de Faraday et de Mossotti, n'est pas exactement neutralisée par l'électrisation des corpuscules voisins; cette densité est l'analogue de la densité fictive que Poisson nous a appris à substituer à l'aimantation d'un morceau de fer. En aucun cas, il n'est question d'une densité électrique autre que celle-là; en aucun cas, Maxwell ne tient compte d'une électrisation non réductible à la polarisation des diélectriques, d'une électrisation propre des corps conducteurs. Quoi de plus net, par exemple, que le passage suivant (*), que nous lisons dans le mémoire : *A dynamical Theory of the electromagnetic Field ?*

« *Quantité d'électricité* »

« Si e représente la quantité d'électricité positive libre contenue dans l'unité de volume du champ, c'est-à-dire s'il arrive que les électrisations des diverses parties du champ ne se neutralisent pas

(*) J. Clerk Maxwell, Scientific Papers, vol. I, p. 561.

les unes les autres, nous pouvons écrire l'*équation de l'électricité libre* :

$$e + \frac{\delta f}{\delta x} + \frac{\delta g}{\delta y} + \frac{\delta h}{\delta z} = 0. „$$

Admettant ce principe essentiel des théories de Maxwell, reprenons l'étude d'un condensateur plan formé par deux lames conductrices 1 et 2, que sépare un diélectrique.

Supposons que la face interne de la lame 1 soit électrisée positivement et la face interne de la lame 2 négativement; au sein de la lame diélectrique, le champ électromoteur est dirigé de la lame 1 vers la lame 2.

Si, selon la faute de signe commise par Maxwell dans son mémoire : *On physical Lines of Force* et reproduite dans la partie du mémoire : *A dynamical Theory of the electromagnetic Field* où est examinée la théorie du condensateur, nous supposions le déplacement dirigé en sens contraire du champ électromoteur, le déplacement serait, au sein de la lame diélectrique, dirigé du conducteur 2 vers le conducteur 1.

Mais, sauf à l'endroit que nous venons de signaler, Maxwell n'a jamais reproduit cette opinion dans ses écrits postérieurs au mémoire : *On physical Lines of Force.* Partout, il admet que le déplacement, proportionnel à la force électromotrice, est dirigé comme elle.

“ Nous devons admettre, écrit-il (*) en 1868, qu'au sein du diélectrique polarisé, il se produit un déplacement électrique dans la direction de la force électromotrice. „

“ Le déplacement est dans la même direction que la force, répète-t-il dans son *Traité* (**), et, numériquement, est égal à l'in-

(*) J. Clerk Maxwell, *On a Method of making a direct Comparaison of electrostatic with electromagnetic Force; with a Note on the electromagnetic Theory of Light* (Lu à la Société royale de Londres le 18 juin 1868. Philosophical Transactions, vol. CLVIII. — Scientific Papers, vol. II, p. 139).

(**) J. Clerk Maxwell, *A Treatise on Electricity and Magnetism;* Oxford, 1873, vol. I, p. 63. — *Traité d'Électricité et de Magnétisme*, traduit de l'anglais sur la 2e édition, par G. Seligmann-Lui; Paris, 1885-1887; tome I, p. 73. — Nous citerons dorénavant le Traité de Maxwell d'après la traduction française toutes les fois qu'aucune modification n'aura été apportée à la 1re édition anglaise.

tensité multipliée par $\frac{K}{4\pi}$, où K est le pouvoir inducteur spécifique du diélectrique. „

“ Dans ce Traité, dit-il plus loin (*), nous avons mesuré l'électricité statique au moyen de ce que nous avons appelé le *déplacement électrique* : c'est une grandeur dirigée ou vectorielle, que nous avons désignée par $\mathfrak{D}$, et dont les composantes ont été représentées par f, g, h. „

“ Dans les substances isotropes, le déplacement s'effectue dans le sens de la force électromotrice qui le produit, et il lui est proportionnel au moins pour les petites valeurs de cette force. C'est ce que l'on peut exprimer par l'équation :

$$\text{Équation du déplacement électrique,} \quad \mathfrak{D} = \frac{K}{4\pi}\mathfrak{E},$$

où K est la capacité diélectrique de la substance. „

Si nous désignons, avec Maxwell, par P, Q, R les composantes de la force électromotrice $\mathfrak{E}$, l'égalité symbolique précédente équivaudra aux trois égalités (**)

$$(88) \qquad f = \frac{K}{4\pi}P, \quad g = \frac{K}{4\pi}Q, \quad h = \frac{K}{4\pi}R.$$

Enfin, dans l'ouvrage dont Maxwell préparait la publication peu de temps avant sa mort, en un des Chapitres qui sont en entier de sa main, nous lisons (***) :

“ D'après la théorie adoptée dans cet ouvrage, lorsque la force électromotrice agit sur un diélectrique, elle force l'électricité à s'y déplacer, dans sa direction, d'une quantité proportionnelle à la force électromotrice et fonction de la nature du diélectrique... „

Dès lors, si une lame diélectrique est comprise entre les deux

(*) *Traité...*, vol. II, p. 287.

(**) La comparaison de ces égalités (88) avec les égalités (45) montre que la quantité $\frac{K}{4\pi}$ introduite ici par Maxwell, est celle qu'il désignait par $\frac{1}{K}$ dans son mémoire *A dynamical Theory of the electromagnetic Field.*

(***) J. Clerk Maxwell, *A elementary Treatise of Electricity*, edited by W. Garnett. — *Traité élémentaire d'Électricité*, traduit de l'anglais par Gustave Richard. Paris 1884, p. 141.

armatures d'un condensateur dont l'une est électrisée positivement et l'autre négativement, le déplacement sera, en chaque point, dirigé de l'armature positive vers l'armature négative. Maxwell admet cette loi sans hésitation:

« Lorsqu'un diélectrique est soumis à l'action d'une force électromotrice, écrit-il dans sa *Note on the electromagnetic Theory of Light* (*), il éprouve ce que l'on peut appeler la polarisation électrique. Si l'on compte comme positive la direction de la force électromotrice, et si l'on suppose que le diélectrique soit limité par deux conducteurs, A situé du côté négatif et B du côté positif, la surface du conducteur A sera chargée d'électricité positive et la surface du conducteur B d'électricité négative. »

« Puisque nous admettons que l'énergie du système ainsi électrisé réside dans le diélectrique polarisé, nous devons admettre qu'il se produit au sein du diélectrique un déplacement d'électricité dans la direction de la force électromotrice. »

« L'électrisation positive de A et l'électrisation négative de B, répète-t-il dans son grand *Traité* (**), produisent une certaine force électromotrice agissant de A vers B dans la couche diélectrique, et cette force électromotrice produit un déplacement électrique de A vers B dans le diélectrique. »

« Les déplacements, écrit-il plus tard (***), à travers deux sections quelconques d'un même tube de déplacement sont égaux. Il existe, à l'origine de chaque tube unité de déplacement, une unité d'électricité positive et une unité d'électricité négative à l'autre extrémité. »

Quel sens exact Maxwell attribue-t-il, dans ses derniers travaux, à ce mot *déplacement électrique?*

Dans le mémoire *A dynamical Theory of the electromagnetic Field,* où il introduit pour la première fois cette expression, Maxwell, nous l'avons vu, s'inspire de Mossotti. Pour Mossotti, la force électromotrice, rencontrant un des corpuscules dont se composent les corps diélectriques, chasse le fluide éthéré des parties de la surface où elle entre dans le corpuscule, pour l'accumuler

(*) J. Clerk Maxwell, Scientific Papers, vol. II, p. 139.
(**) J. Clerk Maxwell, *Traité d'Électricité et de Magnétisme,* t. I, p. 71.
(***) J. Clerk Maxwell, *Traité élémentaire d'Électricité,* p. 71.

sur les régions par où elle sort. La pensée de Maxwell, dans les deux mémoires que nous avons analysés au Chapitre précédent, s'accorde pleinement avec celle de Mossotti. En est-il de même dans ses écrits plus récents ?

On n'en saurait douter, le déplacement reste bien, pour Maxwell, un entraînement de l'électricité positive que la force électromotrice produit dans sa propre direction, entraînement qui se limite à chaque petite portion du diélectrique :

« La polarisation électrique du diélectrique (*) est un état de déformation dans lequel le corps est jeté par l'action de la force électromotrice, et qui disparaît en même temps que cette force même. Nous pouvons concevoir qu'il consiste en ce que l'on peut appeler un *déplacement électrique* produit par l'intensité électromotrice. Lorsqu'une force électromotrice agit sur un milieu conducteur, elle y produit un courant; mais si le milieu est un non conducteur ou diélectrique, le courant ne peut s'établir à travers le milieu ; l'électricité, néanmoins, est déplacée dans le milieu, dans la direction de la force électromotrice, et la grandeur de ce déplacement dépend de la grandeur de la force électromotrice. Si la force électromotrice augmente ou diminue, le déplacement électrique augmente ou diminue dans le même rapport. »

« La grandeur du déplacement a pour mesure la quantité d'électricité qui traverse l'unité de surface, pendant que le déplacement croît de zéro à sa valeur maximum. Telle est, par suite, la mesure de la polarisation électrique. »

Plus formel encore, si possible, est le passage suivant (**) : « Pour rendre plus claire notre conception du phénomène, considérons une cellule isolée appartenant à un tube d'induction émanant d'un corps électrisé positivement, et limitée par deux des surfaces équipotentielles consécutives qui enveloppent le corps. »

« Nous savons qu'il existe une force électromotrice agissant du corps électrisé vers l'extérieur; cette force produirait, si elle agissait dans un milieu conducteur, un courant électrique, qui

(*) J. Clerk Maxwell, *Traité d'Électricité et de Magnétisme*, t. I, p. 69.
(**) J. Clerk Maxwell, *Traité élémentaire d'Électricité*, p. 61.

durerait aussi longtemps que l'action de la force. Mais ce milieu étant non conducteur ou diélectrique, la force électromotrice a pour effet de produire ce que nous pourrions appeler un *déplacement électrique,* c'est-à-dire que l'électricité est repoussée vers l'extérieur, dans la direction de la force électromotrice; l'état de l'électricité est d'ailleurs, pendant ce déplacement, tel qu'elle reprend, aussitôt que la force électromotrice disparaît, la position qu'elle occupait avant le déplacement. „

L'idée que Maxwell désigne, dans ses derniers travaux, par ces mots : *déplacement électrique,* s'accorde donc avec celle qu'il désigne par les mêmes mots dans ses premiers mémoires, partant avec la conception de Mossotti, avec la théorie de l'aimantation par influence telle que l'a créée le génie de Poisson. Maxwell a soin, d'ailleurs, de signaler cet accord (*) :

“ Puisque, comme nous l'avons vu, la théorie de l'action directe à distance est, au point de vue mathématique, identique à la théorie d'une action s'exerçant par l'intermédiaire d'un milieu, les phénomènes que l'on rencontre peuvent s'expliquer par une théorie aussi bien que par l'autre... Ainsi, Mossotti a déduit la théorie mathématique des diélectriques de la théorie ordinaire de l'attraction, simplement en donnant une interprétation électrique, au lieu d'une interprétation magnétique, aux symboles dont Poisson s'est servi pour déduire la théorie de l'induction magnétique de la théorie des fluides magnétiques. Il admet qu'il existe dans le diélectrique de petits éléments conducteurs, susceptibles d'avoir leurs extrémités électrisées en sens inverse par induction, mais incapables de gagner ou de perdre une quantité quelconque d'électricité, parce qu'ils sont isolés les uns des autres par un milieu non conducteur. Cette théorie des diélectriques cadre avec les lois de l'électricité; elle peut être effectivement vraie. Si elle est vraie, le pouvoir inducteur spécifique d'un milieu peut être plus grand, mais jamais plus petit que celui de l'air ou du vide. Jusqu'à présent, on n'a pas trouvé d'exemple d'un diélectrique ayant un pouvoir inducteur plus faible que celui de l'air; si l'on en trouve un, il faudra abandonner la théorie de Mossotti, mais ses formules

(*) J. Clerk Maxwell, *Traité d'Électricité et de Magnétisme,* t. I, p. 74.

resteront toutes exactes, et nous n'aurons à y changer que le signe d'un coefficient. „

« Dans la théorie que je me propose de développer, les méthodes mathématiques sont fondées sur le plus petit nombre possible d'hypothèses; on trouve ainsi que des équations de même forme s'appliquent à des phénomènes qui sont certainement de nature bien différente : par exemple, l'induction électrique à travers les diélectriques, la conduction dans les conducteurs et l'induction magnétique. Dans tous ces cas, la relation entre la force et l'effet qu'elle produit s'exprime par une série d'équations de même espèce; de sorte que si un problème est résolu pour un de ces sujets, le problème et sa solution peuvent être traduits dans le langage des autres sujets et les résultats, sous leur nouvelle forme, seront encore vrais. „

De toutes ces citations, une conséquence semble découler logiquement, entre les composantes f, g, h, du déplacement et les densités électriques solide ou superficielle e, E, on devra établir les relations

$$e + \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} = 0, \tag{46}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{E} &+ f_1 \cos(\mathrm{N}_1, x) + g_1 \cos(\mathrm{N}_1, y) + h_1 \cos(\mathrm{N}_1, z) \\ &+ f_2 \cos(\mathrm{N}_2, x) + g_2 \cos(\mathrm{N}_2, y) + h_2 \cos(\mathrm{N}_2, z) = 0. \end{aligned} \tag{47}$$

Ces équations, en effet, s'accordent avec ce que Maxwell a dit du déplacement électrique; elles sont au nombre des formules essentielles de la théorie de Mossotti, que Maxwell déclare mathématiquement identique à la sienne; elles sont, d'ailleurs, dans cette théorie, la transposition d'équations que Poisson a introduites dans la théorie de l'induction magnétique et que Maxwell (*) conserve dans l'exposition de cette dernière théorie; enfin Maxwell les a adoptées dans ses premiers écrits.

On est encore conduit à reconnaître que les idées de Maxwell mènent logiquement aux égalités (46) et (47) en analysant ce qu'il dit des *courants de déplacement.*

(*) J. Clerk Maxwell, *Traité d'Électricité et de Magnétisme*, t. II, p. 11.

" Les variations du déplacement électrique (*) produisent évidemment des courants électriques. Mais ces courants ne peuvent exister que pendant que le déplacement varie. "

" Une des particularités les plus importantes de ce Traité (**) consiste dans cette théorie que le courant électrique vrai $\mathfrak{C}$ (u, v, w) duquel dépendent les phénomènes électromagnétiques n'est pas identique au courant de conduction $\mathfrak{K}$ (p, q, r), et que, pour évaluer le mouvement total d'électricité, on doit tenir compte de la variation dans le temps du déplacement électrique $\mathfrak{D}$, en sorte que nous devons écrire :

$$\text{Equation du courant vrai,} \quad \mathfrak{C} = \mathfrak{K} + \frac{d\mathfrak{D}}{dt}$$

ou, en fonction des composantes

$$u = p + \frac{\delta f}{\delta t},$$

$$v = q + \frac{\delta g}{\delta t},$$

$$w = r + \frac{\delta h}{\delta t}. \text{ "}$$

Ainsi, en tout point d'un diélectrique non conducteur dont l'état de polarisation varie, se produit un flux de déplacement dont les composantes sont

$$(89) \qquad p' = \frac{\delta f}{\delta t}, \quad q' = \frac{\delta g}{\delta t}, \quad r' = \frac{\delta h}{\delta t}.$$

Or " quelle que soit la nature de l'électricité(***), et quoi que nous entendions par mouvement d'électricité, le phénomène que nous avons appelé *déplacement électrique* est un mouvement d'électricité, dans le même sens que le transport d'une quantité déterminée d'électricité. "

Ou cette phrase ne veut rien dire, ou elle exige que les compo-

(*) J. Clerk Maxwell, *Traité d'Électricité et de Magnétisme*, t. I, p. 69.
(**) *Ibid.*, t. II, p. 288.
(***) *Ibid.*, t. I, p. 73.

santes p', q', r' du flux de déplacement soient liées aux densités électriques e, E par les équations de continuité

$$\frac{\delta p'}{\delta x} + \frac{\delta q'}{\delta y} + \frac{\delta r'}{\delta z} + \frac{\delta e}{\delta t} = 0,$$

$$\frac{\delta E}{\delta t} + p'_1 \cos(N_1, x) + q'_1 \cos(N_1, y) + r'_1 \cos(N_1, z)$$
$$+ p'_2 \cos(N_2, x) + q'_2 \cos(N_2, y) + r'_2 \cos(N_2, z) = 0,$$

qui pourront s'écrire, en vertu des égalités (89),

$$\frac{\delta}{\delta t}\left(\frac{\delta f}{\delta x} + \frac{\delta g}{\delta y} + \frac{\delta h}{\delta z} + e\right) = 0,$$

$$\frac{\delta}{\delta t}[E + f_1 \cos(N_1, x) + g_1 \cos(N_1, y) + h_1 \cos(N_1, z)$$
$$+ f_2 \cos(N_2, x) + g_2 \cos(N_2, y) + h_2 \cos(N_2, z)] = 0.$$

Intégrées entre un instant où le système était à l'état neutre et l'état actuel, ces équations redonnent les équations (46) et (47); le présent raisonnement est, d'ailleurs, donné par Maxwell dans son mémoire : *On physical Lines of Force.*

Examinons les conséquences de ces équations et, en particulier, de l'équation (47); appliquons-la à la surface de séparation d'un diélectrique 1 et d'un conducteur non polarisable 2; le déplacement (f_2, g_2, h_2) étant nul en ce dernier milieu, l'équation (47) se réduit à

$$(90) \quad E + f_1 \cos(N_1, x) + g_1 \cos(N_1, y) + h_1 \cos(N_1, z) = 0.$$

La surface terminale du diélectrique est électrisée négativement aux points où la direction du déplacement ou, ce qui revient au même, la direction de la force électromotrice, pénètre dans le diélectrique; elle est électrisée positivement aux points où cette même direction sort du diélectrique.

Appliquons cette proposition, qui découle si naturellement des

principes posés par Maxwell, à notre lame diélectrique comprise entre deux conducteurs chargés l'un d'électricité positive, l'autre d'électricité négative, et nous obtenons la conclusion suivante :

La face du diélectrique qui est en contact avec le conducteur électrisé positivement porte de l'électricité négative; la face qui est en contact avec le conducteur électrisé négativement porte de l'électricité positive. Il est donc impossible d'identifier la charge électrique que porte un conducteur avec la charge prise par le diélectrique contigu.

Maxwell va-t-il donc renoncer à la supposition, sous-entendue dans ses premiers écrits, que l'électrisation propre des corps conducteurs n'existe pas; que, seule, la polarisation des milieux diélectriques est un phénomène réel, produisant, par l'électrisation apparente à laquelle elle équivaut, les effets que les anciennes théories attribuent aux charges électriques répandues sur les corps conducteurs? Bien au contraire; il énonce plus nettement cette hypothèse et en affirme la légitimité :

„ On peut concevoir, dit-il (*), la relation physique qui existe entre les corps électrisés, soit comme effet de l'état dans lequel se trouve le milieu qui sépare les corps, soit comme résultat d'une action directe s'exerçant à distance entre les corps.

... Si nous calculons, dans cette hypothèse, l'énergie totale du milieu, nous la trouvons égale à l'énergie qui serait due à l'électrisation des conducteurs dans l'hypothèse d'une action directe à distance. Donc, au point de vue mathématique, les deux hypothèses sont équivalentes. „

„ A l'intérieur même du milieu (**), où l'extrémité positive de chacune des cellules se trouve au contact de l'extrémité négative de la cellule voisine, ces deux électrisations se neutralisent exactement; mais aux points où le milieu diélectrique est limité par un conducteur, l'électrisation n'est plus neutralisée et constitue l'électrisation que l'on observe à la surface du conducteur. „

„ D'après ces idées sur l'électrisation, nous devons la considérer comme une propriété du milieu diélectrique, plutôt que du conducteur entouré par ce milieu. „

(*) J. Clerk Maxwell, *Traité d'Électricité et de Magnétisme*, t. I, p. 67.
(**) J. Clerk Maxwell, *Traité élémentaire d'Électricité*, p. 63.

„ Dans le cas d'une bouteille de Leyde (*) dont l'armature intérieure est chargée positivement, une portion quelconque de verre aura sa face intérieure chargée positivement et sa face extérieure négativement. Si cette portion est tout entière à l'intérieur du verre, sa charge superficielle est entièrement neutralisée par la charge opposée des parties qu'elle touche; mais si elle est en contact avec un corps conducteur, dans lequel ne peut se maintenir l'état d'induction, la charge superficielle n'est plus neutralisée, mais constitue la charge apparente que l'on appelle généralement *charge du conducteur.* „

„ Par suite, la charge qui se trouve à la surface de séparation du conducteur et du milieu diélectrique, et que l'on appelait dans l'ancienne théorie charge du conducteur, doit être appelée, dans la théorie de l'induction, la *charge superficielle du diélectrique environnant.* „

„ D'après cette théorie, toute charge est l'effet résiduel de la polarisation du diélectrique. „

Puisque Maxwel maintient formellement cette supposition, comment fera-t-il disparaître la contradiction que nous avons signalée? Le plus simplement du monde : Dans les équations (46) et (47), qui rendent criante cette contradiction, il changera le signe de e et de E et il écrira (**)

$$e = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}, \tag{91}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{E} = \; & f_1 \cos(\mathrm{N}_1, x) + g_1 \cos(\mathrm{N}_1, y) + h_1 \cos(\mathrm{N}_1, z) \\ & + f_2 \cos(\mathrm{N}_2, x) + g_2 \cos(\mathrm{N}_2, y) + h_2 \cos(\mathrm{N}_2, z). \end{aligned} \tag{92}$$

L'égalité (90), qui fait connaître la charge superficielle d'un diélectrique au contact d'un conducteur, c'est-à-dire, dans l'hypothèse de Maxwell, la charge même du conducteur, sera alors remplacée par l'égalité

$$\mathrm{E} = f_1 \cos(\mathrm{N}_1, x) + g_1 \cos(\mathrm{N}_1, y) + h_1 \cos(\mathrm{N}_1, z). \tag{93}$$

(*) J. Clerk Maxwell, *Traité d'Électricité et de Magnétisme*, p. 175.
(**) *Ibid.*, p. 289.

La charge sera positive là où la direction du déplacement ou du champ électromoteur pénètre à l'intérieur du diélectrique, négative là où la direction du déplacement ou du champ électromoteur sort du diélectrique.

" Dans le cas d'un conducteur chargé (*), supposons la charge positive; alors si le diélectrique environnant s'étend de toutes parts autour de la surface fermée, il y aura polarisation électrique et déplacement du dedans vers le dehors sur toute l'étendue de la surface fermée; et l'intégrale du déplacement, prise sur toute la surface, est égale à la charge du conducteur renfermé dans la surface. "

Comment devront être polarisées les masses élémentaires d'un diélectrique, si l'on veut que l'électrisation en sens opposés de leurs deux extrémités s'accorde avec les égalités (91), (92), (93)?

Reprenons l'exemple d'une lame diélectrique plane placée entre deux plateaux conducteurs. On suppose qu'à l'intérieur de la lame les charges électriques opposées qui se trouvent aux deux extrémités d'une molécule sont exactement neutralisées par les charges de la molécule qui la précède et de la molécule qui la suit. Seule, l'électrisation des molécules extrêmes produit des effets appréciables.

La face du diélectrique par laquelle la force électromotrice entre dans ce milieu manifeste un état d'électrisation; il est dû à la charge que prennent, en celle de leurs extrémités par laquelle la force électromotrice les pénètre, les molécules de la première couche. La face du diélectrique par laquelle la force électromotrice sort de ce milieu manifeste aussi un état d'électrisation; il est dû à la charge que prennent, en celle de leurs extrémités par laquelle la force électromotrice les quitte, les molécules de la dernière couche. Or, d'après les propositions que Maxwell vient d'énoncer, la première électrisation est positive, la dernière négative. Donc, *lorsqu'une force électromotrice rencontre une molécule diélectrique, elle la polarise; l'extrémité de la molécule par où entre la force électromotrice se charge d'électricité* POSITIVE; *l'extrémité de la molécule par laquelle sort la force électromotrice se charge d'électricité* NÉGATIVE.

(*) J. Clerk Maxwell, *Traité d'Électricité et de Magnétisme*, t. II, p. 72.

Telle est la proposition (*), contraire à celle qu'ont admise Coulomb et Poisson dans l'étude du magnétisme, Faraday et Mossotti dans l'étude des diélectriques, contraire à l'opinion professée par lui-même en ses premiers écrits, que Maxwell énonce formellement dans ses derniers traités.

« Si nous supposons (**) le volume du diélectrique divisé en parties élémentaires, nous devons concevoir les surfaces de ces éléments comme électrisées, de telle manière que la densité superficielle en un point quelconque de la surface soit égale en grandeur au déplacement qui se produit en ce point à travers la surface, *ce déplacement compté vers l'intérieur;* c'est-à-dire que si le déplacement a lieu dans la direction positive, la surface de l'élément doit être électrisée négativement du côté positif et positivement du côté négatif. Ces charges superficielles se détruisent en général l'une l'autre lorsque l'on considère des éléments consécutifs, sauf aux points où le diélectrique a une charge interne, ou à la surface du diélectrique. »

« Dans le cas d'une bouteille de Leyde (***) chargée positivement, une portion quelconque de verre aura sa face intérieure chargée positivement et sa face extérieure négativement. »

« Le déplacement (IV), à travers une section quelconque d'un tube unité d'induction, représente une unité d'électricité, et la direction du déplacement est celle de la force électromotrice, c'est-à-dire qu'elle va des potentiels supérieurs aux potentiels inférieurs. »

« Nous avons à considérer, outre le déplacement électrique dans la cellule, l'état des deux extrémités de la cellule formées par les surfaces équipotentielles. Nous devons supposer que dans toute cellule, l'extrémité formée par la surface de potentiel supérieur est recouverte d'une unité d'électricité positive, tandis que l'extré-

---

(*) Je ne crois pas qu'aucun physicien ait fait attention au caractère paradoxal de cette proposition de Maxwell avant que H. Hertz l'ait exposée sous une forme particulièrement claire et saisissante (H. Hertz, Gesammelte Werke, Bd. II : *Untersuchungen über die Ausbreitung der elektrischen Kraft; Einleitende Uebersicht*, p. 27).

(**) J. Clerk Maxwell, *Traité d'Électricité et de Magnétisme*, t. I, p. 73.

(***) *Ibid.*, t. I, p. 175.

(IV) J. Clerk Maxwell, *Traité élémentaire d'Électricité*, p. 63.

mité opposée, formée par la surface de potentiel inférieur, est recouverte par une unité d'électricité négative. „

Aussi bien dans le *Traité d'Électricité et de Magnétisme* que dans le *Traité élémentaire d'Électricité*, quelques pages, parfois quelques lignes seulement, séparent les passages que nous venons de citer d'affirmations telles que celles-ci : " La force électromotrice (*) a pour effet de produire ce que nous pourrions appeler un *déplacement électrique*, c'est-à-dire que l'électricité est repoussée dans la direction de la force. „

" Lorsque l'induction (**) se transmet à travers un diélectrique, il y a d'abord un déplacement de l'électricité dans la direction de l'induction. Par exemple, dans une bouteille de Leyde dont l'armature intérieure est chargée positivement et l'armature extérieure négativement, le déplacement de l'électricité positive à travers la masse du verre se fait du dedans vers le dehors. „

" Lorsqu'une force électromotrice agit sur un milieu conducteur (***), elle y produit un courant ; mais si le milieu est un non conducteur ou diélectrique, le courant ne peut s'établir à travers le milieu, dans la direction de la force électromotrice... „

" Quelle que soit la nature de l'électricité (IV), et quoi que nous entendions par mouvement d'électricité, le phénomène que nous avons appelé *déplacement électrique*, est un mouvement d'électricité, dans le même sens que le transport d'une quantité déterminée d'électricité à travers un fil est un mouvement d'électricité. „

Ou ce langage ne veut rien dire, ou il signifie ce qui suit : Lorsqu'une force électromotrice agit sur une partie élémentaire du diélectrique, l'état de neutralité électrique de cette partie est troublé ; *l'électricité s'y déplace dans la direction de la force électromotrice; elle s'accumule en excès à l'extrémité par où la force électromotrice sort de la particule, en sorte que cette extrémité s'électrise* POSITIVEMENT, *tandis qu'elle abandonne l'extrémité par où la force électromotrice entre dans la particule, et cette extrémité s'électrise* NÉGATIVEMENT.

(*) J. Clerk Maxwell, *Traité élémentaire d'Électricité*, p. 62.
(**) J. Clerk Maxwell, *Traité d'Électricité et de Magnétisme*, t. I, p. 174.
(***) *Ibid.*, p. 69.
(IV) *Ibid.*, p. 73.

Comment deux propositions aussi manifestement contradictoires pouvaient-elles se présenter au même instant à l'esprit de Maxwell et, toutes deux à la fois, entraîner son adhésion ? C'est un étrange problème de psychologie scientifique que nous livrons aux méditations du lecteur.

§ 2. *Développement de la troisième électrostatique de Maxwell*

Si l'on passe condamnation sur cette première contradiction, si l'on admet les égalités (91), (92) et (93), les équations de la troisième électrostastique de Maxwell se déroulent, au cours de son *Traité,* exemptes de ces continuels changements de signe qui interrompaient la marche de la deuxième électrostatique.

Si P, Q, R sont les composantes de la force électromotrice, les composantes f, g, h du déplacement sont données par les égalités (*)

$$(94) \qquad f = \frac{K}{4\pi} P, \qquad g = \frac{K}{4\pi} Q, \qquad h = \frac{K}{4\pi} R,$$

où K est le *pouvoir inducteur spécifique* du diélectrique.

L'*énergie électrostatique* du milieu est donnée par la proposition suivante (**) :

« L'expression la plus générale de l'énergie électrique pour l'unité de volume du milieu est le demi-produit de l'intensité électromotrice et de la polarisation électrique par le cosinus de l'angle compris entre leurs directions. »

« Dans tous les diélectriques fluides, l'intensité électromotrice et la polarisation électrique sont dans la même direction. »

Pour ces derniers corps (***), l'énergie électrostatique est donc

$$(95) \qquad U = \frac{1}{2} \int (Pf + Qg + Rh)\, d\omega.$$

(*) J. Clerk Maxwell, *Traité d'Électricité et de Magnétisme,* t. I, p. 73 ; t. II, p. 287.

(**) *Ibid.,* t. I, p. 67.

(***) *Ibid.,* t. I, p. 176; t. II, p. 304.

C'est d'ailleurs pour les mêmes corps que les équations (94) sont valables, ce qui permet de donner de l'énergie électrostatique ces deux autres expressions (*) :

$$(96) \qquad U = \frac{1}{8\pi} \int K (P^2 + Q^2 + R^2)\, d\omega,$$

$$(97) \qquad U = 2\pi \int \frac{f^2 + g^2 + h^2}{K}\, d\omega.$$

Dans le cas où le système est en équilibre électrique, les lois de l'électrodynamique montrent qu'il existe une certaine fonction $\Psi\,(x, y, z)$ telle que l'on ait (**)

$$(98) \qquad P = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad Q = -\frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad R = -\frac{\partial \Psi}{\partial z}.$$

Les expressions (95) et (96) de l'énergie interne d'un système en équilibre peuvent alors s'écrire (***).

$$(99) \qquad U = -\frac{1}{2} \int \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} f + \frac{\partial \Psi}{\partial y} g + \frac{\partial \Psi}{\partial z} h \right) d\omega,$$

$$(100) \qquad U = \frac{1}{8\pi} K \int \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right)^2 \right] d\omega.$$

Une intégration par parties permet de transformer l'égalité (99) en l'égalité

$$\begin{aligned} U = & \frac{1}{2} \int \Psi \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} \right) d\omega \\ & + \frac{1}{2} \int \Psi \,[f_1 \cos (N_1, x) + g_1 \cos (N_1, y) + h_1 \cos (N_1, z) \\ & \qquad + f_2 \cos (N_2, x) + g_2 \cos (N_2, y) + h_2 \cos (N_2, z)]\, dS, \end{aligned}$$

(*) J. Clerk Maxwell, *Traité d'Électricité et de Magnétisme*, t. I, p. 176.
(**) *Ibid.*, t. II, p. 274, équations (B).
(***) *Ibid.*, t. II, p. 303.



la dernière intégrale s'étendant aux diverses surfaces de discontinuité.

Par l'emploi des formules (91), (92) et (93), cette égalité devient (*)

$$\text{(101)} \qquad U = \frac{1}{2}\int \Psi e \, d\omega + \frac{1}{2}\int \Psi E \, dS.$$

D'ailleurs, en vertu des égalités (94) et (98), on a

$$\text{(102)} \quad f = -\frac{K}{4\pi}\frac{\delta\Psi}{\delta x}, \qquad g = -\frac{K}{4\pi}\frac{\delta\Psi}{\delta y}, \qquad h = -\frac{K}{4\pi}\frac{\delta\Psi}{\delta z}$$

et les relations (91) et (92) deviennent

$$\text{(103)} \qquad \frac{\delta}{\delta x}\left(K\frac{\delta\Psi}{\delta x}\right) + \frac{\delta}{\delta y}\left(K\frac{\delta\Psi}{\delta y}\right) + \frac{\delta}{\delta z}\left(K\frac{\delta\Psi}{\delta z}\right) + 4\pi e = 0,$$

$$\text{(104)} \qquad K_2\frac{\delta\Psi}{\delta N_1} + K_2\frac{\delta\Psi}{\delta N_2} + 4\pi E = 0.$$

Maxwell, qui donne ces égalités (**), les introduit dans son *Traité* non pas par le raisonnement précédent, mais par un rapprochement étrange et peu saisissable entre ces égalités et les relations de Poisson

$$\text{(105)} \qquad \frac{\delta^2 V}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 V}{\delta y^2} + \frac{\delta^2 V}{\delta z^2} + 4\pi e = 0,$$

$$\text{(106)} \qquad \frac{\delta V}{\delta N_1} + \frac{\delta V}{\delta N_2} + 4\pi E = 0,$$

auxquelles satisfait la fonction

$$\text{(107)} \qquad V = \int \frac{e}{r}\, d\omega + \int \frac{E}{r}\, d\omega.$$

(*) J. Clerk Maxwell, *Traité d'Électricité et de Magnétisme* t. I, p. 108; t. II, p. 303.

(**) *Ibid.*, t. I, p. 104.

Dans une note (*) ajoutée à la traduction française du *Traité* de Maxwell, M. Potier a déjà fait justice de ce rapprochement; il est bon d'insister sur ce qu'il a de fallacieux.

Les égalités (105) et (106) sont des conséquences purement algébriques de la forme analytique de la fonction V, forme donnée par l'égalité (107); au contraire, la forme analytique de la fonction Ψ est inconnue et les égalités (103) et (104) résultent d'hypothèses physiques.

§ 3. *Retour à la première électrostatique de Maxwell*

Les équations que nous venons d'écrire offrent une profonde analogie avec les équations auxquelles conduit la théorie de la conductibilité de la chaleur; dans son *Traité d'Électricité et de Magnétisme,* Maxwell ne reprend pas ce rapprochement, qui avait été le point de départ de ses recherches sur les milieux diélectriques; mais il y insiste dans son *Traité élémentaire d'Électricité* (**). Et en effet, on passe aisément des formules sur la théorie de la chaleur, données au Chapitre II, aux formules que Maxwell donne dans son *Traité d'Électricité et de Magnétisme* si, entre les grandeurs qui figurent dans ces formules, on établit le tableau de correspondance que voici :

Théorie de la Chaleur	*Électrostatique*
T, température;	Ψ;
u, v, w, composantes du flux de chaleur;	f, g, h, composantes du déplacement électrique;
k, coefficient de conductibilité calorifique;	$\frac{K}{4\pi}$, le pouvoir inducteur spécifique étant K;
j, intensité d'une source solide de chaleur;	e, densité électrique solide;
J, intensité d'une source superficielle de chaleur.	E, densité électrique superficielle.

(*) J. Clerk Maxwell, *Traité d'Électricité et de Magnétisme,* t. I, p. 106.
(**) J. Clerk Maxwell, *Traité élémentaire d'Électricité,* p. 64.

Dès lors, les égalités (33), (34) et (35) se transforment en les égalités (102), (103) et (104).

Mais en développant sa première électrostatique, Maxwell, nous l'avons vu, avait admis que la fonction Ψ s'exprimait analytiquement, comme la fonction potentielle V dont il est fait usage en l'électrostatique classique, par la formule

$$\Psi = \int \frac{e}{r}\, d\omega + \int \frac{E}{r}\, dS.$$

Dans son *Traité d'Électricité et de Magnétisme* (*), au contraire, il met son lecteur en garde contre cette confusion; il nomme *distribution électrique apparente* une distribution dont la densité solide e' et la densité superficielle E' feraient connaître la fonction Ψ par la formule

$$(107^{bis}) \qquad \Psi = \int \frac{e'}{r}\, d\omega + \int \frac{E'}{r}\, dS.$$

Selon les théorèmes de Poisson, on aurait alors les égalités

$$(105^{bis}) \qquad \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2} + 4\pi e' = 0,$$

$$(106^{bis}) \qquad \frac{\partial\Psi}{\partial N_1} + \frac{\partial\Psi}{\partial N_2} + 4\pi E' = 0.$$

En comparant ces égalités aux égalités (103) et (104), on voit que les *densités apparentes* e', E', ne peuvent être égales aux densités e, E. En particulier, les égalités (103) et (105bis) donnent,

$$(108) \qquad 4\pi\,(Ke' - e) = \frac{\partial K}{\partial x}\frac{\partial\Psi}{\partial x} + \frac{\partial K}{\partial y}\frac{\partial\Psi}{\partial y} + \frac{\partial K}{\partial z}\frac{\partial\Psi}{\partial z}.$$

(*) J. Clerk Maxwell, *Traité d'Électricité et de Magnétisme*, t. I, p. 104.

Les égalités (104) et (106bis) donnent (*)

$$(109) \quad \begin{cases} 4\pi (K_2 E' - E) = (K_1 - K_2) \dfrac{\delta \Psi}{\delta N_1}, \\ 4\pi (K_1 E' - E) = (K_2 - K_1) \dfrac{\delta \Psi}{\delta N_2}. \end{cases}$$

Ce serait ici, semble-t-il, le lieu de juger cette électrostatique de Maxwell et de voir si elle peut s'accorder avec les lois connues; mais un élément nous manque pour mener à bien cette discussion; cet élément, c'est la notion de *flux de déplacement,* qui appartient à l'électrodynamique.

(*) Ces égalités (109) sont, dans toutes les éditions du *Traité* de Maxwell, remplacées par des égalités erronées. En la traduction française, le terme $K e'$ de l'égalité (108) est remplacé par e'; cette erreur ne se trouve pas dans la première édition anglaise.

LE TRAITÉ DES SINUS

DE

Michiel COIGNET

PUBLIÉ PAR

le R. P. Henri BOSMANS
de la Compagnie de Jésus

Introduction

I

Coignet ([1]) naquit à Anvers en 1549 et y mourut le 24 décembre 1623. Il fut mathématicien et ingénieur en titre des archiducs Albert et Isabelle, et semble avoir occupé à leur cour une position analogue à celle que Simon Stevin remplissait à la même époque à la cour de Maurice de Nassau. En tant qu'ingénieur des archiducs, il prend part aux sièges de Hulst et d'Ostende; comme leur mathématicien, il donne des leçons de mathématiques aux principaux officiers de leur armée et mérite même, à la fin de sa vie, une pension pour ce dernier genre de service. Nous le voyons en relation avec les savants les plus éminents de son temps. Quetelet a fait connaître le jugement qu'Adrien Romain portait sur lui ([2]).

„ Michel Coignet, dit ce dernier, est très versé dans toutes les „ parties des mathématiques. C'est ce que prouvent et ce que prou- „ veront tant ses ouvrages imprimés en diverses langues, que ceux „ qu'il a en manuscrits, sur l'arithmétique, la géométrie, la stéréo- „ métrie, la géodésie et l'astronomie; ouvrages remplis d'un savoir „ singulier qu'il a bien voulu me montrer quand j'allais le visiter à

„ Anvers. Je passe sous silence ses belles mécaniques, qui font „ l'admiration des connaisseurs. Je ne dis rien non plus des „ diverses horloges qu'il a construites pour la ville d'Anvers, „ d'après une théorie exposée dans un traité exprès. J'ajouterai „ seulement, qu'il s'occupe avec ardeur de la recherche des „ mobiles secondaires, et que bientôt il présentera de nouveaux „ principes sur cette partie de la mécanique. „

Viète semble avoir partagé avec le professeur de Louvain l'estime que celui-ci avait pour Coignet.

Dans la première édition de sa *De numerosa potestatum ad exegesim resolutione* (3), il publie en guise de recommandation et de postface, un curieux document que Schooten n'a pas reproduit dans son édition des œuvres de Viète (4). C'est une lettre de Marin Ghetaldi, écrite de Paris à Coignet le 15 février 1600; lettre avant tout élogieuse pour Viète, mais pleine de respect pour le savant auquel elle est adressée.

Parmi ses œuvres déjà publiées (5) l'une est remarquable pour l'époque où elle parut. C'est l'*Instruction nouvelle des points plus excellents et nécessaires touchant l'art de naviguer* (6). Aussi c'est elle que l'on cite toujours quand on parle de Coignet. L'auteur nous y apparaît avec la marque caractéristique de son talent. C'est un esprit lucide et d'un clair bon sens; saisissant du premier coup ce qu'il y a d'original et de pratique dans les découvertes des autres; dissipant les nuages qui souvent les enveloppent encore dans l'esprit de leurs premiers inventeurs et en mettant en pleine lumière le côté utile. C'est *l'Instruction nouvelle des points plus excellents et nécessaires touchant l'art de naviguer,* qui a vulgarisé la méthode inventée par Gemma Frisius pour déterminer les longitudes en mer par le moyen des horloges (7).

On peut faire deux groupes des autres ouvrages de Coignet.

Le premier comprend quelques petites arithmétiques, purement pratiques, œuvre de jeunesse destinée à l'enseignement des écoles (8); le second, deux ou trois éditions d'un *Epitome theatri orbis terrarum d'Ortelius* (9), parfaitement oubliées aujourd'hui dans la foule des ouvrages de ce genre, et une introduction mathématique au *Speculum Orbis terrarum* de de Jode (10).

Cependant c'est à sa science que Coignet dut sa grande réputation. S'il nous est inconnu aujourd'hui c'est que ses principaux

travaux n'ont jamais vu le jour. Pure fatalité ! Car nous voyons, par exemple, l'archiduchesse Isabelle s'intéresser aux œuvres de son ingénieur et lui accorder un subside de 600 livres " pour aulcune-
" ment convenir aux dépens que lui conviendroit supporter à faire
" tailler les figures nécessaires auxdicts oeuvres à charge toutefois
" qu'il donneroit promesse de faire mectre en lumière des dictes
" oeuvres (11). "

Les malheurs des temps, les troubles qui agitaient les Pays-Bas, d'autres causes peut-être aujourd'hui inconnues, empêchèrent l'exécution des vues de la Princesse. Les œuvres de Coignet ne parurent pas, et au siècle dernier, Foppens constatait avec regret " qu'elles attendaient encore en vain leur Mécène (12) ".

Que sont-elles devenues à l'heure actuelle? Où trouver, par exemple, ce traité des horloges, qu'Adrien Romain avait vu à Anvers et qu'il admirait tant? Où chercher ces écrits " remplis d'un savoir singulier " sur l'arithmétique, la géométrie, la géodésie, l'astronomie? Peut-être dans les fonds poudreux de quelque bibliothèque; mais il est fort à craindre, qu'ils ne soient définitivement perdus.

J'ai eu cependant la bonne fortune de trouver un fragment des travaux inédits de Coignet à la Bibliothèque royale de Belgique. C'est ce manuscrit, que je voudrais faire connaître.

Il est coté II 769, et se présente sous l'aspect d'un beau et grand volume de 124 pages, écrit sur fort papier de 31 centimètres de hauteur sur 25 de largeur. Ce n'est pas un autographe de l'auteur, mais une copie d'une écriture magnifique, calligraphiée à l'encre noire avec quelques lettres et ornements à l'encre rouge. Cette copie est d'une même main, mais on s'aperçoit aisément qu'elle n'a cependant pas été faite d'un seul jet. On a évidemment réuni des traités divers, qu'on a reliés ensemble, comme étant l'œuvre d'un même auteur.

Voici la description détaillée de ce que ce manuscrit renferme :

Le f° 1 est formé d'une demi-feuille dont la deuxième moitié est collée à la couverture. Le v° en est blanc; le r° contient le titre suivant :

" Traicté du present Liure
" Premierement se traicte comment lon doibt suputer et calculer
" les Tables de Sinus, Tangentes et Secantes ettca.

„ Secondement se traicte des Triangles plans, par lesquels tant „ en la planimetrie quen l'Altimetrie lon Void lusaige desdittes „ Tables.

„ Tiercement est l'usaige des 12 diuisions marquez sur la „ Reigle platte (apellee Pantometre) Par lesquels lon resoult tous „ Problemes Mathematiq; : ettc[a].

„ Le tout donné au Capitaine Thomas francquin quartier mre „ gnrl (13) des Armees de sa Ma[te] et de leurs Altezes Sers[mes] es „ Paijs bas par Monsieur Michiel coignet Mathematicien de leurs „ dites Altezes. 1612 „.

Le bas de la page est orné d'un fleuron.

Les ff[o] 2r[o]-13v[o] sont groupés en trois cahiers de deux feuilles et contiennent le " Traicté des Sinus. „

Les ff[o] 14r[o]-16v[o], composés d'une feuille entière, et d'une demi-feuille collée par un talon, renferment les tables des sinus, des tangentes et des sécantes. Ces lignes sont calculées pour le rayon 100 000 de 20 minutes en 20 minutes et pour tous les degrés du premier quadrant.

Une demi-feuille, collée par un talon aux feuilles qui précèdent, forme le f[o] 17 ; le v[o] en est blanc, le r[o] contient le titre du second opuscule : " Traicté des Triangles plans ou rectilignes par Monsieur „ Michiel Coignet, Mathematicien et Ingeniaire de Sa Ma[te] et de „ leur Altezes Sere[mes] ettc[a]. „ Le bas de la page est orné d'une couronne. Les ff[o] 18r[o]-29v[o], groupés de nouveau en trois cahiers de deux feuilles, contiennent le corps de cet ouvrage.

Les ff[o] 30r[o]-37v[o], formant aussi deux cahiers de deux feuilles, renferment divers sujets, qui ne se rapportent directement ni à ce qui précède, ni à ce qui suit. Ils semblent n'avoir été placés ici que parce qu'ils sont l'œuvre de Coignet. Voici l'énumération des questions qui y sont résolues :

FF[o] 30v[o]-31r[o] : Calcul des côtés des polygones réguliers de 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11 et 12 côtés. Le f[o] 30r[o] est blanc.

FF[o] 31v[o]-35r[o] : Divers problèmes sur le tracé des fortifications.

FF[o] 35v[o]-36r[o] : Un problème de gnomonique, " Trouver sur vn „ horloge Vertical declinant angle que faict la ligne du stilus „ auecq; la ligne du midij et aussij combien sera l'eleuation du „ stile dessus la ligne. „

Les ff[os] 36v[o] et 37 sont blancs.

Le f° 38r° contient le titre du troisième traité :

„ Vsvs Duodecim Diuisionum geometricarum per quas (et ope „ Vnius circini Vulgaris) fere omnia Mathematicorum Problemata „ facili negotio resoluuntur. „

„ Opera et studio Michaëlis Coigneti Antuerpiani Seren^m^. Belgij „ Principum Mathematici, ex ipsa numerorum occulta parte (que „ Algebra vulgo dicitur,) maxima ex parte excogitata ettc^a^. „

„ 1610. „ ([14])

Malgré ce titre latin, l'ouvrage est, comme les précédents, écrit en français.

Le bas du f° 38r° est orné d'un cartouche.

Les ff^os^ 38v° et 39, contiennent la table des propositions.

Les ff^os^ 40-62, groupés en six cahiers, chacun de deux feuilles, renferment le corps de l'ouvrage ; mais le f° 62v° est blanc. Au r° du f° 40, on voit, vers le haut, un cartouche gracieusement encadré. Au-dessous se trouve le dessin du pantomètre, règle plate de 197 millimètres sur 46, portant six graduations sur chacune de ses faces.

Une question préliminaire se présente tout d'abord ici. Le manuscrit, que nous venons de décrire est-il le même, que celui qui est indiqué en ces termes, au tome V de la Bibliotheca Belgica par le bibliothécaire en chef et les conservateurs de la Bibliothèque de l'Université de Gand ? ([15])

„ Dans la vente J. Camberlyn (Bruxelles, 1882, n° 477) figurait : „ Coignet (Michel) d'Anvers, Calcul des sinus, tangentes, sécantes, „ etc. — Des triangles plans, etc. — De l'usage du pantomètre „ 1610-1612, in-fol. orné de nombreuses figures de géométrie et „ culs-de-lampes dessinés avec goût. „ Le tout donné au capitaine „ Thomas Francquin, quartier maître général des armées de „ S. M. et de LL. AA. SS. ès Pays-Bas, par Michel Coignet, mathé- „ maticien et ingénieur de S. M. et de LL. AA. SS. etc. » Infol. „ Ce manuscrit fut adjugé au prix de 13 francs. „

L'identité des deux manuscrits me paraît probable, pour ne pas dire certaine. Il me reste cependant un doute, que je n'ai pu lever par un renseignement positif. Ce n'est pas dans la vente Camberlyn, que la Bibliothèque royale a acquis le manuscrit II, 769 ; mais quatre ans plus tard, en 1886, dans la vente De Decker, qui eut lieu à Anvers.



Pour faire revivre Coignet, le tirer de l'oubli, faire connaître son style, sa manière, sa méthode, montrer que la Belgique possédait en lui un savant peu connu, dont elle pouvait à bon droit être flère, il était indispensable de publier en entier au moins un des petits opuscules, que le manuscrit de la Bibliothèque royale de Belgique nous a conservés. J'ai choisi le premier et le plus court : " Le Traicté des Sinus. „ Je donne un résumé des autres.

II

Dans le " Traicté des Triangles plans „, Coignet débute par des " sentences comunes ou axiomes demonstrez aux liures des Elementz d'Euclide „ et des définitions; puis il énonce ce qu'il nomme " le probleme general pour les Triangles rectilignes.

" En tout triangle rectiligne la proportion qu'il ij a des costez „ lung a lautre, la mesme ij a il des sinus des angles oppositz „ ausdictz costez, cest a dire que les costez dun triangle ont „ proportion lung a lautre comme le sinus des angles oppositz „ ausditz costez. „

C'est la loi du sinus

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C},$$

qui se rencontre dans toutes les trigonométries de l'époque. A ce point de vue sa presence à cette place n'offre rien de remarquable. Ce qui l'est davantage, c'est le procédé par lequel Coignet établit cette loi. Il n'emploie pas l'antique démonstration de Regiomontan (16) alors encore classique chez presque tous les auteurs, mais il lui substitue la jolie preuve, que Snellius (17) devait rendre si populaire quinze ans plus tard et que Moritz Cantor attribue encore aujourd'hui au géomètre hollandais (18).

Je croyais pouvoir revendiquer en faveur de Coignet l'honneur de la decouverte. J'ai bientôt dû reconnaître que j'avais tort. Coignet n'est ni le seul ni surtout le premier qui ait donné la demonstration dont se sert Snellius. Je la trouve en 1596, dans l'*Opus Palatinum de Triangulis* de Rheticus (19); en 1588, dans le *Fundamentum astronomicum* de Raymarus Ursus Dithmarsus (20);

et enfin en 1579, dans le *Canon mathematicus* de Viète ([21]). C'est ce dernier qui en est l'auteur.

Le lecteur le sait, la démonstration dite de Snellius est plus simple que celle de Regiomontan ([22]). Ce progrès ne pouvait échapper à l'esprit éminemment clair de Coignet.

Après le problème général, nous arrivons au corps de l'ouvrage divisé en cinq articles. Les trois premiers sont courts et ne présentent rien de très saillant. Je me contente d'en donner les titres sous une forme moderne.

Article I. Résolution des triangles rectangles dont on connaît un des côtés et un angle aigu.

Article II. Résolution des triangles rectangles dont on connaît deux des côtés.

Article III. Étant donné un triangle obliquangle, dont on connaît les trois angles, trouver la proportion des côtés.

Vient ensuite l'article IV : „ Si les trois costez sont donnez, lon
„ donnera les trois angles, et si le triangle est equilateral, il est
„ certain que chacun angle fait 60 degrez.

„ Si le triangle est Issoscele, Tirez du Somet vne perpendiculaire
„ vers la base, qui la partira en deux parties egalles, et par conse-
„ quent sera le dict triangle Issoscele, coupé en deux triangles
„ rectangles dont les Hijpothenuses seront cognues auecq les
„ bases; ergo par le precedent 2e article des Triangles rectangles,
„ et laijde des tables de Sinus aurez les angles. „

Un seul cas mérite donc examen, celui du triangle scalène,

Lorsque nous devons le résoudre aujourd'hui, nous employons des deux formules :

$$\text{tg}\,\frac{1}{2}\,A = \frac{r}{p-a} \qquad r = \sqrt{\frac{(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}{p}}.$$

Elles ont, très vraisemblablement, été connues de Coignet, car au mode d'écriture près, Rheticus les donne sous cette forme toute moderne dans l'*Opus Palatinum de triangulis* ([23]). Ces formules nous paraissent, à juste titre, les plus simples; mais il n'en est ainsi, que parce que nous possédons des tables de logarithmes. Pour les anciens qui en étaient privés, la difficulté se déplaçait et ils employaient, à la détermination des angles d'un triangle dont on connaît les côtés, une méthode à leur point de vue plus expéditive.

Elle consistait essentiellement à mener une des hauteurs du triangle proposé et à le diviser ainsi en une somme de deux triangles rectangles. Pour être certain, que le pied H de la hauteur tomberait sur le côté lui-même et non pas sur son prolongement, il leur suffisait d'avoir soin de choisir la hauteur abaissée de l'angle opposé au plus grand côté. Coignet ne manque pas d'en faire la remarque. Soit BC ce côté et A le sommet de l'angle opposé. On calculait les deux segments BH, HC déterminés sur BC par le pied H de la hauteur de l'angle A.

Ce calcul se faisait de plusieurs manières.

Regiomontan [24], pour ne nommer que lui, prenait pour point de départ la formule d'Euclide [25]

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2a.\,\mathrm{HB}$$

et en déduisait aisément :

$$\mathrm{HB} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}.$$

Mais il s'apercevait bientôt, par des considérations géométriques assez compliquées, qu'il pouvait simplifier la mise en nombres en écrivant la valeur HB sous la forme [26]

$$\mathrm{HB} = \frac{1}{2}a - \frac{(b+c)(b-c)}{2a}.$$

C'est cette dernière expression que Coignet adopte. Il l'énonce en ces termes :

« Come la base se tiendra à la somme des deux jambes, ainsij
„ se tiendra la différence des jambes à la portion de la base qu'on
„ otera d'icelle, dont la moitié monstrera la moindre portion
„ d'icelle base „.

Nous dirions aujourd'hui

$$\frac{a}{b+c} = \frac{b-c}{a - 2.\,\mathrm{HB}}.$$

J'arrive à l'article V : Résoudre un triangle dont on connaît deux côtés et un angle

Il y a naturellement ici deux cas à considérer, suivant que l'angle donné est compris entre les côtés connus, ou qu'il est opposé à l'un d'eux.

Et d'abord " Si dung Triangle est donné langle du somet auecq;
" les deux Jambes, Comment on trouvera ses autres deux angles
" de la base et aussy la base du 3ᵉ costé ".

Coignet donne deux solutions du problème.

La première est une méthode ancienne. Elle consistait à abaisser la hauteur d'un des deux angles inconnus et à décomposer ainsi le triangle proposé en deux triangles rectangles, qu'on calculait sans peine.

Dans la seconde, il détermine la différence des angles inconnus, par la formule [27]

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A-B)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A+B)};$$

il obtient ensuite par la loi du sinus le dernier côté.

En second lieu " Si dung triangle les 2 costez sont donnez auecq
" vn angle oposite a lung des costez donne, trouuer la reste ... Il
" est a notter, que ceste proposition est doubteuse si ce nest
" scachant de quelle nature est lautre angle, qui est oposite a
" lautre coste donné [28] ".

Cette remarque faite, il résout le triangle par la loi du sinus, comme nous le faisons encore aujourd'hui.

Tous ces théorèmes et leurs démonstrations sont énoncés au long, sans aucun emploi de notations algébriques ou trigonométriques [29].

Telle est la partie théorique du " Traicté du triangle plan ".

L'ouvrage s'achève par l'exposé des applications pratiques à effectuer sur le terrain. Cette partie est intitulée " de lusage des Triangles Rectilignes Tant en L'Altimetrie quen la plainimetrie ". Nous y trouvons résolus les problèmes suivants :

Trouver la hauteur d'une tour dont le pied est accessible.

Évaluer la surface d'un terrain de forme polygonale.

Trouver la hauteur d'une tour dont le pied n'est pas accessible.

Un " mesureur " est dans une tour où il peut monter et descendre. Du haut de la tour et d'une " fenestre " il voit un même objet. On demande comment il trouvera la distance de cet objet au pied de la tour.

Évaluer la surface d'un terrain de forme polygonale et dont il

est impossible de mesurer les angles des diagonales avec les côtés.

Mesurer la distance d'une tour inaccessible.

Planter un fort sans instruments (il s'agit de construire un pentagone régulier sur le terrain).

Les solutions de Coignet sont toutes simples et élégantes. On les trouve encore aujourd'hui dans nos *Cours d'Arpentage.*

Le traité des triangles s'arrête ici.

J'ai suffisamment indiqué, en décrivant ci-dessus le manuscrit de Coignet, quel était le contenu des folios 30-35.

Le traité du Pantomètre est un recueil de problèmes de géométrie. Les solutions ne s'y obtiennent pas d'ordinaire, comme nous l'entendons aujourd'hui, par l'usage exclusif de la règle vulgaire et du compas; mais l'auteur y emploie un compas et une règle graduée, permettant de résoudre des problèmes de genres assez divers.

C'est cette règle graduée qu'il appelle Pantomètre ([80]).

Les échelles ou graduations différentes du Pantomètre, sont au nombre de douze et ne paraissent pas toutes également utiles. Nous y trouvons entre autres : une simple division de l'unité de longueur en parties égales; la longueur des degrés de la circonférence évalués en fonction du rayon; celle des côtés des polygones réguliers en fonction du rayon de la circonférence circonscrite; une échelle donnant la longueur des sinus; une autre donnant celle des tangentes; une autre encore exprimant le rapport des poids spécifiques des principaux métaux : or, argent, fer, plomb, cuivre, étain, etc., etc.

Quelques problèmes conduisent à une construction purement géométrique, qui est alors le but même qu'on s'y propose. D'autres donnent un résultat numérique et, toutes réserves faites, l'utilité du Pantomètre est en ce cas quelque peu comparable à celle de nos abaques.

Les problèmes proposés sont au nombre de 46.

III

J'ai dit au commencement de cette étude que le manuscrit de Coignet était splendidement calligraphié. Le soin apporté au tracé des figures, l'ordre qui règne dans la disposition des calculs con-

tribuent singulièrement à en rendre la lecture facile et agréable. Nulle part cette lecture ne peut être douteuse. Je reproduis donc fidèlement le texte en en respectant l'orthographe. J'aurais voulu en conserver aussi les abréviations, mais les exigences de la typographie m'ont mis dans l'impossibilité de le faire; j'indique en note comment j'ai tâché d'y suppléer ([81]).

Quant à la ponctuation, le copiste de Coignet emploie indifféremment et sans règle le point ou la virgule ; parfois aussi il se sert d'un signe intermédiaire qu'on peut prendre à volonté pour l'un ou pour l'autre. Je me suis surtout laissé guider par le sens de la phrase pour déterminer mon choix.

Je dois en outre un mot d'explication au lecteur au sujet des notes que je consacre dans mon travail à divers points de l'histoire de la trigonométrie.

Je me suis imposé des règles pour les écrire.

Lorsqu'il s'agissait des Savants arabes j'ai bien été obligé de recourir aux traductions et aux commentaires, mais je me suis fait une loi d'étudier les mathématiciens de l'antiquité classique, du moyen âge et de la renaissance, dans leurs œuvres originales chaque fois que la chose m'a été possible. J'ai eu en main tous les auteurs et toutes les éditions que je cite, à moins que je ne dise le contraire en termes exprès. J'ai eu recours pour les géomètres grecs aux excellentes éditions données par la maison Teubner de Leipzig ([82]). Quant aux géomètres du moyen âge et de la renaissance leurs ouvrages sont presque toujours devenus des raretés bibliographiques. La Bibliothèque royale de Belgique, si riche en éditions anciennes, m'a été ici du plus précieux secours. J'ai dû néanmoins recourir assez souvent en outre à d'autres dépôts publics; ainsi j'ai consulté fréquemment les Bibliothèques de l'Observatoire royal et celles des Universités de Louvain, de Liége et de Gand. J'indique d'ailleurs, chaque fois qu'il s'agit d'éditions anciennes, à quelle Bibliothèque appartient l'exemplaire dont je me suis servi.

Bruxelles, Collège Saint-Michel, 27 juin 1900.

NOTES DE L'INTRODUCTION

(1) J'emprunte les détails biographiques qui suivent, à deux articles de Pinchart intitulés : *Archives des Arts, des Sciences et des Lettres* et publiés dans le MESSAGER DES SCIENCES HISTORIQUES (§ 37, Gand, 1856, pp. 187-189 ; § 79, Gand, 1862, pp. 330-332).

La date de la naissance et de la mort de Coignet nous est connue d'une manière certaine par Foppens, qui nous a conservé l'épitaphe de Coignet, dans sa BIBLIOTHECA BELGICA et qui nous y apprend, qu'on la lisait encore de son temps, à l'église Saint-Jacques, à Anvers (t. II, Bruxellis, M.D.CC.XXXIX, pp. 890-891).

L'orthographe du nom de Coignet varie beaucoup. On trouve les formes suivantes : Coignet, Coingnet, Coigniet, Congnet, Cognetus, Cogniet, Cuignet, Coignetus et Quinet. Dans notre manuscrit, il orthographie toujours son nom, Coignet, ou s'il ajoute son prénom, Michiel Coignet; excepté cependant au titre du traité du Pantomètre ou il l'écrit, Michael Coignetus.

(2) *Histoire des sciences mathématiques et physiques chez les Belges*, Bruxelles, 1864, p. 124. — Le passage d'Adrien Romain, cité par Quetelet, est emprunté à la préface des *Ideae mathematicae pars prima, sive methodus polygonorum qua laterum perimetrorum et arearum cuiuscunque polygoni investigandorum ratio exactissima et certissima una cum circuli quadratura continentur. Authore Adriano Romano Lovaniensi, medico et mathematico.* Lovanii, apud Ioannem Masium, typog. iur. Anno CIↃ.IↃ.XIII. In-4°, p. 10 non ch. Bibl. roy. de Belg. V. 4973.

(3) Paris, David Le Clerc, 1600. In-fol. Bibl. roy. de Belg. V. 4908.

La lettre de Ghetaldi est écrite en italien et se trouve au verso du fol. 36.

(4) *Francisci Vietae Opera mathematica in unum volumen congesta ac recognita, opera et studio Francisci a Schooten Leydensis, Matheseos professoris.* Lugduni Batavorum, Ex Officina Bonaventurae et Abrahami Elzeviriorum. CIↃ.IↃ.CXLVI. In-fol. Bibl. roy. de Belg. V. 4819.

(5) La bibliographie des œuvres de Coignet a été donnée, avec le soin qui caractérise cet ouvrage, dans la BIBLIOTHECA BELGICA, *Bibliographie générale des Pays-Bas*, par le bibliothécaire en chef et les conservateurs de la Bibliothèque de l'Université de Gand (1re série, Gand, Camille Vyt, La Haye, Martin Nyhoff, 1880-1890). Elle se trouve un peu éparpillée de côtés divers et doit être cherchée aux mots : Coignet (t. V, C. 305-C. 310), Medina (t. XX, M. 187-M. 190), Menher (t. XX, M. 184), Raets (t. XXI, R. 60 et R. 61).

Dans son étude sur l'*Ecole cartographique belge, au XVI[e] siècle* (Rev. des Quest. scient., t. XLII, 1897, p. 266), M. F. Van Ortroy signale en outre au nombre des œuvres de Coignet, les introductions mathématiques qui figurent dans l'édition de 1593 du *Speculum* de de Jode et dans l'édition italienne de 1612 du *Theatrum* d'Ortelius.

Enfin dans une lettre privée qu'il m'a écrite à ce sujet, le savant professeur de l'Université de Gand, a eu l'obligeance de me faire connaître, qu'il existait aux archives communales de la ville d'Anvers (carton 26), un plan manuscrit de la partie de l'enceinte de cette ville comprise entre le Cattenberghe et la Porte Rouge. „ Delineavit Antverpa Michael Coignetus Ser[m] Principum Mathematicus anno... 1618. „

(6) Publié à Anvers, en 1581, chez Henry Hendrix. In-4°. Bibl. roy. de Belg. II. 47328.

Cet ouvrage est la traduction française revue et considérablement augmentée de la deuxième partie du traité : *De Zeeuaert Oft Conste van ter Zee te varen, vanden Excellente Pilote M[ter] Peeter de Medina, Spaignaert... Wt den Spaensche ende Fransoysche in onse Nederduytsche tale ouergheset ende met Annotatiê verciert bij M[r] Merten Eueraert Brug. Met noch een ander nieuwe Onderwijsinghe, op de principaelste puncten der Navigatien, van Michiel Coignet.* T'Hantwerpen, bij Hendrick Hendricksen, ... 1580. In-4°. Bibl. roy. de Belg. II. 26080.

Voyez la description détaillée de ces ouvrages, dans la Bibliotheca Belgica, par le bibliothécaire en chef de l'Université de Gand, aux mots : Coignet (t. V. C. 306) et Medina (t. XX, M. 187-M. 190).

(7) Voyez sur ce sujet l'*Histoire des sciences mathématiques et physiques chez les Belges*, de Quetelet (p. 82), et la *Cosmographia, siue Descriptio vniuersi Orbis, Petri Apiani et Gemmae Frisii, Mathematicorum insignium, iam demum integritati suae restituta. Adiecti sunt alii, tum Gemmae Frisii, tum aliorum Auctorum eius argumenti Tractatus ac Libelli varii, quarum seriem versa pagina demonstrat.* Anno 1584. Antuerpiae, ex Officinâ Ioannis Withagii. In-4°. (p. 239). Bibl. roy de Belg., V. H. 8236. Cet ouvrage peut être considéré comme l'édition complète des œuvres de Gemma Frisius. Quant à sa méthode des longitudes, elle y fait l'objet du 19[e] chapitre du petit traité *De Usu Globi*, p. 239. Ce chapitre est intitulé : „ De novo modo inveniendi longitudinem. „ La première édition du *De usu globi* est d'Anvers 1530; elle parut dans un ouvrage de l'auteur intitulé *De Principiis Astronomiae & Cosmographiae.* Bibl. de l'Université de Gand. Acc. 8546[1]. Dans cette édition la méthode des longitudes est exposée au ch. 18, f° D_2 v° - (D_3) r°.

(8) Ces arithmétiques ont été décrites dans la Bibliotheca Belgica par le bibliothécaire en chef de l'Université de Gand (t. V, Coignet, C. 305; t. XX, Menher M. 184; t. XXI, Raets, 60, R. 61).

Au point de vue des mathématiques pures, nous l'avons dit, elles n'ont guère d'importance; mais, elles ne manquent pas toujours pour cela d'intérêt. L'une d'elles, par exemple, contient des renseignements curieux sur la manière dont les paiements et les changes s'effectuaient à la fin du xvi[e] siècle, entre Anvers et les principales places commerciales de l'Europe. Elle a pour titre :

Livre D'Arithmetiqve, contenant plusieurs belles questions & demandes, propres & vtiles à tous ceux qui hantent la Trafique de Marchandise. Composé par feu Valentin Mennher Alleman : reueu, corrigé & augmenté en plusieurs endroits par Michiel Cognet. Ensemble Vne ample declaration sur le fait des Changes. Item Vn petit discours de bien & deuëment disconter, auec la Solution sur diuerses opinions y proposées. Avec La Solution des questions Mathematiques par la Supputation de Sinus, illustrées & amplifiées par les demonstrations Geometriques necessaires à icelles. A Anvers Chéz Jean waesberghe, à l'escu de Flandres. Avec Privilege, 1573. In-8°. L'exemplaire, que nous avons vu, appartient à la Bibliothèque communale de la Ville d'Anvers (N° 4815).

Une autre est plus curieuse encore, c'est celle qui a pour titre : *Cents Questions Ingenieuses Et Recreatives Pour Delecter & aguiser l'entendement, de feu V. Menher Allemand. Souldées & amplifiées par les raisons Geometriques requises à icelles par Michiel Coignet. A Anvers Chéz Iean waesberghe à l'escu de Flandres. Avec Privilege, 1573.* In-8°. Bibl. de l'Univ. de Louvain, Scienc. N° 1573. Coignet y donne la solution de 100 problèmes proposés deux années auparavant dans le *Liure d'Arithmeticque côtenant plusieurs belles questions et demandes bien propres & vtiles à tous Marchans, par M. Valentin Mennher de Kempten. A Anvers. Avec Priuilege de la Royale Ma. pour quatre ans. 1561.* In-8° (Imprimé par Gilles Coppens de Diest, comme on peut le voir au v° du dern. f°). Bibl. roy. de Belg., II 38947. Les 47 premiers problèmes ont trait à l'arithmétique, les 53 derniers sont des problèmes d'astronomie.

Enfin, une troisième arithmétique est intitulée : *Arithmetica Oft Een niew Cijfferboeck van Willem Raets Maestrichter. Waer in die Fondamenten seer grondelijck verclaert ên met veel schoonen questien gheillustreert worden, tot nut ende oorbaer van alle Coopliedê ende liefhebbers der seluer Consten. Met noch een Tractaet vande Wisselroede, met Annotatien verciert door Michiel Coignet. T'Hantwerpen, Ten huyse van Hendrick Hendricsen in de Leliebloeme, 1580, met Priuilegie voor thien Iaeren.* In-8°. Bibl. de l'Univ. de Gand Acc. 4590. Coignet y donne un petit traité de l'art de jeauger les tonneaux. Voyez sur ce dernier ouvrage : Le Paige, *Notes pour servir à l'histoire des mathématiques dans l'ancien Pays de Liége*, publiées dans le Bulletin de l'Institut archéologique liégeois, t. XXI, Liége 1888, pp. 481-482. Il y a eu une réimpression de cette arithmétique de Raets et Coignet, en 1597, à Anvers chez Jérôme Verdussen; je ne l'ai jamais vue.

(²) *Epitome Theatri Orbis Terrarvm Abrahami Ortelii. De nouo recognita, aucta, et geographica ratione restaurata, à Michaele Coigneto. Mathem. Antverpiano. Antverpiae. Svmptibvs Ioannis Keerbergii. Anno M.D.CI.* In-8° obl., Bibl. roy. de Belg., 14447.

Même titre : *Antverpiae Extat in Officina Plantiniana. M.DC.XII.* In-8° obl., Bibl. roy. de Belgique, II, 33992.

L'Epitome Dv Theatre De L'vnivers d'Abraham Ortelius : Nouuellement recogneu, augmentè et restaurè de mesure Geographique, par Michel Coignet Mathemat. d'Anvers. Antverpiae Svmptibvs Ioannis Keerbergii. Anno M.DCII. In-8° obl., Bibl. de l'Univ. de Gand (exemplaire incomplet du titre) Hist. 1602. Voyez sur ces éditions : la Bibliotheca Belgica, par le bibliothécaire en chef et

les conservateurs de la Bibliothèque de l'Université de Gand (t. V, Coignet, C. 307-C. 309). Voyez aussi : *L'École cartographique belge au XVIe siècle,* par F. Van Ortroy, publiée dans la REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES (Bruxelles, 1897, t. XLII, pp. 265 et 266).

(10) *Speculum Orbis terrae,* sans date ni adresse d'imprimeur au titre ; mais au verso de l'avant dernier folio on lit " Vidua et haeredes Gerardi de Judaeis suis sumptibus hoc opus geographicum curavere imprimi apud Arnoldum Coninx, Antverpiae, Anno CIƆ.IƆ.XCIII. " In folio. Bibl. royale de Belgique V. H. 14356.

(11) Document publié par Pinchart dans l'article cité plus haut (MESSAGER DES SCIENCES HISTORIQUES, DES ARTS ET DE LA BIBLIOGRAPHIE EN BELGIQUE, Gand, 1886, p. 188).

(12) Foppens, BIBLIOTHECA BELGICA, t. II, p. 890.

(13) Les mots " mre gnrl " sont chacun surmontés dans le manuscrit d'une espèce de grand accent circonflexe qui n'a pas d'équivalent parmi les caractères typographiques dont dispose mon imprimeur.

(14) C'est-à-dire : " L'usage des douze divisions géométriques, par lesquelles
" (à l'aide d'un compas ordinaire) on résout facilement presque tous les
" problèmes des mathématiques.
" Solutions de Michel Coignet anversois, mathématicien des Serenissimes
" princes de Belgique, tirées pour la plupart de cette partie occulte des nombres,
" qu'on nomme communément algèbre, etc.
" 1610 ".

(15) O. c., t. V, Coignet, C. 305.

(16) Nous citons l'édition princeps éditée en 1533, à Nuremberg, par Schoner. En voici le titre complet :

Doctissimi viri et mathematicarum disciplinarum eximii professoris Ioannis de Regio monte de Triangulis omnimodis libri quinque : Quibus explicantur res necessariae cognitu, volentibus ad Scientiarum Astronomicarum perfectionem deuenire, quae cum nusquam alibi hoc tempore expositae habeantur frustra sine harum instructione ad illam quisquam aspirarit.

Accesserunt huc in calce pleraq; D. Nicolai Cusani de Quadratura circuli, Deq; recti ac curui commensuratione : itemq; Io. de monte Regio eadem de re ἐλεγκτικά, hactenus a nemine publicata.

Omnia recens in lucem edita, fide et diligentia singulari. Norimbergae in aedibus Io. Petri. Anno Christi M.D.XXXIII.

A la dernière page. *Excudebatur Norimbergae per Ioh. Petreium, anno M.DXXXIII, Mense Augusto.* In fol. Bibl. roy. de Belg. V. 4983 et V. H. 8119.

La loi du Sinus est l'objet de la 1e prop. du liv. II, p. 46.

(17) *Willebrordi Snellii a Royen, R. F. Doctrinae Triangulorum canonicae Libri Qvatvor, Quibus Canonis Sinuum, tangentium et secantium constructio, Triangvlorvm tam planorvm, qvam sphaericorvm expedita dimensio breviter ac perspicue traditur : Post mortem Authoris in lucem editi a Martino Hortensio Delfensi : Qui istis Problematum, Gaeodaeticorum et Sphaericorum tractatus singulos adjunxit, quibus praecipuarum utriusque Trigonometriae propositionum usus declaratur.* Lvgdvni Batavorvm, Ex officinâ Ioannis Maire

CIƆ.IƆ.CXXXVII. In-8°. Lib. II, Prop. IV, pp. 65, 66. Bibl. roy. de Belg. V. 4985.

(18) *Vorlesungen über Geschiche der Mathematik*, Zweiter Band, Zweiter Auflage, Leipsig, Teubner, 1900. cb. 73, p. 706. Voyez aussi van Geer. *Notice sur la vie et les travaux de Willebrord Snellius* publiée dans les ARCHIVES NÉERLANDAISES DES SCIENCES EXACTES ET NATURELLES, t. XVIII, Harlem, 1883, p. 453.

(19) *Opvs Palatinvm de Triangvlis A Georgio Ioachimo Rhetico coeptvm : L. Valentinvs Otho principis Palatini Friderici IV. electoris mathematicvs consvmmavit. An. Sal. hvm. CIƆ.IƆ.XCVI.* Le titre n'a ni nom d'imprimeur, ni nom de ville; mais à la dernière page du traité intitulé, " L. Valentini Othonis Parthenopolitani De Triangvlis Globi sine angvlo recto libri qvinqve, „ on lit : *Neostadii in Palatinatv. Excudebat Matthaeus Harnisius, Anno Salutis CIƆ.IƆ.XCVI.* In-fol. (Bibl. de l'Observatoire de Belgique; Bibl. de l'Univers. de Louvain. Science N° 215). La loi du Sinus des triangles rectilignes se trouve dans le " Georgii Ioachimi Rhetici de Triqvetris Rectarvm linearvm in planitie liber vnus, „ pp. 95 et 96.

Ces deux exemplaires de l'*Opvs Palatinvm* sont incomplets des grandes tables des lignes trigonométriques. La Bibliothèque de l'Université de Louvain les possède néanmoins (Scienc. N° 216) dans l'édition qui a paru, en 1607 à Neustadt, sous le titre : *Georgii Ioachimi Rhaetici Magnus Canon Doctrinae Triangulorum ad Decades secundorum scrupulorum et ad partes 10.000.000.000. Recens emendatus a Bartholomaeo Pitisco Silesio. Addita est brevis commonefactio de fabricâ et usu huius Canonis. Quae est summa doctrinae et quasi nucleus totius operis Palatini. Canon hic, una cum brevi commonefactione de eius fabricâ et usu, etiam separatim ab Opere Palatino venditur. In Bibliopoleio Harschiniano.* In-f° sans date ni adresse d'imprimeur au titre. Enfin, j'ai trouvé encore à la Bibliothèque de l'Université de Louvain (Scienc. 173) le rarissime *Thesaurus mathematicus sive canon sinuum... olim quidem incredibili labore a Georgio Ioachimo Rhetico supputatus; ac nunc primum in lucem editus ac cum viris doctis communicatus a Bartholomaeo Pitisco Grunbergensi Silesio... Francofurti excudebat Nicolaus Hoffmannus sumptibus Jonae Rosae CIƆ.IƆ.CXIII.* In-f°. — Voyez sur ces diverses éditions : Brunet, *Manuel du libraire et de l'amateur de livres*, 5e édit.. t. IV. Paris, 1863, col. 1264-5; Graesse, *Trésor de livres rares et précieux*, t. VI, Dresde, 1865, p. 102; Terquem, *Bulletin de bibliographie, d'histoire et de biographie mathématiques*, t. I, Paris, 1855, pp. 8-13.

(20) NOTE SUR LE FUNDAMENTUM ASTRONOMICUM DE RAYMARUS URSUS DITHMARSUS (*). — Ce petit opuscule, assez oublié aujourd'hui, a eu son heure de célébrité tapageuse dans la grande querelle de son auteur avec Tycho Brahé. Il occupe une place considérable dans l'histoire de la trigonométrie et mérite à ce point de vue que nous nous y arrêtions un instant. En voici d'abord le titre complet que je transcris sur l'exemplaire de la Bibliothèque de l'Université de Louvain (Scienc. 711) :

(*) La démonstration se trouve au chap. 3, p. 27 r°.

Nicolai Raymari Vrsi Dithmarsi || *Fvndamentvm astronomicvm :* || *id est* || *nova doctrina* || *sinvvm et triangvlorvm* || *eaqve absolvtissima et perfe-* || *ctissima, eivsque vsvs in astronomi-* || *ca Calculatione & obseruatione.* || *Cui adiunctae sunt :* || *I. Hypotheses nouae ac verae motuum corporum Mundanorum.* || *II. Extructio Canonis sinuum, vulgaris quidem, sed solita via facilior.* || *III. Sectio anguli data ratione, seu in quodlibet partes.* || *IV. Quadratio Circuli Demonstrabili ratione, eiusque Demonstratio.* || *V. Solutio Triangulorum vsitatiorum noua ac facillima ratione.* || *VI. Solutio plerorumque Triangulorum per solam prostaphaeresin.* || *VII. Eiusdem prosthaphaereseos Apodixis, Causa ac Demonstratio.* || *Omnibus seculis problemata sane desideratissima aliaq; prius nec audita* || *nec antea visa paradoxa quam plurima.* || (Vignette : Buste couronné de lauriers avec la devise „ Sapientia constans. „) || Αγεωμέτρητος οὐδεὶς εισίτω. || Argentorati. || Excudebat Bernhardus Iobin. || 1588. || In 4° (*).

L'ouvrage est divisé en cinq chapitres, précédés d'une épître dédicatoire. En voici les titres :

Caput I. De logistica Astronomica (pp. 1 r°-5 v°).

Cap. II. De extructione canonis Sinuum (pp. 5 v°-13 v°).

Cap. III. De Doctrina Triangulorum (pp. 13 v°-30 v°).

Cap. IV. De Observatione locorum Stellarum fixarum (pp. 31 r°-36 v°).

Cap. V. De Observatione motuum planetarum, ubi de novis nostris hypothesibus (pp. 37 r°-40 v°).

Ce sont les chapitres II et III qui renferment la trigonométrie de l'auteur, et c'est d'eux que je me propose de dire un mot.

Dans le chapitre II Ursus dit qu'il va exposer trois méthodes (**) pour construire la table des sinus. En réalité il n'en donne que deux, car, il l'avoue d'ailleurs lui-même (***), la soi-disant troisième méthode fournirait plutôt un moyen de se passer de sinus.

L'auteur prend pour point de départ de la première méthode l'inscription à la circonférence des polygones réguliers élémentaires. Il se sert ensuite des

---

(*) Bierens de Haan en donne une description bibliographique détaillée dans son étude intitulée : *Quelques quadrateurs du cercle dans les Pays-Bas*, publiée dans le BULLETTINO DE BONCOMPAGNI (t. VII, 1874, pp. 103-104 en note); et Rudolf Wolf en fait une analyse très remarquable, mais à un point de vue différent de celui où je me place ici, dans le VIERTELJARSCHRIFT DER NATURFORSCHENDEN GESELLSCHAFT IN ZÜRICH (Zurich, 1886, ASTRONOMISCHE MITTHEILUNGEN, LXVIII, pp. 313-327). J'ajouterai que Delambre le résume lui aussi, mais d'une manière beaucoup plus sommaire dans son *Histoire de l'Astronomie moderne* (t. I, liv. III, pp. 287-293) et qu'enfin, je trouve sur Ursus Dithmarsus (de son vrai nom Nicolas Reimers), des renseignements biographiques et bibliographiques nombreux, dans la *Johannis Molleri Flensburgensis Cimbria literata, Hauniae MDCCXLIV* (In-fol., t. I, pp. 513-518).

(**) P. 5 v°.

(***) P. 13 v°.

théorèmes suivants qu'on me permettra, pour plus de clarté, d'écrire ou d'énoncer en notations et en langage moderne (*) :

1. Théorème du carré de l'hypoténuse.
2. $\text{Cos}\,A = \sqrt{R^2 - \sin^2 A}$.
3. $\text{Sin. vers.}\,A = R - \cos A$.
4. $4 \sin^2 \tfrac{1}{2} A = \sin^2 A + \text{sin. vers}^2 A$.
5. $\dfrac{R}{\sin A} = \dfrac{\cos A}{\tfrac{1}{2} \sin 2A}$.
6. $\text{Corde}\,(A - B) = \sqrt{(\sin A - \sin B)^2 + (\cos B - \cos A)^2}$.

Enfin, il remarque qu'on abrège d'un tiers la construction des tables par la formule

$$\text{Sin}\,(60 + A) - \sin\,(60 - A) = \sin A.$$

A part l'emploi de cette dernière formule qui est de Viète (**), toute cette première méthode, comme nous le verrons plus loin, a beaucoup d'analogie avec celle de Regiomontan (***).

Dans sa deuxième méthode, Ursus se base sur un théorème trouvé par Burgi pour déterminer les sections angulaires (iv). Delambre regrettait déjà vivement et avec raison, que l'énoncé en soit si obscur et il n'a malheureusement pas encore été complètement éclairci depuis. Burgi, on le sait, ignorait le latin, ce qui fut peut-être cause que ses œuvres ne furent jamais éditées et que ses méthodes restèrent longtemps des énigmes (v). En 1872 seulement on a appris à les mieux connaître et à en apprécier la haute valeur, par l'analyse du manuscrit de la Bibliothèque de Pulkowa (vi), donnée par Rudolf Wolf dans les ASTRONOMISCHE MITTHEILUNGEN.

Reste enfin la troisième méthode, c'est-à-dire celle qui permettrait de se passer de sinus pour résoudre les triangles. Elle s'appuie sur une quadrature du cercle de Simon Duchêne, plus connu sous le nom latin de Simon à Quercu, citoyen de Delft. Ursus qualifie cette quadrature de découverte divine, divinum inventum (vii). Elle est cependant aussi fautive, on le sait, que toutes

---

(*) P. 6 v°.
(**) Voir ci-dessous, note du texte, n° 14.
(***) Voir ci-dessous, note du texte, n° 5.
(iv) P. 8 v°.
(v) *Hist. de l'Astr. mod.*, t. I, p. 288 et suiv.
(vi) *Astronomische Mittheilungen von Dr Rudolf Wolf, Professor der Astronomie in Zürich, XXXI-XXXX. Aus der Vierteljahrschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich besonders abgedruckt.* Zurich, 1872-1876; pp. 6-28.
(vii) P. 13 v°.

les autres et ne mérite pas que nous nous y arrêtions (*). L'auteur n'explique pas comment il entend l'appliquer et se contente de nous avertir qu'il le fera plus tard dans son astronomie (**).

On le voit, même en se plaçant exclusivement au point de vue de la trigonométrie ce n'est pas ce chapitre II, qui donna tant d'importance à l'apparition du *Fundamentum Astronomicum* et qui, même aujourd'hui, rend encore si intéressante la lecture de ce petit volume. Ce succès était dû à une règle qu'Ursus donne dans le chapitre III et que Clavius, bon juge dans la matière, ne craignait pas de nommer " acutum et ingeniosum inventum " (***). On la nommait alors la prostaphérèse. Werner en avait eu la première idée un siècle et demi auparavant. Depuis lors elle était insensiblement devenue d'un usage courant dans les observatoires; Wittich, Tycho Brahé, Burgi la connaissaient; mais Ursus la lançait alors dans le grand public savant, pour la première fois.

La prostaphérèse, je ne dois pas l'apprendre au lecteur, la prostaphérèse, comme l'étymologie du mot l'indique (πρόσθεσις addition, ἀφαιρέσις soustraction), la prostaphérèse, dis-je, consiste essentiellement à remplacer par une addition ou par une soustraction les longues et pénibles multiplications nécessitées par les produits de deux sinus ou de deux cosinus en se servant des formules

$$\text{Cos A cos B} = \tfrac{1}{2}\,[\cos(A - B) + \cos(A + B)]$$
$$\text{Sin A sin B} = \tfrac{1}{2}\,[\cos(A - B) - \cos(A + B)]$$

Qu'on veuille se rappeler, qu'au XVIe siècle une formule de ce genre ne s'obtenait que par des considérations purement géométriques; voie toujours détournée, compliquée et pénible en comparaison de nos procédés algébriques. On appréciera mieux dès lors le mérite du théorème d'Ursus et la profonde sensation qu'il produisit sur ses contemporains.

Cinq ans plus tard, en 1593, Clavius dans son *Astrolabium* (IV) fit faire un progrès notable à la méthode en montrant qu'elle s'applique à la multiplication de deux grands nombres quelconques. Le savant jésuite remplace les nombres par des lignes trigonométriques équivalentes et, *à ma connaissance, le premier*

(*) Voyez : Bierens de Haan, *Quelques quadrateurs du cercle dans les Pays-Bas* (BULLETTINO DE BONCOMPAGNI, t. VII, pp. 103-105).

(**) P. 13 v°.

(***) *Christophori Clavii Bambergensis e Societate Iesu Astrolabivm. Cum privilegio. Romae. Impensis Bartholomaei Grassi. Ex Typographia Gabiana. M.D.XCIII. Superiorvm permissv.* In-4°; pp. 178-194. Bibl. roy. de Belg. V. 5144. — Dans les *Christophori Clavii Bambergensis e Societate Iesu Operum Mathematicorum tomus tertius complectens commentarium in Sphaeram Ioannis de Sacro Bosco et Astrolabium. Moguntiae Sumptibus Antonii Hierat, excudebat Reinhardus Eltz cum gratia et privilegio sacrae Caes. Maiest. Anno M.DC.XI.* In-f°; p. 170. Bibl. roy. de Belg. V. 4818.

(IV) *O. c.*, pp. 94-100.

chez les latins fit ainsi usage dans un ouvrage imprimé d'arcs et d'angles auxiliaires (*).

Pour terminer ce sujet revenons encore un instant à Ursus et à Tycho Brahé. Les deux ennemis en étaient à une des périodes les plus violentes de leur brouille et se lançaient mutuellement à la face des torrents de provocations et d'injures. Voici un des défis d'Ursus :

Zoïle si poteris, tu quoque triangula solvas
Perque sinus solos, absque operante manu ?
Ut divisio neque multiplicatio fiat,
Sit quocunque loco maximus ipse sinus (**).

La trigonométrie de Tycho Brahé, publiée en 1886 par Studnicka (***), montre avec quel succès le grand astronome releva le gant et quel heureux usage il savait faire de la prostaphérèse (IV).

(*) Voici en outre quelques renseignements complémentaires que j'ai réunis sur l'histoire de cette méthode :

1° Ibn Jûnis, astronome arabe, dont les écrits restés manuscrits ne sont connus que par une analyse de Delambre, l'a employé le premier (Delambre, *Hist. de l'Astr. du Moyen Age*, p. 165) ;

2° Rudolf Wolf en a trouvé un second exemple dans un mémoire manuscrit de Burgi relatant une observation du 23 décembre 1590. Ce texte de Burgi est encore inédit (ASTRON. MITTHEIL. XXXII, 1873, p. 60) ;

3° Clavius, le premier, en 1593, *publie* la méthode dans son *Astrolabium* ;

4° Enfin, en 1608, Pitiscus en publie d'autres exemples au chap. 5 de la deuxième édition de sa *Trigonometria*, p. 161, etc. (Voir sur les trois éditions de la *Trigonometria* de Pitiscus la note 27 ci-dessous, p. 116).

(**) *Nicolai Raimari Vrsi Dithmarsi... De Astronomicis hypothesibvs sev systemate mvndano... Pragae Bohemiorvm apvd avthorem : absq ; omni privilegio Anno M.D.XCVII.* In-4°. Cet ouvrage est rarissime. L'exemplaire que j'ai eu à ma disposition appartient à la Bibliothèque de l'Université de Liége. Il est relié à la suite de *Ioannis Keppleri... de Stella nova in pede serpentarii...* Pragae, Typis Pauli Sessii... M.DC.VI, et est coté, I, 121, 5. Houzeau. dans son *Catalog. des ouvrag. d'astron. et de météor. qui se trouvent en Belg.*, Brux. 1878, p. 37, a dans l'orthographe du nom de l'auteur, une faute de nature à rendre les recherches difficiles.

Le passage cité se trouve p. Biij v°.

(***) *Tychonis Brahe triangulorum planorum et sphaericorum praxis Arithmetica.* (Prague, 1886, in-4°).

(IV) Consultez sur la prostaphérèse et son histoire, les beaux travaux de von Braunmühl, surtout : *Zur Geschichten des prostapherischen Methode in der Trigonometrie*, publiée dans le FESTSCHRIFT ZUM SIEBZIGSTEN GEBURTSTAGE MORITZ CANTORS, Leipzig, 1899 (pp. 15-29) et *Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie. Erster Teil. Von den ältesten Zeiten bis zur Erfunding der Logarithmen.* Leipzig, Teubner, 1900 (Voir la table de l'auteur au mot „ prosthaphäresis „, p. 256).

([21]) NOTICE HISTORIQUE SUR LES DIVERSES ÉDITIONS DU CANON MATHEMATICUS DE VIÈTE (*). — *Fran. Vietaei* || *libellorum* || *Svpplicvm in regia* || *magistri insignisque Mathematici varia* || *opera Mathematica.* || *In qvibvs tractatvr canon mathematicvs,* || *sev* || *ad triangvla.* || *Item canonion trian gvlorvm latervm* || *rationalium : vnà cum uniuersalium inspectionum ad Cano-* || *nem Mathematicum, libro singulari.* || *Qvae qvidem omnia illvstrantvr tabvlis* || *& Appendicibus ab eodem authore recognitis.* || (Marque d'imprimeur) || *Parisiis,* || *Apud Bartholomaeum Macaeum, in monte D.* || *Hilarij, sub scuto Britanniae.* || *M.D.C.IX.* || *Cum privilegio regis.* || Grand in-fol. (**) (Bibliothèque du Collège de la Compagnie de Jésus à Louvain).

Voila un titre bien propre à étonner le lecteur qui n'aurait pas suivi attentivement les derniers travaux publiés en Allemagne sur l'histoire des mathématiques. Où ne lit-on pas effet, que le *Canon mathematicus* parut à Paris en 1579, chez Jean Mettayer; que mécontent des fautes d'impression qu'il renfermait, Viète lui-même chercha à en retirer de la circulation tous les exemplaires(***); qu'il devait avec l'*Harmonicon coeleste,* ouvrage aujourd'hui perdu, former le deuxième volume de ses œuvres complètes; que celles-ci ont commencé à être éditées à Leyde, en 1646, chez les Elzevier, sous la direction de François van Schooten (IV); que le second volume ne parut jamais; que tout cet ensemble de contretemps et de fatalités ont fait du *Canon* un des livres les plus rares qui existent? Or voici un exemplaire daté de 1609, au lieu de l'être de 1579, et portant l'adresse de Barthélemy Macaeus au lieu de celle de Jean Mettayer.

Je le laissais entendre en commençant et je le répète encore une fois, si ce détail de bibliographie est encore peu connu, je n'ai pas toutefois la prétention de le donner ici le premier. Cantor et von Braunmühl le mentionnent l'un et l'autre dans leurs *Vorlesungen* (V) et ils ont soin tous les deux de nous dire que l'honneur de l'avoir trouvé revient à Eneström. C'est lui en effet qui dès 1892 signala dans la BIBLIOTHECA MATHEMATICA le Canon de 1609 de la Bibliothèque royale de Stockholm. Il m'a paru qu'il y avait un certain intérêt à confirmer cette découverte, en appelant en même temps l'attention sur le *Canon*

(*) Cette note est le résumé de la communication que j'ai eu l'honneur de faire aux membres de la 1re section de la Société scientifique en octobre 1900.

(**) La démonstration de la loi du Sinus se trouve à la p. 23.

(***) Ce renseignement est donné par Montucla, au tome I de son *Histoire des Mathématiques* (Paris, Agasse, an VIII, p. 610).

(IV) *Francisci Vietae Opera mathematica, in unum volumen congesta, ac recognita opere ac studio Francisci a Schooten Leydensis Matheseos professoris. Lugduni Batavorum. Ex officinâ Bonaventurae et Abrahami Elzeviriorum, CIↃ.IↃ.CXLVI.* In-fol. Voyez la préface des Elzevier (p. 5 n. ch.).

(V) Cantor, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik,* 2e Band, 2 Auflage, Leipzig, Teubner, 1900, p. 583. — Von Braunmühl, *Vorlesungen über Geschichte der Trigonométrie.* I Teil. Leipzig, Teubner, 1900, p. 138.

mathematicus de la Bibliothèque du Collège de la Compagnie de Jésus à Louvain.

Qu'on me permette cependant de n'être pas sur tous les points d'accord avec les savants professeurs allemands, et de me séparer d'eux dans une des conséquences qu'ils déduisent de la trouvaille assez inattendue d'Eneström. Je voudrais dire ici en quoi et pourquoi; c'est l'objet de cette note.

Viète, on le sait, était fort mécontent de sa première édition. Son *canon* disait-il était " infeliciter editus ", bien mal édité (*). A plusieurs reprises, dans son livre des *Réponses sur divers sujets de mathématiques* (**), il laisse entrevoir le dessein qu'il avait formé de le republier. Le *Canon* de 1609 serait d'après Cantor et von Braunmühl une deuxième édition, non pas de Viète qui était mort depuis six ans, mais d'un libraire quelconque, mettons de Barthélemy Macaeus, car mes honorables contradicteurs ne le nomment pas. Celui-ci aurait repris à ses risques et périls le projet de Viète et l'aurait enfin mis à exécution.

Je ne puis partager cette manière de voir. Un examen attentif du *Canon* de Louvain me donne la conviction que les exemplaires de 1609 ne sont autre chose que de vieux *Canones* de 1579 qu'on a cherché à rajeunir en renouvelant leur première feuille, c'est-à-dire le titre, la table et la préface.

Quand un ouvrage rare comme le *Canon* est en même temps l'œuvre d'un auteur célèbre comme Viète il jouit aisément d'un privilège; c'est de faire les délices de tous les bouquinistes et amateurs de vieux livres. Aussi pour trouver des descriptions bibliographiques du *Canon* n'avons-nous que l'embarras du choix. Je m'arrêterai à deux des plus importantes, celle du *Manuel du libraire et de l'amateur de livres* de Brunet (***) et celle du *Trésor de livres rares et précieux* de Graesse (IV).

Dans l'exemplaire de Libri vendu en 1857, dit Brunet, le verso du titre était blanc; dans l'exemplaire aux armes de de Thou qui figurait à la vente Labey, au verso du titre se trouvait indiqué le contenu de la première partie de ce grand

---

(*) *Francisci Vietae variorum de rebus mathematicis responsorum liber VIII. Cujus praecipua capita sunt, De duplicatione Cubi, et Quadratione circuli, Quae claudit* Πρόχειρον, *seu Ad usum Mathematici Canonis Methodica. Turonis apud Jamettium Mettayer, Typographum Regium, 1593.* In-fol. (p. 15, r°). Bibl. roy. de Belg. V. 4908. C'est l'édition originale. Dans l'édition Schooten, p. 323.

Voici au sujet des difficultés que rencontrait Viète un passage curieux et peu connu de la préface du *Canon*. C'est l'éditeur qui tient la plume.

" Novo et insolito labore deterriti artifices, sculptores, fusores, librarii, locarunt suas operas difficulter, et locatas praestiterunt ocitantissime. Operariorum morositatem et socordiam excitabat auctoris praesentia et cura, sed eam homini ad altiora magistratuum subsellia erecto et negotiis pleno, non [illegible] res postulabat adcommodare. "

(**) Éd. de 1593, pp. 15 r° et 30 v°; éd. Schooten, pp. 371 et 400.

(***) [illegible] Paris, Didot, 1864, col. 1212.

(IV) [illegible] Rudolf Kuntze, 1862, t. VI, p. 312.

volume; enfin " le catalogue Longman pour 1816 et celui de 1820 en annonçaient un exemplaire avec un titre daté de Londres 1589 (*) „. Qu'on veuille bien le remarquer, ce dernier est par conséquent de dix ans postérieur à l'édition de Paris.

Voilà donc déjà d'après Brunet trois titres, et surtout deux dates différentes.

Graesse ne parle pas autrement que lui. Dans certains exemplaires, dit-il, au verso du titre se trouve indiqué le contenu de la première partie du volume, dans d'autres ce verso est blanc (**). Il passe cependant sous silence les *Canones* datés de Londres 1589.

Que conclure de tout ceci? Sinon que les titres des divers exemplaires du *Canon* varient beaucoup. Personne ne s'était cependant avisé jusqu'ici de faire autant d'éditions distinctes, que de titres différents.

Après le titre, j'ai collationné sur le *Canon* de Louvain les numéros et les signatures des pages, en les comparant à celles de l'édition de 1579, qui sont minutieusement indiqués par Brunet et par Graesse (***). Cette pagination est compliquée, bizarre même, on le sait; néanmoins la concordance est parfaite. J'ai lu, en outre, avec le texte original sous les yeux, la charmante étude que Hunrath vient de consacrer au *Canon mathematicus* de Viète dans le FESTSCHRIFT ZUM SIEBZIGSTEN GEBURSTAGE MORITZ CANTORS (IV). L'auteur s'est servi, nous dit-il, de l'exemplaire de la Bibliothèque de Cassel, qui est de 1579 (V). En maint endroit il en signale en passant les fautes d'impression, " les bonnes fautes „, c'est bien cette fois le cas de le dire; elles se retrouvent toutes dans l'édition de 1609 (VI). Mais il est superflu d'insister plus longuement, M. von Braunmühl ayant eu soin

(*) *Loc. cit.*

(**) *Loc. cit.*

(***) *Loc. cit.*

(IV) Leipzig, Teubner, 1899; publié en supplément dans le ZEITSCHRIFT FUR MATHEMATIK UND PHYSIK.

(V) *Op. cit.*, p. 213.

(VI) Les fautes dont il faut tenir compte ici sont évidemment celles qui sont purement typographiques et dues à la négligence des correcteurs d'épreuves. Deux d'entre elles ont surtout attiré mon attention.

Après les feuilles signées α-ζ, suivent quatre autres signées d'étoiles. Graesse dit (*loc. cit.*) que dans plusieurs exemplaires, la signature de la troisième fait défaut. C'est une particularité que l'on rencontre à la fois dans les *Canones* de Louvain et de Cassel (Pour ce dernier, voyez Hunrath, O. c. p. 217).

Ensuite dans la pagination des *Vniversalivm inspectionvm ad canonem mathematicvm liber singularis* quatre nombres sont erronés. Ce sont ceux des pp. chiff. 33 au lieu de 25, 34 au lieu de 26, 39 au lieu de 31, 40 au lieu de 32. Le *Canon mathematicus* de Cassel a identiquement les mêmes fautes (V. Hunrath, p. 230).

de dire lui aussi à ses lecteurs que les éditions de 1579 et de 1609 sont identiques (*).

Voici enfin un dernier genre d'arguments plus convaincants encore, si c'est possible, que ceux qui précèdent.

En examinant le papier du *Canon* de Louvain, on s'aperçoit aisément qu'il est différent dans les quatre premières pages et dans le corps de l'ouvrage. Dans le papier qui a servi pour celui-ci les vergeures sont plus espacées entre elles, que dans celui de la première feuille. La différence est d'à peu près un centimètre.

Ensuite, si pour rajeunir ses exemplaires, l'éditeur de 1609 s'est mis en frais d'un nouveau titre, il a cependant hésité à faire la même dépense pour les dernières pages. Le *Canon mathematicus* est terminé par une feuille entière, dont la 1re et la 4e pages sont blanches, tandis que la 2e et la 3e forment ensemble un grand tableau intitulé : *Canonicae Analogiae Sphaerici Trianguli rectanguli.* Tout au bas dans le coin de gauche, on y lit en caractères bien apparents : " Excudebat Ioannes Mettayer in Mathematicis Typographus Regius || M.D.LXXIX || Cum privilegio. " Cette phrase se trouve dans l'édition de 1609, comme dans celle de 1579. Or le *Canon* de Louvain présente une particularité bien digne d'attention. La date M.D.LXXIX y a été modifiée par l'éditeur au moyen d'un procédé des plus primitifs. Il s'est contenté de coller au-dessus du nombre M.D.LXXIX un petit rectangle de papier portant le millésime M.D.C.IX imprimé, mais qui permet néanmoins de lire encore très aisément par transparence le premier nombre.

Je conclus.

Le *Canon mathematicus* est un ouvrage de la plus haute importance dans l'histoire de la trigonométrie. J'ai déjà dit qu'il était devenu des plus rares. On en signale les exemplaires et on les compte à peu près avec le soin que l'on apporte à faire le relevé des manuscrits d'autres auteurs. Eneström et après lui Cantor et von Braunmühl nous ont donc appris un fait bien propre à intéresser tous ceux qui prennent goût à l'histoire des mathématiques. En raison même de la curiosité qu'il excite, j'ai cru utile d'en mieux préciser la nature.

Il n'existe à proprement parler qu'une seule édition du *Canon mathematicus*, celle de 1579 ; mais on y a adapté des titres divers suivant les besoins des circonstances. Sans doute de nos jours un pareil procédé paraîtrait étrange; il n'en était pas de même à la fin du seizième siècle. Il ne cause aucune surprise pour peu que l'on soit au courant des usages de la librairie de l'époque.

(22) Les deux démonstrations sont données dans le tome II des *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* de Cantor (2e Aufl.); celle de Regiomontan à la page 267, celle de Snellius à la page 706. Cependant ni Snellius, ni Rheticus, ni Coignet, ni Ursus Dithmarsus n'ont la double circonférence et le double triangle qui rend la démonstration de Snellius si parlante quand on l'expose comme le fait Cantor. Quant à Viète on ne le reconnaîtrait plus s'il

(*) " Dagegen erschien 1609, sechs Jahre nach seinem Tode, eine unveränderte Ausgabe des Werkes zu Paris. " (O. c., p. 158).

s'exprimait comme tout le monde ; il ne fait pas de figure et se contente de dire que la proposition se démontre " ex inscriptione trianguli in circulo ".

(23) " De Triqvetris, etc., pp. 100-102.

Je n'ai jusqu'ici rencontré cette méthode de résolution d'un triangle dont on connaît les trois côtés, dans aucun auteur antérieur à Rheticus. Je ne crois pas me tromper en disant qu'elle est de lui.

(24) *De Triangulis*, Lib. I, Prop. 42-47, pp. 35-40.

(25) *Euclidis opera omnia ediderunt J. L. Heiberg et H. Menge. — Euclidis elementa edidit et latine interpretatus est J. L. Heiberg.* Vol. I. Lib. I-IV continens. Lipsiae Teubner MDCCCLXXXIII. Lib II, prop. 13, p. 158 et seq.

(26) *De Triangulis*, Lib I, Prop. 35, pp. 38 et 39.

Voici comment s'opérait la partie principale d'une transformation de ce genre. Me conformant à un usage très moderne, je prie le lecteur de bien vouloir faire la figure.

Soit ABC, le triangle proposé et a, b, c, les côtés opposés respectivement aux angles A, B, C. rangés par ordre de grandeur; $a > b > c$. Il s'agit de trouver la valeur du segment HB déterminé sur BC par la hauteur AH.

Du sommet A comme centre avec c pour rayon décrivons une circonférence qui coupe a en D, b en E, et le prolongement de b en F. La 35e proposition du 3e livre d'Euclide donne

$$\frac{\mathrm{CB}}{\mathrm{CF}} = \frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{CD}}$$

c'est-à-dire

$$\frac{a}{b+c} = \frac{b-c}{a-2.\,\mathrm{HB}}$$

etc.

(27) NOTE HISTORIQUE SUR LA FORMULE

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{tg\,\frac{1}{2}\,(\mathrm{A}+\mathrm{B})}{tg\,\frac{1}{2}\,(\mathrm{A}-\mathrm{B})}.$$

Cette formule a jadis attiré d'une manière toute spéciale l'attention de Delambre. Peut-être, n'est-il pas sans intérêt de compléter ici les renseignements qu'il a réunis sur elle et de les rectifier en quelques points.

Au fond il ne sait pas trop à qui l'attribuer. Dans son *Histoire de l'Astronomie du Moyen Age* (*), il dit qu'elle est de Viète, qui l'a effectivement donnée dans le chapitre XIX du *Variorum de rebus mathematicis responsorum Liber VIII* (**). " Voilà une formule très utile, remarque Delambre, et qui est restée. "

Il y revient ensuite constamment dans son *Histoire de l'Astronomie moderne* et la signale, dans les *Triangulorum geometriae libri quatuor* du gantois van

(*) Paris, Courcier, 1819. In-4°. Chap. VIII, p. 468.

(**) Turonis, 1593, p. 32 r°. Dans l'édition des Elzevier, p. 402.

Lansberge (*), dans les *Trigonometriae libri quinque* de Pitiscus (**), dans la

---

(*) Paris, Courcier, 1821. In 4°, t. II, p. 42.

La première édition de la trigonométrie de van Lansberge date de 1591. Elle est rare et se trouve à la Bibliothèque de l'Université de Louvain, Sciences, n° 569. En voici le titre : *Philippi Lansbergi triangulorum geometriae libri quatuor in quibus novâ et perspicuâ methodo et* ἀποδείξει, *tota ipsorum triangulorum doctrina explicatur. Ad Senatum Populumq ; Middelburgensem Lugduni Batavorum. Ex officina Plantiniana. Apud Franciscum Raphalengium CIϽ.IϽ.XCI.* In-4° de 12 pp. non ch., et 207 pp. chiffrées. C'est la seule édition que Coignet ait pu connaître. La formule qui nous occupe s'y trouve à la page 162.

Depuis lors la trigonométrie de van Lansberge a été rééditée deux fois :

D'abord en 1631... *Editio secunda ab auctore recognita, multisque in locis aucta. Amsterdam, apud Guilielmum Blaeuw. CIϽ.IϽ.XXXI.* In-4° Bibl. roy. de Belg. V. 4986. La formule se trouve pp. 117, 118.

Ensuite en 1663 dans la compilation intitulée : *Philippi Lansbergi astronomi celeberrimi Opera omnia, Middelburgi Zelandiae apud Zachariam Romam, 1663* In folio. Bibl. roy. de Belg. V. H. 8257. La formule se trouve p. 59. C'est cette dernière édition, que cite Delambre.

(**) Id., t. II, p. 33.

Delambre cite la 3e édition, qui est de 1612, et dont voici le titre complet :

Bartholomaei Pitisci Grunbergensis Silesii Trigonometriae sive de dimensione Triangulor. libri quinque. Item Problematum variorum nempe Geodaeticorum, Altimetricorum, Geographicorum, et Astronomicorum libri decem. Editio tertia : Cui recens accessit Problematum Architecticorum liber unus, Francofurti Typis Nicolai Hofmanni sumptibus Ionae Rosae M.DC.XII. In-4°.

La formule se trouve cependant déjà dans les deux premières éditions. (Augsbourg, 1600, pp. 64-67 ; Augsbourg, 1608, pp. 90-93 ; Francfort, 1612, pp. 99-101).

Arrêtons-nous un instant aux trois éditions de la *Trigonometria* de Pitiscus, non pas pour répéter une fois de plus après tant d'autres, que dans ses *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* (2e Band, 2e Aufl., p. 604), Cantor a une erreur de bibliographie à leur sujet et qu'il n'y a pas lieu de révoquer en doute l'existence de l'édition de 1608 ; mais parce que cette édition est en tous cas fort rare et qu'il n'est peut être pas inutile d'en signaler deux exemplaires dans les bibliothèques belges, l'un à la Bibliothèque royale de Belgique. V. 4984, l'autre à la Bibliothèque de l'Université de Gand. Math. 280. La Bibliothèque royale de Belgique possède en outre l'édition d'Augsbourg, 1600. V. 4984[1]. Quant à l'édition publiée en 1612 à Francfort, elle se trouve à la Bibliothèque de l'Université de Louvain. Scienc., n° 644.

J'ai eu tous ces exemplaires en main.

D'autre part dans ses *Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie* (Erster Teil, Leipzig, p. 223) von Braunmühl dit avoir eu les trois éditions à sa disposition à la „ Hof- und Staatsbibliothek „ de Munich.

Voilà donc une question que l'on pourrait croire définitivement résolue et

Trigonometria d'Ougtred (*), dans la *Trigonometria Britannica* de Briggs et Gellibrand (**) et jusque dans les *Joh. Kepleri et Jacobi Bartschii, Tabulae manuales logarithmicae* rééditées par Eisenschmid en 1700 (***). Il ne lui aurait

---

terminée, s'il ne fallait pas toujours craindre qu'une erreur de Cantor ne continue à se répandre malgré toutes les rectifications venant d'ailleurs.

Le lecteur me demandera peut-être l'intérêt spécial qui s'attache à l'existence de ces trois éditions.

Je lui répondrai qu'elles sont assez différentes entre elles et qu'elles accusent un progrès marqué l'une sur l'autre. On peut les regarder comme faisant connaître à des intervalles presque réguliers de quelques années, le progrès de l'enseignement de la trigonométrie, science considérée à cette époque comme l'une des plus relevées des hautes mathématiques.

(*) Id., t. II, p. 89.

Trigonometria, hoc est modus computandi triangulorum latera et angulos, ex canone mathematico traditus et demonstratus collectus ex chartis clarissimi domini Wilhelmi Ougtred Oetonensis per Richardum Stokesium collegii regalis in Cantabridgia socium et Arthurum Haughton generosum... Londini, R. et L. W. Leybourn, 1657. In-4°. Bibl. roy de Belg. V. H. 8078.

Cet ouvrage d'Ougtred renferme bien des choses intéressantes. Delambre n'a cependant rien cru devoir y signaler, à part notre formule, qu'il trouve au chapitre II (pp. 16 et 17) et " une démonstration un peu longue des analogies de Neper. par l'analemme. " (*Hist. de l'Astr. mod.*, t. II, p. 89).

(**) Id., t. II, p. 85.

Trigonometria Britannica sive de dimensione triangulorum libri duo. Quorum prior continet Constructionem Canonis Sinuum Tangentium et Secantium, una cum Logarithmis Sinuum et Tangentium... A clarissimo... Viro Domino Henrico Briggio... Posterior vero usum sive applicationem Canonis in Resolutione Triangulorum tam Planorum quam Sphaericorum... exhibet: Ab Henrico Gellibrand... Goudae. Rammasenius M.DC.XXXIII. In fol. Bibl. roy. de Belg. V. 4987. Lib. II, pars I, cap. II, pp. 62-63. Cette partie de l'ouvrage est de Gellibrand.

(***) Id., t. I, p. 531.

Joh. Kepleri Mathem. Caes. et Jacobi Bartschii Tabulae manuales logarithmicae ad calculum astronomicum, in specie Tabb. Rudolphinarum compendiose tractandum mire utiles. Ob defectum prioris Editionis Saganensis multum hactenus desideratae. Quibus accessit in hac Editione Introductio nova curante Joh. Casp. Eisenschmid P. E. M. D. Argentorati, Apud Theodoricum Lerse Literis Johannis Pastorii CIↃ.IↃ.CC. In-12. Bibl. de l'Observ. royal de Belg. La formule est l'objet de la 2e prop. de la section II de l'introduction, p. 32.

Les tables de Kepler et de Bartchius ont une histoire mouvementée dont il m'est impossible de dire ici un mot même en passant. J'engage le lecteur, que le sujet pourrait intéresser à consulter le t. VII des *Joannis Kepleri Astronomi Opera omnia, edidit Ch. Frisch* (Francofurti a M. Weyder et Zimmer, 1868. — De Logarithmis, proaemium editoris, pp. 295-315; et Appendix II, J. Bartschii tabulae logarithmicae, pp. 436-440).

pas été difficile de la trouver encore ailleurs, par exemple dans le *Speculum astronomicum* d'Adrien Romain (*) ou dans l'*Astrolabium* de Clavius (**). Mais la formule n'est ni de Romain, ni de Clavius, ni de Viète, ni d'aucun des autres auteurs nommés par Delambre. Je la lis déjà dans la *Geometria rotundi* de Thomas Finkius (***), ouvrage très curieux, très suggestif pour parler le langage d'aujourd'hui et qui est, on le sait, de huit ans antérieur à la plus ancienne des trigonométries citées ci-dessus, les *Triangulorum Geometriae libri quatuor* de van Lansberge (IV). Finkius, et cela mérite attention, donne la formule comme neuve et venant de lui (V). On peut le croire, car c'est un écrivain

---

(*) *Speculum Astronomicum sive organum forma mappae expressum : In quo licet immobili omnes qui in primo coelo, primoque mobili spectari solent motus, per canones ea de re conscriptos, planissime sine ullius regulae aut volvelli beneficio repraesentantur. Authore, a Romano, Equite aurato, Comite Palatino, Medico Caesareo : atque ad D. Joannis Novi Monasterii Herbipoli Canonico. Lovanii 1606.* In-4°. Liv. I, cap. IV, p. 22. Bibl. roy. de Belg. V. 4973 et 5125.

(**) *Christophori Clavii Bambergensis e Societate Jesu Astrolabium. Romae, M.D.XCIII.* Lib. I, lemm. 53, p. 267 ; ou bien : *Christophori Clavii Bambergensis e Societate Iesu Operum Mathematicorum tomus tertius. Moguntiae MDC.XI.* p. 123. Clavius donne d'ailleurs cette formule en d'autres endroits de ses œuvres.

(***) *Thomae Finkii Flenspurgensis geometriae rotundi Libri XIIII. Ad Fridericum secundum, serenissimum Daniae et Norvegiae regem, etc. Cum Gratia & Privileg. Caes. Majest. Basileae, per Sebastianum Henricpetri.* A l'avant dernière page : *Basileae per Sebastianum Henricpetri, anno salutis humanae, M.D.LXXXIII. mense augustô.* In-4°. Liv. X, n° 14, p. 292. Bibl. roy. de Belg. V. 4974.

(IV) J'ai dit plus haut (p. 116) que la première édition est de 1591.

(V) En cet endroit de sa *Geometria rotundi*, Finkius traite précisément le problème à l'occasion duquel nous venons d'écrire cette note : Résoudre un triangle dont on connaît deux côtés et l'angle qu'ils comprennent. Il rappelle d'abord la première solution, que nous avons exposée plus haut (pp. 98 et 98). On peut la voir dans Regiomontan, dit-il. Mais, ajoute-t-il aussitôt : Elle est « nimis laboriosa et taediosa. Quare ex superiori doctrina deducto calculo » brevi et facili eoque novo fruere. »

Ce calcul neuf et facile consiste à employer la formule

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{tg\,\frac{1}{2}\,(A+B)}{tg\,\frac{1}{2}\,(A-B)}$$

Voici d'ailleurs l'énoncé textuel de Finkius (*Geom. Rot*, p. 262) :

« Ut semissis summae crurum ad differentiam summae semissis, alteriusque » cruris, sic tangens semissis anguli crurum exterioris ad tangentem anguli quo » minor interiorum semisse dicti reliqui minor est, aut major, major. »

Ce qui veut dire en langage moderne et en supposant pour fixer les idées que l'on a A > B

$$\frac{\frac{1}{2}\,(a+b)}{\frac{1}{2}\,(a+b)-b} = \frac{tg\,\frac{1}{2}\,(180^\circ - C)}{tg\,[\frac{1}{2}\,(180^\circ - C)-B]} = \frac{tg\,\frac{1}{2}\,(180^\circ - C)}{tg\,[A-\frac{1}{2}\,(180^\circ - C)]}.$$

singulièrement délicat et consciencieux, citant toujours les auteurs auxquels il fait des emprunts (*).

([28]) Simon Stévin avait dit antérieurement avec plus de précision que Coignet, qu'il y a " Deux reigles générales des triangles de ceste proposition.

" I. Reigle.

" Si le costé cognu touchant l'angle cognu, fut plus grand que l'autre cognu, " et que l'angle incognu touchant le costé incognu, fut par l'opération trouvé " oblique, il y aura deux solutions.

" II. Reigle.

" Tous les autres triangles de ceste proposition, n'ont qu'une conclusion. "

Voyez : *Memoires mathematiques... descrit premierement en Bas-Alleman par Simon Stevin de Bruges, translaté en François par Jean Tvning... A Leyde, chez Jean Paedts Jacobsz. CIƆ.IƆ.CVIII.* In-fol. (4 tom. en 1 vol. dont le premier est imprimé en 1608 et les trois autres en 1605. — T. 1. Deuxiesme livre de la Cosmographie, des triangles plats, p. 152). Bibl. roy. de Belg. V. 4822[1]; ou bien : *Les Œuvres mathematiques de Simon Stevin de Bruges...* par *Albert Girard Samielois... A Leyde, chez Bonaventure et Abraham Elsevier... CIƆ.IƆ.CXXXIV.* In-fol. II, p. 16. Bibl. roy. de Belg. V. H. 8039 et V. 4822.

Malgré la magnifique étude consacrée à la bibliographie des œuvres de Stevin dans le tome XXIII de la 1re série de la Bibliotheca Belgica par le bibliothécaire en chef de la Bibliothèque de l'Université de Gand, on rencontre, même chez les écrivains les plus autorisés, de si étranges erreurs à leur sujet, qu'on me pardonnera une courte digression.

Il existe quatre éditions plus ou moins complètes des œuvres du Géomètre brugeois. Les trois premières parurent simultanément à Leyde de 1605 à 1608. Ce sont :

Les *Wisconstige Gedachtenissen... Inde Druckerye van Jan Bouwensz.* Bibl. roy. de Belg. V. H. 8037. On peut la regarder comme l'édition originale de l'auteur, quoiqu'un grand nombre de traités n'y soient pas publiés pour la première fois, l'ayant déjà été antérieurement.

Les *Hypomnemata mathematica... Ex officina Joannis Patii.* Traduction de l'ouvrage précédent par Willebrord *Snellius*, à l'exception du *Liber quintus Geographiae, Limenheuretica* qui est de Hugo *Grotius.* Bibl. royal de Belg. V. 4821. Cette traduction est complète quoi qu'en dise Brunet dans son *Manuel du Libraire et de l'Amateur de Livres,* 5e éd., t. V, p. 535.

Les *Mémoires mathématiques...* Chez *Jean Paedts Jacobsz.* Traduction française par Jean Tuning d'une partie des *Wisconstige Gedachtenissen.*

(*) Thomas Fink, médecin et mathématicien, né à Flensburg le 6 janvier 1561, mort le 26 avril 1656, n'est guère connu aujourd'hui que pour avoir donné leurs noms aux tangentes et aux sécantes trigonométriques (Voyez Cantor. *Vorl. über Gesch. der Math.* 2e B. 2e Auflage, p. 604). Il mérite mieux cependant, car l'habitude qu'il a de citer ses sources, le rend souvent précieux dans les recherches historiques. Sa *Geometria rotundi* m'a fourni plus d'un renseignement que j'avais en vain cherché jusque-là ailleurs.

La quatrième édition est la plus connue; c'est celle d'Albert Girard citée ci-dessus. Elle ne contient pas tout ce qu'on trouve dans les éditions précédentes, mais renferme d'autre part des choses qui ne sont pas dans celles-ci.

La Bibliothèque royale de Belgique possède les quatre éditions.

Pour prendre une connaissance complète de l'œuvre de Stévin, il faut y ajouter tout au moins encore les deux ouvrages suivants :

1° *Appendice algebraique de Simon Stevin de Bruges, contenant regle generale de toutes Equations, 1594*. In-8°. Bibl. de l'Univ. de Louvain. Scienc. 587. L'Appendice sort des presses de François van Raphelengen à Leiden. C'est l'ouvrage le plus rare de Stevin. Ph. Gilbert en a le premier signalé l'existence et en a donné une analyse dans les BULLETINS DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE, 28e année, 2e série, t. VIII, pp. 192-197 :

2° *Problematvm Geometricorvm In Gratiam D. Maximiliani Domini a Crvningen etc editorum, Libri V. Autore Simone Stevinio Brugense. Antverpiae. Apud Ioannem Bellerum ad insigne Aquilae aureae*. In-4°. Cantor ayant longtemps révoqué en doute l'existence de cette édition, je crois utile de dire que les bibliothèques belges en possèdent, à ma connaissance, au moins quatre exemplaires : Bibl. roy. de Belg. V. H. 8122; Bibl. comm. de la ville d'Anvers, n° 4856; Bibl. de l'Univ. de Louvain, Scienc. N° 178; Bibl. du Coll. de la Comp. de Jésus à Louvain (Voyez Cantor, *Vorl. üb. Gesch. der Math.*, 2e Aufl., t. II, p. 573, et la rectification de la préface, p. VIII).

(29) L'histoire des notations employées en trigonométrie, vient de faire l'objet d'un mémoire de M. von Braunmühl intitulé: *Die Entwickelung der Zeichen und Formelsprache in der Trigonometrie* et publié par lui dans la BIBLIOTHECA MATHEMATICA (*). On le sait, les progrès de ces notations ont été bien plus lents que ceux des symboles algébriques; leur forme définitive n'est due qu'aux travaux d'Euler et surtout à son *Introductio in Analysim Infinitorum* (**). Sans entrer dans d'autres détails, disons que les trois plus anciens essais de notations trigonométriques datent à peu près de l'époque de Coignet et intéressent l'histoire des mathématiques dans les Pays-Bas.

Le premier est de 1609. Il a pour auteur Adrien Romain, qui l'a donné dans son *Canon Triangulorum Sphaericorum* (***). Les notations de Romain sont compliquées et embrouillées; il est assez naturel que Coignet ne les ait pas employées. Quant aux deux autres essais auxquels nous venons de faire allusion, ils sont de quelques années postérieurs au " Traicté des sinus ". Le second est, en effet, de 1626, et a pour auteur Albert Girard (IV); le troisième est.

(*) III, t. I., 1900, pp. 64-74.

(**) Lausanne, 1748 (Bibl. roy. de Belg. Fét. 408).

(***) Mogvntiae. Ex Officinâ Ioannis Albini. In-4° (Bibl. de l'Univ. de Louvain. Scienc., 325). Les notations sont expliquées à la p. 48.

(IV) *Table des sinus tangentes & secantes selon le raid de 100.000 parties. Avec la trigonometrie tant plane que spheriq;.... par Albert Girard, samielois*. A La Haye chez Iacob Elzevir. M.DC.XXVI. In-12 (Bibl. de l'Univ. de Gand. Math. 1077). — La Bibliothèque de l'Université de Gand possède en outre

de 1632 et est dû à I. I. Stampioen (*).

(30) Le sens du mot *Pantomètre* a beaucoup varié et nous n'y attachons plus la signification que lui donne Coignet.

Ce petit traité me paraît être devenu aujourd'hui d'un intérêt moins grand que les autres. Je pourrais indiquer comme ouvrage du même genre publié aux Pays-Bas vers cette époque la *Praxis nova Geometrica per usum Circini* d'Adrien Metius. *Franakerae, ex officina Vlrici Dominici Balck, Ordinum Frisiae et eorundem Academiae typographi. Expensis Joannis Jansonii Bibliopol. Amstelrodami, M.DC.XXXIII.* In-4°. Bibl. roy. de Belg. V. H. 5133. L'auteur y dit dans l'introduction (p. 3 n. ch.) qu'il s'est inspiré à la lecture d'un opuscule de Galilée, qui a eu son heure de célébrité et qui a pour titre : *Du compas géométrique.*

(31) L'*s* suivi d'un *t* est souvent surmonté d'un accent circonflexe ou relié par un trait à la lettre *t*; nous écrivons *st*.

L'*u* est souvent affecté d'un accent; nous écrivons *u*.

L'*m* et l'*n* redoublés sont d'ordinaire remplacés par un *m* ou une *n* unique surmontés d'un trait ou d'un accent; nous écrivons *mm* et *nn*.

La syllabe *que* à la fin des mots s'exprime par *q* avec un accent; nous écrivons *q;*.

Enfin la syllabe *ment* à la fin des mots s'abrège en *mt* avec un accent; nous écrivons au long : *ment*.

(32) Bibliotheca Scriptorum Graecorum et Romanorum Teubneriana.

(Math. 1078) : *Table des sinvs tangentes & secantes, selon le raid de 100.000 parties.., par Albert Girard mathem. A La Haye, Iacob Elzevir, 1627.* In-12. Edition rare, qui n'est pas mentionnée par Bierens de Haan (*Bibliog. neerland.*, dans le Bullet. de Boncompagni, t. XIV, 1882, p. 620). Son intérêt est cependant purement bibliographique, car à part le titre et quelques préliminaires, ce n'est qu'une reproduction page par page de l'édition de 1626. Dans ces deux éditions, les notations sont expliquées p. I_9 r°.

(*) *Tabvlae sinvvm tangentivm et secantivm... door Fr. van Schooten, gecorrigeert, ende int cort bij gevoecht, d'ontbindige der sphaerischer triangulen... door I. I. Stampioen, de Jonge.* Tot Rotterdam by de Weduwe van Matthys Bastiaensz. Sans date au titre principal; mais la seconde partie, *Kort by-voeghsel der sphaerischer Triangulen. Door I. I. Stampioen Iuniorem; mathematicum,* porte l'indication : *tot Rotterdam... 1632.* In-12 (Bibl. de l'Univ. de Gand. Math. 1076). Les notations sont expliquées au f° Av de cette dernière partie; elles sont très intéressantes et méritent l'attention.

TEXTE DE COIGNET

f° 2 r°

†

TRAICTÉ DES SINUS, CONTENANT VN ABREGÉ POUR FAIRE LES TABLES DES SINUS, PAR LAIJDE DESQUELLES SE FERONT LES TABLES DES TANGENTES, ET SECANTES

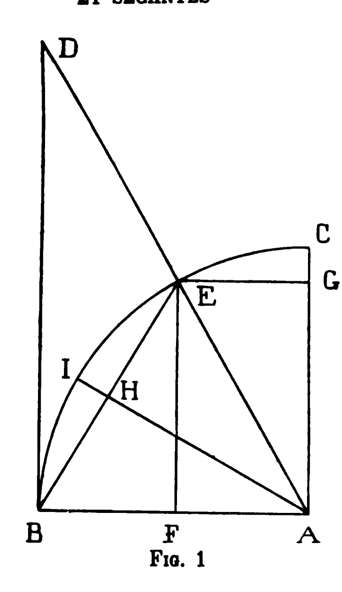


Fig. 1

Notez

L'arc B.I.E, est de 60 degrez. Sa chorde est la ligne droicte B.H.E, dont la moitie est B.H, ou E.H, — laquelle est sinus de l'arc E.I, ou B.I, qui sont de 30 degrez dont sensuijt que les lignes E.G, E.H, et B.H, sont entre elles egalles

Sur le quart, du cercle A.B.C, est notté l'arc B.E, de 60 degrez duquel arc est le

Sinus la perpendiculaire E.F,
Tangente la perpendi..... B.D,
Secante la hijpothenuse... A.D,
Sinus versus la saëtte... F.B,
Sinus de son complement... E.G,
Chorde de larc B.I,E. est... B.H.E,

f° 2 v° Le commencement de la supputation des tables de sinus selon Ptolomee en son Almageste (1), est qu'on sçache trouuer en vn cercle (dont le diametre est cognu) les costez de ses ensuijuantes Figures regulieres, assçauoir du

Decagone, ou Figure de 10. costez egaulx,
Hexagone, ou Figure de 6. costez egaulx,
Pentagone, ou Figure de 5. costez egaulx,
Tetragone, ou Figure de 4. costez egaulx,
Trigone, ou Figure de 3. costez egaulx,

Par lesquelz costez nous aurons les chordes des arcs de 36 degrez, de 60 degrez, de 72 degrez, de 90 degrez et de 120 degrez. et la moitie de ces costez ou chordes seront les sinus de 18, 30, 36, 45, 60 degrez

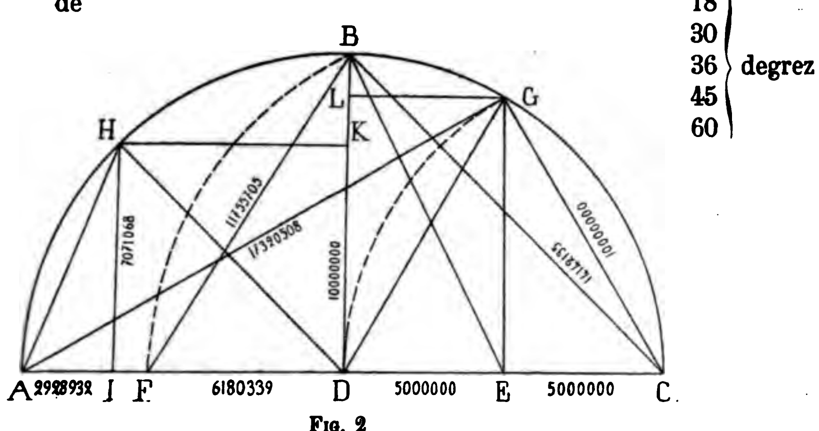


Fig. 2

Soit le mijdiametre A.D, ou D.C, lequel est partij par moitie egallement en E, la longueur E.F, est egalle auecq; la ligne E.B, et sera B.F, costé du Pentagone. Item soit la chorde C.G, egalle auecq le mijdiametre du cercle C.D, sera doncques C.G, coste du Hexagone, et B.C, du Tetragone et la ligne A.G, coste du Trigone. Et si le quart du cercle A.B, est partij egallement en H, seront, H.I, et H.K, egaulx

f° 3 r° Or si on presupose que le mijdiametre D.B, est de 10 000 000 parties egalles on trouuera pour le coste du

Decagone, D.F, 6180339, chorde de 36 degrez
Pentagone, B.F, 11755705, chorde de 72 degrez
Hexagone, C.G, 10000000, chorde de 60 degrez
Tetragone, B.C, 14142135, chorde de 90 degrez
Trigone, A.G, 17320508, chorde de 120 degrez

La moitie de ces chordes seront les sinus de la moitie de leurs arcs, et par ainsij aurons les sinus des arcs ou degrez,

Sinus de degrez:
18 — 3090169
30 — 5000000
36 — 5877852
45 — 7071068
60 — 8660254

Et a cause que le quarrez du mijdiametre D.H, est double au quarré de la perpendiculaire H.I, laquelle est sinus de l'arc de 45 degrez, il est certain que H.I, est aussij 7071068, comme la moitie de B.C,

On pourroit aussij tirer la chorde A.H, laquelle sera costé de l'octogone : or dautant que D.I, est aussij de 7071068, il est certain que le sinus versus de 45 degrez qui est la ligne A.I, sera de 2929932, et la perpendiculaire H.I, est 7071068. ergo sera la chorde A.H, 7653668, dont la moitie est 3826834 (*), lequel sera le sinus de 22 degrez et 30 minutes, ettc[a].

$$\begin{array}{r} 10\,000\,000 \\ 7\,071\,068 \\ \hline 2\,928\,932 \end{array}$$

f° 3 v° Or pour trouuer les sinus des autres degrez et minutes en començant d'une minute iusques a la fin dung quart de cercle qui est iusques au sinus de 90, degrez lequel est 10000000, et on le nomme le sinus entier ou totale. Lordre en cela auons comprins en huict Problemes geometricques, mais pour faire leurs demonstrations sera necessaire de presuponer trois diuerses propositions geometricq; lesquelles lon nomme Lemmata, et sont propositions lesquelles ne seruent a autre chose que pour demonstrer les Problemes qui nous seront necessaires pour construijre la supputation de ces tables de Sinus

La premiere est Ptolomee (2), et dict

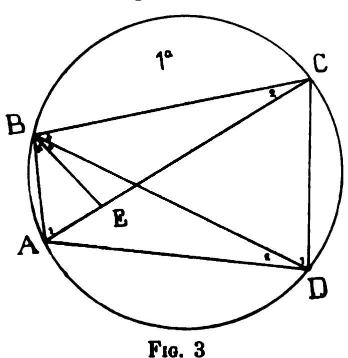


Fig. 3

Soit vn parallellogramme descrit dans vn cercle signe des lettres (**), A,B,C,D, et que dans ce ▭ soyent les diagonalles. Il faut demonstrer que le parallellogramme ▭, compris des diagonales A.C, et B.D, est si grand que les deux rectangles compris des costez oposites de A.B, et C.D, auecq celuij de B.C, et A.D, lequel veut dire que le multiplicat de la diagonale A.C, en B.D, faict autant que multipliant A.B, en C.D, et B.C, en A.D, ettc[a].

(*) *Codex :* 382834. — (**) *Codex :* lrès.

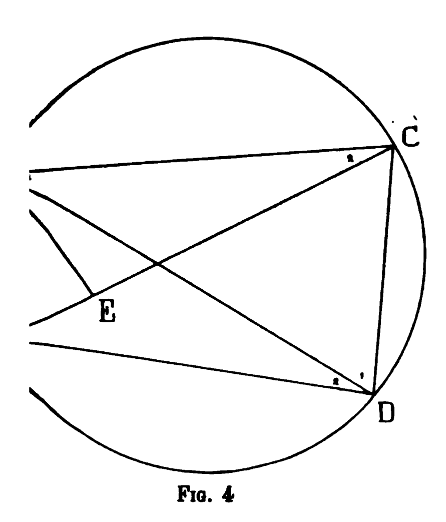


Fig. 4

La demonstration de ceste proposition assumee de Ptolomee est facille et ce faict en ceste maniere

Du point B, est tiree la ligne B.E, faisant langle A.B.E, egal auecq langle D.B.C, et ainsij seront les deux triangles A.B.E, et D.B.C, equiangles, et pour cela ont ilz les costez proportionaulx, sera doncques que comme se tient A.B, auecq A.E, ainsij B.D, a C.D,

Sont aussij les triangles B.E.C, et B.D.A, semblables pour estre de mesme angles et sera come B.C, a E.C, ainsij B.B, a A.D,

f° 4 r° Mais B.D, en A.E, et B.D, en E.C, est tant que B.D, en toute la ligne Diagonale A.C,

Dont sensuijt que A.B, en C.D, et B.C, en A.D, font ensemble tant que B.D, en A.C, lequel estoit a demonstrer

Nottez

Pour abreger l'ouuraige auons obmis les propositions d'Euclide (3) du 3e liure, que les angles marques, 1 et 1, Item 2 et 2, sont egaulx lung a lautre dont prouient Legalité des angles des triangles que disons estre semblables, ergo de costez proportionaulx par la 4e du 6. des Elements (4) :

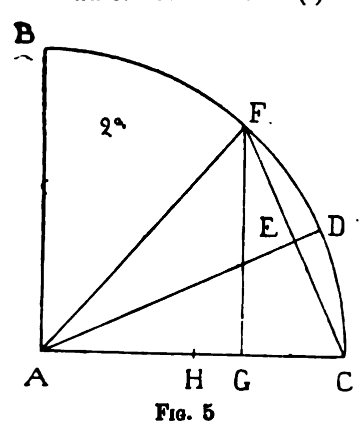


Fig. 5

La 2e est de Johan de Mont roijal (5)

En vn quart dun cercle est ce que le sinus de quelque arc, est le milieu proportionel entre la moitie du demij diametre et le sinus versus du double dudit arc. Soit larc donné C.D, son sinus est la droicte C.E, larc double est C.F, dont le sinus est F.G, et son sinus versus est G.C. Et soit le demij diametre A.C, partij egallement en H, Johan de montroijal dict que la ligne C.E, est milieu proportionel entre les lignes C.H, et C.G,

Notre (*) demonstration

Les deux triangles rectangles C.G.F, et C.E.A, ont langle F.C.A, (**) comun, ergo sont equiangles, dont sensuijt que sera comme A.C, a C.E, ainsij C.F, a C.G, mais de A.C, et C.F, prenons leurs moitiez et sera comme C.H, a C.E, ainsij C.E, a C.G, ou bien direz que C.H, C.E, C.G, sont trois lignes en continuelle proportion. ergo C.E, sinus de l'arc C.D, est milieu proportionel, entre C.H, moitie du demij diametre et C.G, qui est sinus versus de larc double C.F, que nous failloit demonstrer

f° 4 v° La 3e est de Michiel Coignet ([6]),

Soit vng triangle descrit en vn cercle A.B.C, dont la perpendiculaire est B.D, et le diametre du cercle est B.E. Lon demonstrera que le rectangle des Jambes A.B, et B.C, est egal au □ de la perpendiculaire B.D, et du diametre B.E. Cest a dire qu'en multipliant les Jambes A.B, et B.C, l'ung par lautre quil en viendra tant qu'en multipliant la perpendiculaire B.D, par le diametre B.E,

Demonstration

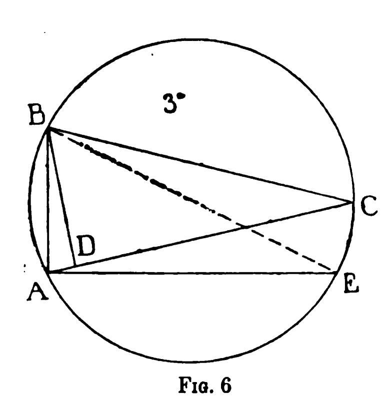


Fig. 6

Aijant tiré le diametre B.E, lon tirera la ligne de E, en A, les triangles rectangles B.D.C, et B.A.E, seront equiangles, a cause que les angles C, et E, sont egaulx. Et par consequent auront les costez proportionaulx, seront doncq; les 4 lignes ensuijuantes en proportion semblable asscauoir comme

B.C, a B.D, ainsij B.E, a A.B.

Le multiplicat doncques de B.C, en A.B, sera autant que de B.D, en B.E, ce que nous failloit demonstrer

Sensuijuent les huict Problemes qui
nous montreront la practicq;
pour calculer les Tables de sinus ([7])

(*) *Codex:* Nre. — (**) *Codex:* + en C.

Le premier Probleme

Aijant trouué le sinus de quelq; arc, comment on trouuera le sinus de son complement

Sensuijt la practicq; en ceste reigle

Ostez le quarré du sinus dudict arc, du quarre du sinus total; et la racinne quarree de la reste, sera sinus du complement dudict arcq

Exemple

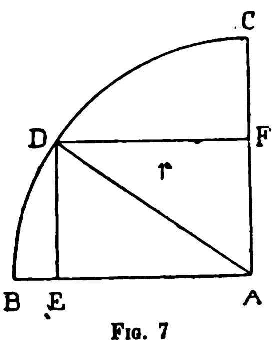


Fig. 7

Ceste figure sert pour la Demonstration geometricq;

f° 5 r°

Soit larc donne de 18 degrez dont le sinus est 30901, estant le sinus total 100000, le □ de 30901, est de 954871801, lequel estant ostez du quaré ‖ 10000000000, la reste sera 9045128199. — dont la racinne quarree est 95105, qui est sinus de 72 degrez, car autant est le complement des 18 degrez quon donnoit

Autrement par la 36e. du 3e. d'Euclide (8)

Soit A.B, 30901, sinus de langle C, de 18 degrez, il nous faut auoir la ligne A.C, qui est sinus de langle B de 72 degrez estant C.B, 100000 —

La Reigle est

Multipliez la somme de 30901 et 100000 auecq; la difference de ces nombres et le produict donnera le quarre du Sinus du complement

Fig. 8

100000 —	100000
30901	30901
130901 —	69099
69099	
9045128199	

9045128199 dont la racine quarree est 95105 pour la ligne A.C ; laquelle est sinus du complement. cest de 72 deg.

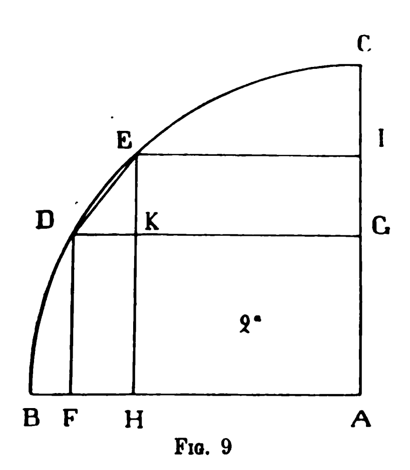


Fig. 9

Le second Probleme

Ayant trouué les sinus de deux diuers arcs, et auecq; cela les sinus de leurs complementz, comment lon trouuera la chorde ou soubstence de larc de leurs differences

Reigle

Le quarre de la difference des sinus des arcs donnez, adiousterez auecq le quarré de la difference des sinus de leurs complementz, et la racinne quarree d'icelle somme sera la chorde qu'on cherchoit

Exemple

Soijent les deux arcs 18 degrez, et 30 degréz, dont les complementz sont 72 degrez et 60 degrez

Sinus de 30 degrez	50000	Sinus du complement	72 degrez ⊥	95105
Sinus de 18 degrez	30902	Sinus de	60	86602
	19098			8503
	19098			8503
	364733604			72301009
	72301009			

Somme 437034613. Dont la racinne est 20905, qui sera la chorde de 12 degrez

f° 5 v°

Corollaire

Par cecij lon trouuera le sinus de la moitie de larc qui est entre deux arcs donnez. et ainsij 10452 (la moitie de la corde 20905) est le sinus de 6 degrez :

Le 3e Probleme

Aijant trouué le sinus de quelq; arc, coment on trouuera le sinus de sa moitie

Cest a dire, par exemple, si on a le sinus de 30 degrez coment on trouuera le sinus de 15 degrez

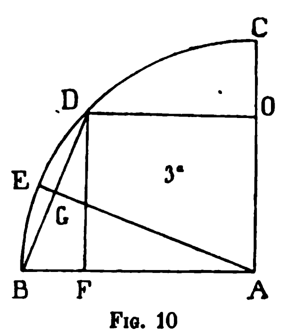


Fig. 10

De ceste figure on prendra la demonstration de la reigle :

La reigle

Adioustez le quarré du sinus de votre (*) arc donné, auecq le quarre de son sinus versus, de ceste somme cherchez la racinne, et la moitie dicelle racinne sera le sinus requis

Exemple

Soit larc donné de 30 degrez, et son sinus 50000, le sinus de son complement est 86602, dont sensuijt que sinus versus desdictz 30 degrez est 13398, leurs quarrez sont 2500000000, et 179506404. leur somme sera 2679506404, dont la racinne quarree est 51764. et la moitie dicelle racinne 25882, est sinus de 15 degrez

Autrement par la 2ᵉ, proposition
precedente de Johan de Montroijal

Multipliez le sinus versus dudict nombre, qui en cest exemple est 13398, par la moitié du Total qui est 50000, vienent 66990000, et la racine quarree sera 25882, comme dessus. La demonstration de la premiere reigle se comprendra par la figure de ce 3ᵉ probleme, et la demonstration de Montroijal est mise cij deuant en la 2ᵉ proposition

f° 6 r° La 4ᵉ. Probleme

Aijant trouué le sinus de quelq; arc coment on cherchera le sinus de son double

Cest a dire si lon at le sinus de 18 degrez coment on trouuera celuij de 36 degrez

La Reigle

Multipliez le sinus de larcq; proposé auec le sinus de son complement, et le produict partirez (**) par le sinus total, le quotient se doublera qui rendra le sinus quon cherchoit

Exemple

Soit larc A.B, de 18 degrez son sinus sera A. F, de 30902. et E.F, sinus de son complement est 95105, il faut trouuer C.D, qui est le

(*) *Codex*. Vre. — (**) *Codex* : partirez, partirez.

Figure de la demonstraõn (9)

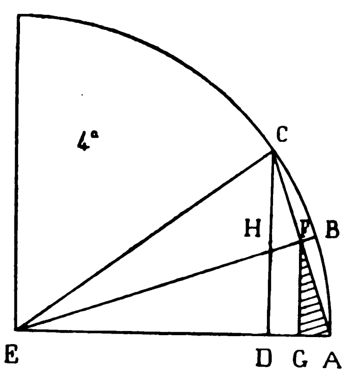


Fig. 11

Il est comme
A.E, E.F, F.A, F.G,
Car les triangles rectangles E.F.A,
et F.G.A, sont equiangles.

double de F.G, multipliez donc 30902 par 95105, le produict partirez par le sinus total 100000. le quotient sera 29389 pour F.G, ou D.H, son double est 58778 pour C.D, qui sera le sinus de 36 degrez

La Demonstration se void en la figure en laquelle les deux (*) triangles rectangles A.F.E, et F.A.G, sont equiangles et partant sont les lignes A.E, E.F, F.A, F.G, en proportion ettcª.

Autrement selon la precedente 2ᵉ proposition (**) de Johan de Montroijal

Le quarré de larc donne partirez par la moitie du sinus total qui est 50000, il en prouiendra le sinus versus de larc proposé doublé

Nottez que la premiere reigle est plus facille

f° 6 v° Le 5ᵉ. Probleme

Quand les sinus de deux diuers arcs sont donnez comment on trouuera le sinus de leur somme

Comme si on disoit iaij les sinus de 6 degrez et de 12 degrez. donnez moij le sinus de 18 degrez

La Reigle

Multipliez le sinus du premier arc, auecq le sinus du complement du 2ᵉ. arc, et aussij multiplierez le sinus du 2ᵉ. arc, auecq; le complement du premier arc, la somme de ces deux produict partirez par le sinus total, et le quotient sera le sinus qu'on cherchoit

Exemple

Soijent les arcs 12 degrez le premier, et 6 degrez le second et seront leurs sinus comme sensuijt

---

(*) *Codex :* le deux.

(**) *Codex :* propotition.

Le sinus de 12 degrez est 20791, et de son complement 97815.
Le sinus de 6 deg. est 10453, et de son complement 99452

20791	10453
99452	97815
2067706532	10224 60195
	20677 06532
par 100 000 (*) =	30901 | 66727

facit 30901. qui est sinus de 18 degrez

Demonstration

Soit *a.b,* sinus de 12 degrez. son complement *a.d,* Item *b.c,* sinus de 6, son complement *c.d,* Le sinus total est *b.d :* les quattres costez du quadrangle sont cognus auec le diamètre *b.d,* sera aussij par la premiere proposition de Ptolomee trouué *a.c,* sinus de 18 degrez

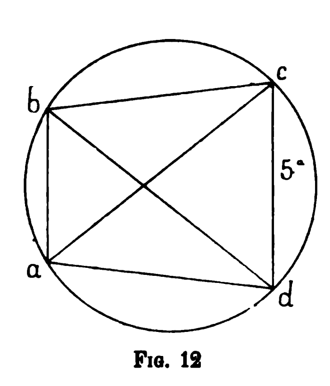


FIG. 12

La suputation prend par tout les moities, cest les sinus en lieu des çordes, et le mijdiametre pour lentier

Le 6e. Probleme

Aijant les sinus de deux arcs diuers, coment on trouuera le sinus de larc de leurs differences ([10])

f° 7 r° Ce probleme est contraire au precedent et monstre la maniere qu'en aijant pour exemple le sinus de 18 degrez et de 12 degrez. comment on trouuera celuij de 6 degrez

La Reigle

Multipliez le sinus du premier arc, auecq le sinus du complement du second, et aussij le sinus du 2e. arc, auecq; le sinus du complement du premier. Tirez le moindre produict du plus grand et la reste partirez par le sinus total, et le quotient sera le sinus qu'on cherche

(*) *Codex :* 10 000.

Exemple

Sinus de 18 deg : est 30901, et sinus de son complement 95105
Sinus de 12 deg : est 20791, et sinus de son complement 97814

30901	20791
97814	95105
30225 50414	1977328055
19773 28055	

par 100000 = 10452|22359 facit 10452. pour le sinus de 6 degrez

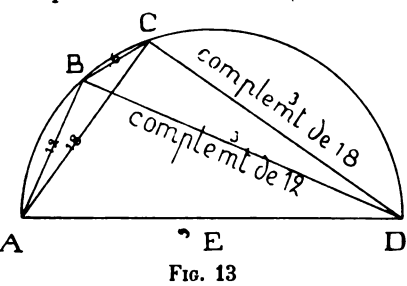


Fig. 13

Ceste figure sert pour la demonstration

Les diagonales B.D, et A.C, sont cognues aussij les trois costez A.D, total, aussij A.B, et C.D, lon cherche B.C,

Probleme 7e

Aijant le sinus de deux diuers arcs coment on trouuera le sinus de larc qui est iustement au mitant

Comme si nous donnoit le sinus de 12, et de 18 degrez, coment on trouuera le sinus de 15 degrez

Reigle

Par le precedent 2e. Probleme, on cherchera la chorde de larc (*) de leur difference, et la moitie (**) sera le sinus de lequation. Come si par exemple les arcs donnez fussent 12 et 18 degrez, on cherchera la chorde de 6 degrez qui sera 10467, sa moitie est 52331 $^1/_2$, sinus de 3 degrez. Or aijant le sinus de 12 degrez et de 3 degrez, on trouuera facillement le sinus de leur some quest de 15 degrez, et cela par le precedente 5e. Probleme.

f° 7 v° Le 8e. Probleme

Si le sinus par exemple de 24 degrez et de 30 degrez sont donnez comment on trouuera le sinus de 36 degrez, ou de 18, car de

(*) *Codex :* la larc.
(**) *Codex :* moitie, moitie.

24 a 30, est 6, ergo lon veut auoir le sinus de 6, plus que 30, ou de 6, moins que 24 ettcª. loperation se peut facillement faire selon les instructions des precedents Problemes

Nottez

Ces deux derniers Problemes, ne sont pas en grand vsaige aupres des Canonistes qui vueillent calculer les Tables de sinus, pour estre fort longues a practicquer

Conclusion des. 8. precedent Problemes

1ª Le premier monstre a trouver le sinus du complement de
90 tout arc, quand dudict arc son sinus est donné. Comme sil nous est
56 donné le sinus de 50 degrez. ce Probleme monstre a trouuer celuij
34 de 40 degrez ettcª.

2ª Le second probleme monstre a trouuer la chorde de larc de la difference quil ij a entre deux arcs donnez auec leurs sinus. Comme pour Exemple si les sinus de 20 et de 30 degrez fussent donnez, comment on trouuera la chorde de 10 degrez, dont la moitie sera sinus de 5 degrez ettcª.

3ª Le 3e Probleme, monstre a trouuer le sinus de la moitié dun arc donné auec son sinus, et par ainsij si le sinus de 18 degrez est donné, on trouuera celuij de 9 degrez, et par celuij de 9 degrez celuij de 4 degrez et 30 minutes, et par consequent celuij de 2 degrez et 15 minutes ettcª.

4ª La 4e. monstre a trouuer le sinus du double de larc donnez et ainsij ayant celuij de 12, on trouuera celuij de 24 degrez, et par celuij de 24 celuij de 48 degrez ettcª.

5ª La 5^{e}. monstre a trouuer le sinus de la somme de deux arcs donnez auecq; leurs sinus

Et ainsij par ce probleme on pourra trouuer le sinus de, 50 degrez, quand ceulx de 30, et 20 degrez seront donnez ettcª.

f° 8 v° 6^{e} Le 6^{e}. Probleme monstre a trouuer le sinus de larcq; que le plus grand arc excede le moindre quant iceulx arcs auecq; leurs sinus sont donnez. Et auecq ce Probleme lon trouuera le sinus (par exemple) de 20 degrez quand celuij de 50, et de 30 degrez sont donnez ettcª.

7^{e} et 8^{e} Le 7^{e}. et 8^{e}. Problemes sont difficilles et les auons cij dessus assez explicquez ettcª.

Pour trouuer le sinus d'un seul degrez
et d'une seulle minute

Quand nous auons cij deuant monstre, selon la doctrine de Ptolomee, de trouuer les sinus de 18, de 30, de 36, de 45, et de 60, degrez, diceulx selon le 2e. et 3e. problemes on trouuera ceulx de

12 degrez	9 degrez
6 degrez	4 degrez 30 minutes,
3 degrez	2 degrez 15
1 degrez. 30, m,	1 degrez 7 $^1/_2$
45, m,	
22 $^1/_2$ minutes	

Item par le 5e. probleme nous trouuerons les sinus de 34 degrez 30 minutes, lequel procede de 30 degrez, et de 4 degrez, 30 minutes

Depuis par le 6e. probleme aijant les sinus de 34 degrez, 30, (*) et de 22 $^1/_2$ minutes, on trouuera celuij de 34 degrez 7 $^1/_2$ minutes

Depuis nous monstrerons la maniere de trouuer le sinus de $^1/_2$. minute et d'une minute entiere

Et aijant le sinus de 34 degrez 7 $^1/_2$ minutes, et aussij de $^1/_2$ minute : cela nous rendra le sinus de 34 degrez et 8 minutes

34...... 8
17...... 4
8......32
4......16
2...... 8

Par ceste subdiuision trouuerons le sinus de 2 degrez et 8 minutes, lequel par le 6e. nous rendra de 34 degrez et 8 minutes, et de deux degrez 8 min, le sinus de 32 degrez iuste, et par consequent :

f° 8 v° Lon pourra aussij facillement par le moijen du 36e. et 32e. degrez trouuer le sinus de deux degrez, et ainsij celuij d'ung degrez

32
16
8 } Degrez
4
2
ergo. 1 degrez aura son sinus

(*) *Codex :* 36.

Mais si lon veut trouuer le sinus dune minute, et ainsij aussij d'une seconde lon fera cela par le sinus de 45, 22 $^{1}/_{2}$, 11 $^{1}/_{4}$, 5 $^{5}/_{8}$, 2 $^{13}/_{16}$, 1 $^{13}/_{32}$ et $^{45}/_{64}$ d'un degrez, or come le sinus de

degrez, 12 est	2079117
6 degrez est	1045385
3. deg : est	523360
1. deg : 30 m : est . .	261769
45. m, ...	130896
22 $^{1}/_{2}$. min . .	65449
11 $^{1}/_{4}$. min, . .	32724
5 $^{5}/_{8}$. min . .	16362

Et ainsij par consequent sera le sinus de $^{45}/_{64}$ d'ung degrez 2045 et plus a raison que le sinus total est 10000000, mais quant on le prend plus curieusement il sera bien 2045 $^{1}/_{4}$

Or, a cause quil nij a point de difference sensible, on dira

$^{45}/_{64}$ . . . 2045 $^{1}/_{4}$ . . . 1, ou bien direz

45 . . . . 2015 $^{1}/_{4}$ . . . 64, facit 29088 $^{82}/_{100}$ lequel seroit 2908882, a 10000000 le total

Nottez [11]

Il ij a vne tres singuliere practicq; trouuee par la reigle. D. Algebre, laquelle monstre que si on at quelque sinus, dun certain arc, ou nombre de degrez. comment on trouuera le sinus de son double, triple, quadruple, quintuple ettc^{a}. et la practicq; est comme sensuijt

On fera vne progression Geometricq; dont le premier nombre sera la moitie du total, asscauoir 5000000, le 2e. nombre sera le sinus de larc donné. et ferez apres comme par exemple demonstrerons :

f° 9 r° Soit qu'auons le sinus de 2 degrez, et voulons auoir le sinus de 4, 6, 8 et 10, degrez

Le sinus de 2 degrez est 348995

Dont sensuijt la progression [12]

5000000	—	—	1 . . . o
348995	—	—	2 . . . x
24359 $^{1}/_{2}$	—	—	3 . . . ξ
1700 $^{1}/_{4}$	—	—	4 . . . η
118 $^{2}/_{3}$	—	—	5 . . . ξξ
8 $^{1}/_{4}$	—	—	6 . . . ξη

Pour doubler

Le premier prendrez deux fois, de la some osterez le 3e. et la reste sera sinus du complement

Exemple

5000000
5000000
10000000
24359 $^1/_2$
9975640 $^1/_2$. sinus de 86 degrez qui est complement de 4 degrez : double des deux degrez dont le sinus fut donné

Pour tripler

Le 2e. nombre prendrez trois foijs. dont osterez le 4e. et la reste sera sinus du triple de l'arc donné

Exemple

348995
3
1046985
1700 $^1/_4$
1045284 $^3/_4$ Sinus de 6 degrez

f° 9 v°

Pour quadrupler

Le premier nombre, prendrez deux foijs, dont osterez quattre fois le 3e. et a la reste adiousterez le 5e. et il en viendra le complement du quadruple

Exemple

24359 $^1/_2$
p; 4
97438

5000000
5000000
10000000
97438
9902562
118 $^2/_3$ la 5e. progression
9902680 $^2/_3$, sinus de 82 degrez

Pour quintupler

Le 2e. nombre prendrez cincq; fois. dont osterez cincq; fois

le 4e. et a la reste adiousterez le 6e. nombre, et viendra le quintuple

348995	1700 1/4
5	5
1744975	8501 1/4
8501 1/4	
1736473 3/4	
8 1/4	
1736482. sinus de 10 degrez	

Linuention du contraire (assçauoir qu'en aijant le sinus de quelque nombre come de 30 degrez qui est 5000000) coment lon trouuera le sinus de son tiers qui seroit 10 (*) degrez, et de son quint qui seroit de 6 degrez : et par ainsij trouuer le tiers de 6 degrez lequel donneroit le sinus de 2 degrez, et des 10 degrez, trouuer le sinus de son quint lequel seroit aussij de deux degrez. et par ainsij on aura Incontinent (par le susdit 3e. probleme) le sinus de vn degrez : Et ainsij par le 5e. probleme, on pourra tousiours adiouster vn degrez. car aijant le sinus de 6 degrez et dung degrez, on aura celuij de 7 degrez. et de ceulx de 10 degrez et dung degrez on trouuera celuij de 11 degrez :

fo 10 ro Cest operation est fort difficille, et de peu dhommes studieux practiquee; Il nij a personne qui à monstré cecij que ludoff von Coelen ([13]), en son liure du cercle, mais fort obscurement et avecq grand trauail. Docteur Adrian Roman, en ha en son liure Intitulé([14]) Triumphus Nonagoni, mis des calculations pour ce faict la, mais pour dire le vraij, cest sottise de perdre son temps, a chose de si grand trauail, puis qu'on le peut trouuer plus facillement comme cij dessus auons demonstré

Sensuijt vne Praticq; pour examiner
si les tables de sinus sont bien calculees

Il faut sçauoir que partons les 90 degrez, en trois ternaires, dont les degrez qui sont du comencement du quadrant, iusques a

(*) *Codex :* io degrez.

30 degrez font le premier Ternere, de 30, iusques a 60 fond le second Ternere, et de 60, iusques a 90 degrez font le 3e. Ternere, ettca.

Premierement quand tous les sinus sont calculez iusques au 30e degrez auec leurs complementz qui sont de 60, iusques a 90. coment on pourra trouuer tous les sinus d'entre deux, cest depuis 30, iusques a 60, et cela par vne simple substraction

La Reigle (15)

Votre (*) arc donné tirerez et adiousterez au nombre de 60. et de ces deux nombres prouenans prendrez les sinus : et leurs difference donnera le sinus de votre (**) arc proposé

Exemple

Lon demande le sinus de 48. degrez

60	60		180
48	48		108
12	108		72
	72 —	9510565	
	12 —	2079117	

Vient pour le sinus de 48 degrez = : 7431448

f° 10 v°

Figure pour demonstrer le precedent Theoreme

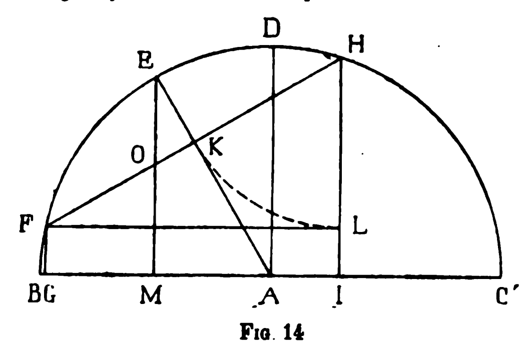


Fig. 14

Larc B.E, est de 60 degrez : et les arcs E.F, et E.H, sont chascun de 48 degrez : dont sensuijt que larc B.F, est seulement de 12 degrez. et l'arc B.D.H, de 108 degrez. que sont de C, en H, larc de 72 degrez. Je dis que si, L.I, est égal auec F.G, que H.L, est aussij sinus de 48 degrez. Veu que H.L, est egale auecq H.K, ou F.K, qui sont sinus de 48 degrez

(*) *Codex*. Vre.
(**) *Codex*. Vre.

Demonstration

Les triangles rectangles A.M.E, et H.L.F, sont equiangles, pour auoir les costez qui font les angles droictz paralleles : et leurs hijpothenuses se coupent a droict angle au point K

Le triangle A.M.E, at l'hijpotenuse, double a sa base, veu que son angle A, est de 60 degrez et E, de 30 degrez, ie dis doncques q; l'hypothenuse F.H, est aussij double a la ligne H.L, dont sensuijt que H.L, et H.K, sont egalles, mais H.K, est sinus de 48 degrez, sera doncques. H.L, aussij sinus de 48 degrez. ce quil failloit demontrer ettc[a].

Pour trouuer les sinus des degrez du premier ternere, quand ceulx du second et tiers sont cognus. Cest de trouuer les sinus doiz le commencement, quand les autres de 30, iusques a 90, sont trouez

Reigle

Cest practicq; est comme la precedente

Exemple

Je demande le sinus de 20 degrez

60	60		
20	20		
40	80	Sinus	— 9848078
	40	Sinus	— 6427877

Vient pour le sinus de 20 degrez 3420201

f° 11 r°

Demonstration

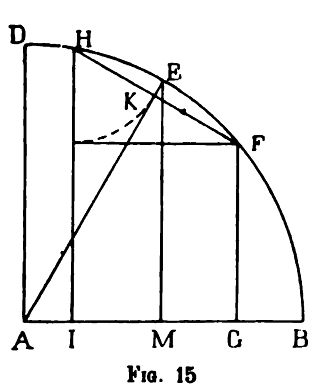


Fig. 15

Les arcs sont
B.E, degrez 60 —
E.F, et, E.H, degrez 20, ergo
B.F, degrez 40, son sinus F.G,
B.H, degrez 80, son sinus H.I,

Les triangles rectangles, A.M.E, et H.L.F, sont semblables comme dessus. Dont sensuijt que le costé H.F, est double, a la ligne H.L, et ainsij H.L, qui est la difference entre les lignes H.I, et F.G, est sinus de larc E.F. ettc[a].

Pour trouuer les sinus du 3e. Ternaire quand du premier et second sont donnez

Reigle

Du nombre proposé : ostez. 60, et la reste osterez de 60, et la somme de ces deux restes sera sinus du nombre proposé

Exemple

Soit le nombre proposé, 80, duquel, J'oste 60, la premiere reste sera 20. Ces 20, J'oste de 60, et la seconde reste sera 40, dont les sinus sont

Sinus de 20, est	3420201	80	60
Sinus de 40, est	6427877	60	20
Somme	9848078	20	40

laquelle somme est sinus de 80, degrez

Conclusion de ces trois Ternaires

La difference des deux sinus, de deux arcs qui sont en esgalle distance de 60 degrez, est Justement autant que le sinus de celuij arc donné, sur ou dessoubz larc de 60, degrez ettca.

fo 11 vo

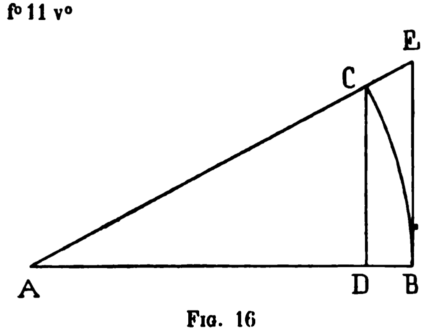


Fig. 16

Coment lon calculera les tables des Tangentes et Secantes par le moijen des tables de sinus ija supputees

Soit A. le centre du cercle, dont larc B.C, est vne partie de sa circonference, sera adoncq; C.D, sinus de larc B.C, Tangens la perpendiculaire B.E, et A.E, sera sa secante

Et puisque larc B.C, est cognu, aussij sera cognu son sinus D.C, et le sinus de son complement A.D, ergo du Triangle rectangle A.D.C, sont cognus les trois costez

Et pour les tables Tangentes et Secantes, est tousiours le costé ou base A.B, 10000000,

Soit larc B.C, de 30 degrez, ergo sera C.D, 5000000, et A.D (1e), 8660254. Si a cest heur ie demande la Tangente de 30 degrez,

cest a dire la perpendiculaire (*) B.E, Je dis q; comme A.D, se tient a C.D, ainsij A.B, a B.E,

A.D	C.D	A.B
8660254	5000000	10000000

faict 5773502, pour la perpendiculaire B.E, laquelle est la Tangente de 30 degrez et ainsij des autres

De la precedente demonstration et operation sensuijt la reigle Pour trouuer de tout arc donné sa Tangente quand le sinus sera donné

Reigle

Multipliez le sinus de larcq; proposé par le sinus total, et le produict partirez par le sinus du complement, et le quotient donnera la Tangente de larc proposé

Des secantes ([17])

Item puisque du precedent arc B.C, la secante est l'hijpothenuse A.E, icelle trouuerez aussij facillement que le sinus du complement dudict arc, est cognu

12r° Car comme se tient A.D, a A.C, ainsij A.B, a A.E,

Dittes doncq; pour reigle, quon partira le quarre du total, par le sinus du complement de larc proposé, et ainsij pour la Tangente, ie dis pour la Secante de 30 degrez viendra 11547004 :

Sensuijuent aulcunes reigles compendieuses pour le faict des Tables des Tangentes, et Secantes ([18])

1ª Prenez la difference de deux Tangentes, dont les arcs font ensemble 90 degrez, et ceste reste vous donnera la Tangente de la reste d'Iceulx arcs

Et ainsij des Tangentes de 50, et 40 degrez, aurez la Tangente de 10 degrez

Tangente de 50 degrez	119175
Tangente de 40 degrez	83909
90	35266
Tangente de 10 degrez...	17633

2ª Item prenez la Tangente de quelq; arc, auecq la Tangente de la moitie de son complement et la somme fera la secante dudict arc

(*) *Codex*. Pirpendiculaire.

Soit larc donné de 23 degrez et 30 minutes, larc de la moitie de son complement sera 33 degrez et 15 minutes.

90	
23 — 30	
66 — 30	
33 — 15	

Tangente de 23 — 30	43481
Tangente de 33 — 15	65563
Soma	109044

Laquelle somme est la secante de 23 degrez et 30 minutes.

3ª Prenez la Secante, et Tangente de quelq; arc, et leur somme fera la Tangente de larc composé, de larc donné et la moitie de son complement

Soit larc donné 50 degrez. dont sera

La Secante.	155572
La Tangente	119175
Somma	274747

Sera doncques 274747, Tangente de 70 degrez. qui est nombre composé du mesme 50, et de 20, qui est la moitie de son complement

f° 12 v°

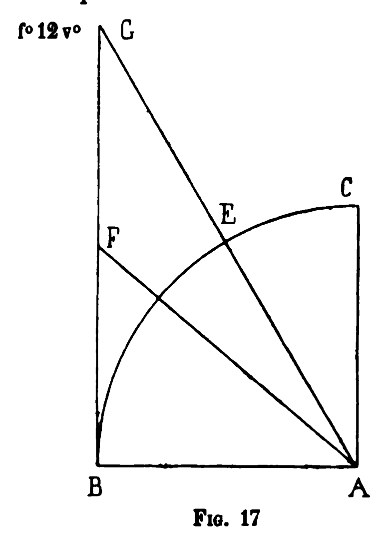


Fig. 17

Demonstration ([19])

Soit larc donné B.D, dont la secante est A.F, et la Tangente B.F, or si on diuise larc du complement egallement en deux au poinct E, sera alors la tangente de larc B.E, la perpendiculaire B.G, laquelle sera egal aux deux droictes A.F, et B.F, car A.F, et F.G, sont egalles, a cause que Triangle A.F.G, est Isoscele, mais quil est Isoscelle,(*) apert en que langle G.A.C, est egale a langle B.G.A, les angles doncques F.A.G, et F.G.A, seront egaulx et aussij seront les costez A.F, et F.G, egaulx

Nottez

De ceste practiq; vient la reigle pour

(*) *Codex* : quil Isoscelle

faire les Tables des secantes, quand celles des Tangentes sont formees et composees. ettc[a].

Reigle pour former la table des secantes par laijde des Tangentes

Reigle

Prenez la Tangente de quelque nombre proposé, laquelle Tangente osterez de la tangente du nombre composé dudict nombre et de la moitie de son complement

Soit le nombre propose de 50 degrez, son complement sera 40, dont la moitie est 20, auecq; 50. font 70,

Tangente de 70 degrez	274747
Tangente de 50 degrez	119175
Secante de 50 degrez est . . .	155572

Abreuiations sur la reigle de trois aux tables de Sinus (20)

1[a] Si lon dict, comme le sinus se tient au total, ettc[a]. Dictes le total se tient a la secante du complement

Soit larc donne, 20 degrez 4 min'. dont le sinus est 34311 et la reigle soit telle, 34311... 100000... 8756, ettc[a]. prenez la secante de complement de 20 degrez 4. min'. qui sera 291449 et direz

100000 — 291449... 8756 ettc[a].

Demonstration

13 r°

Soit larc donné B.D, son sinus sera D.G, et la secante de son complement est A.F, et il sera comme G.D, a D.A, ainsij A.D, a A.F. ergo pour D.G, a A.D, prendrez A.D, a A.F, ettc[a].

Fig. 18

2[a] Item si lon dict. la Tangente de quelq; arc, se tient au total, au lieu de ces deux nombres pour dire, le total se tient a la Tangente du complement dudict arc proposé

Soit larc propose, 21 degrez, 30 minutes. Dont la tangente est 39391

La reigle sera
39391... ad, 100000... combien ettc[a].
Le complement de 21 degrez, 30 minutes est 253865, direz donques. 100000 — 253865, combien ettc[a].

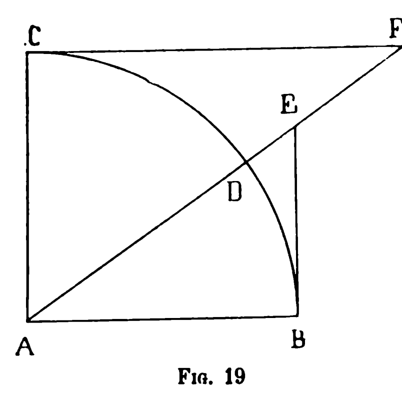


Fig. 19

Et en ces deux reigles viendra vn mesme quattriesme nombre, car les proportions de 39391, a 100000, et de 100000, a 253865, sont egalles et semblables

Demonstration

Soit larc proposé B.D, dont la Tangente est B.E, et la Tangente de son complement est C.F, or dautant que les (*) Triangles rectangles A.B.E, et A.C.F, sont equiangles, il est certain que come se tient B.E, a la tangente a A.B, total, ainsij le total A.C, a la tangente C.F, ettc[a].

f° 13 r°

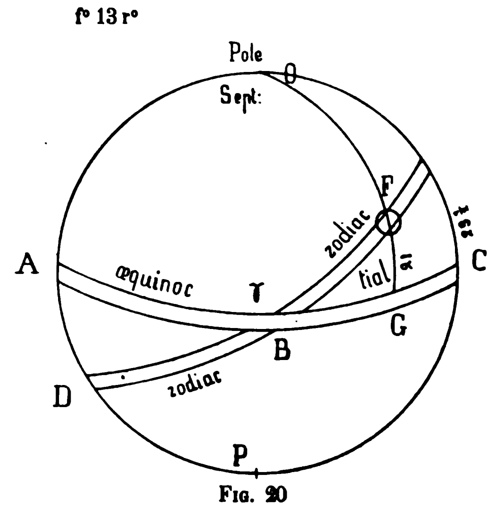


Fig. 20

Or ([21]) pour monstrer lusaige de ces deux precedentz abreuiations, prenons pour exemple, qu'au 25[e]. iour de maij lan 1612, Jaij trouue en Bruxelles a midij la haulteur du soleil dessus l'horizont de 60 degrez, et puis que la hauteur de l'Equinoctial, ij est de 39 degrez. il est certain q; la declination du soleil estoit de 21 degrez septentrionaulx, on demande en quel degrez du zodiac estoit le soleil 60 39 — 21

Entendrez en ceste Figure que le demij cercle Equinoctial est A.B.C, le demij zodiac, ou chemin du soleil D.B.E, — L'equinocte sera

(*) *Codex :* le

en B, et la plus grande declination en E. le pol du nort en O, et de Sud en P, (*) larc C.E, est de 23 1/2 degrez

Or prenons que le soleil au 25^{e}. de maij estoit en F, le quart du cercle venant du pole O, et passant le soleil F, coupe le cercle equinoctial a droict angle, en G, et larc G.F, est la declination du soleil, laquelle en cest exemple est de 21 degrez la demande est combien sera larcq; B.F,

Dittes par la reigle de Sinus larc C.E, se tient au total de larc B.E, tout ainsij que le sinus de larc G.F, se tient a larc B.F,

E.C,	B.E,	F.G,
23 $^{1}/_{2}$	90	21
39875	100000	35838 : facit 89873

Mais notre (**) premiere abreuiation, dict qu'au lieu de sinus de 23 $^{1}/_{2}$ degrez pourrez prendre la secante de son complement 66 $^{1}/_{2}$ laquelle est 250784, et direz 100000... 250784... 35837. facit 89873, le sinus 89873 donne iustement 64 degrez pour larc B.F, et
es 30 puisque 30 degrez donnent vn signe, il est certain que le soleil
ar^{e}. 30 estoit au 4e. degrez du signe de Gemini ettc^{a}.
ni, 4
64

Acheué le 19e. D'octobre 1612
Par Michiel Coignet Mathematicien celebre de
leurs Altezes sere^{mes} ([22]).

(*) *Codex :* de en 'Sur en P.
(**) *Codex :* nre.

NOTES DU TEXTE

(1) *Claudii Ptolemaei opera quae exstant omnia Volumen I. Syntaxis mathematica edidit J. L. Heiberg, professor Hauniensis Pars. I, Libros I-VI continens. Lipsiae in aedibus B. G. Teubneri, MDCCCLXXXVIII.*

Dans cette édition, le 9e chapitre du livre I des anciennes éditions porte maintenant le n° 10. C'est dans ce chapitre que se trouvent les sujets indiqués ici (*).

Coignet ne nommant que Ptolémée, je rappellerai à ceux de mes lecteurs, qui seraient peut-être peu familiers avec les géomètres grecs, qu'avant Ptolémée, Euclide avait déjà donné la manière d'inscrire tous ces polygones réguliers dans la circonférence (**), mais que Ptolémée a cependant une solution originale et élégante de l'inscription du pentagone et du décagone. De nos jours elle semble, il est vrai, avoir disparu de l'enseignement, mais elle a été donnée si souvent ailleurs qu'il est superflu de la répéter une fois de plus ici. On la trouverait au besoin dans l'*Histoire de l'Astronomie ancienne* de Delambre (***).

(2) *Claudii Ptolemaei... ed. Heiberg, Synt. math.*, t. I, p. 36.

(3) *Euclid... ed. Heiberg...*, t. I, p. 220. C'est la prop. 21 du liv. 3.

(4) *Euclidis opera, ed. Heiberg. Elementa, vol. II, libros V-IX continens,* Lipsiae MDCCCLXXXVIII, p. 84.

(5) NOTE SUR DEUX OUVRAGES DE REGIOMONTAN. — En remplaçant sin vers 2A par R — cos 2A, la proposition que Coignet nomme théorème de Regiomontan, peut s'écrire :

$$\mathrm{Sin}^2 A = \tfrac{1}{2} R (R - \cos 2A)$$

Je la trouve dans les notes de Regiomontan sur Albategnius, et dans sa *Compositio tabularum sinuum.*

(*) T. I, p. 32.

(**) *Euclidis opera omnia. Ediderunt J. L. Heiberg et H. Menge. Euclidis elementa edidit et latine interpretatus est J. L. Heiberg Dr. Phil. Vol. I, libros I-IV continens. Lipsiae in aedibus B. G. Teubneri MDCCCLXXXIII.* Inscript. du carré, prop. 6, p. 284; du pentag., prop. 11, p. 298; de l'hexag., prop. 15, p. 312; du pentedec., prop. 16, p. 318. Quant au triangle équilatéral, son inscription à la circonférence est une conséquence immédiate de la prop. 2, p. 272.

(***) T. II, liv. III, ch. II, pp. 37-38.

Dans les *Claudii Ptolemaei opera*, édités par Heiberg, cette proposition se trouve : t. I, p. 32 et suiv.

J'aurai à nommer plusieurs fois dans la suite ces deux ouvrages, il est utile de les faire connaître un peu plus en détail.

Un mot cependant d'abord pour dire que Regiomontan n'a fait que réinventer une formule ancienne. Cantor nous apprend qu'elle était connue des Indiens (*) et le baron Carra de Vaux la signale dans l'Almageste d'Aboulwefa (**). Quant à Ptolémée, il a un théorème équivalent sur les cordes, qu'on peut écrire au long en notations modernes (***) :

$$\text{Corde}^2 \text{A} = \tfrac{1}{2} (2\text{R} - \sqrt{4\text{R}^2 - \text{corde}^2\, 2\text{A}}) \times 2\text{R}$$

En effet, en y faisant corde A $= 2 \sin \frac{1}{2}$ A et corde 2A $= 2 \sin$ A, on trouve :

$$2 \sin^2 \tfrac{1}{2} \text{A} = \text{R}(\text{R} - \cos \text{A});$$

mais une transformation de ce genre, ne pouvait que bien difficilement venir à la pensée d'un géomètre de l'époque de Coignet. En tous cas, personne n'eût alors regardé le théorème de Ptolémée et celui de Coignet, comme deux énoncés différents d'une seule et même proposition.

A. La première édition d'Albategnius. — Elle a été publiée en 1527, à Nuremberg, dans une assez mauvaise traduction latine de Platon de Tivoli et contient des notes nombreuses de Regiomontan. C'est un ouvrage fort intéressant par les curieux documents qu'il renferme, et dont la Bibliothèque de l'Observatoire royal de Belgique possède un exemplaire. En voici la description :

Continentur in hoc libro. Rvdimenta astronomica Alfragrani. Item Albategnivs astronomvs peritissimvs de motv stellarvm, ex obseruationibus tum propriis, tum Ptolemaei, omnia cũ demonstratiôibus Geometricis & Additionibus Ioannis de Regiomonte. Item oratio introductoria in omnes scientias Mathematicas Ioannis de Regiomonte, Patauii habita, cum Alfraganum publice praelegeret. Eivsdem utilissima introductio in elementa Euclidis. Item Epistola Philippi Melanchtonis nuncupatoria ad Senatum Noribergensem. Omnia iam recens prelis publicata. Norimbergae anno M.D.XXXVII.

In-4° de 20 pp. non chiff. et 52, 180 pp. chiffrées au r° seul (26,90) :

Les 20 pp. non chiff. renferment :

L'*Epistola nuncupatoria Philippi Melanchtonis ad Senatum Noribergensem* (pp. 2-6).

L'*Oratio Iohannis de Monteregio habita Patauii in praelectione Alfragani. Hac oratione compendiose declarantur Scientiae Mathematicae et utilitates earum* (pp. 7-17).

L'*In Elementa Euclidis praefatio Joh. de Regiomonte* (pp. 18-20).

(*) *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik,* 1e Band, 2e Auflage, Leipzig, 1894, p. 616.

(**) L'*Almageste d'Abû 'lwéfa Albûzdjani,* par M. le baron Carra de Vaux, publié dans le Journal Asiatique, 8e série, t. 19, Paris, p. 416.

(***) *Syntaxis mathematica,* éd. Heiberg, pp. 39-41.

Les 26 f° renferment les *Rudimenta Astronomica Alfragani.* Au bas du f° 26 r° : *Explicit Alfraganus. Norimbergae apud Joh. Petreium. Anno Salutis M.D.XXXVII.*

Les 90 f° renferment le *De Motu Stellarum d'Albategnius.*

Dans son *Histoire de l'Astronomie du moyen âge*, Delambre s'est servi, pour analyser Albategnius, de l'édition imprimée à Bologne en 1645, intitulée : *Albategnius de numeris Stellarum et motibus. Mahometis Albatenii, de Scientia Stellarum liber, cum aliquot additionibus Ioannis Regiomontani ex bibliotheca Vaticana transcriptus.* A la dern. p., Bononiae, M.DC.XLV. Typis Haeredis Victorii Benatii. Superiorum permissu. In-4° (Bibl. roy. de Belg., V. 5089).

La formule de Regiomontan forme l'objet d'une note ajoutée au chapitre III, " Additio Joannis de Monte Regio (*) ".

B. La Compositio tabularum sinuum de Regiomontan (**). — J'en transcris le titre, sur l'exemplaire de la bibliothèque de l'Université de Liége (***) :

Tractatvs Georgii Pevrbachii super propositiones Ptolemaei de Sinibus et Chordis. Item compositio Tabularum Sinuum per Ioannem de Regiomonte. Adiectae sunt et Tabulae Sinuum duplices per eundem Regiomontanum. Omnia nunc primum in utilitatem Astronomiae studiosis impressa. Norimbergae apud Iohan. Petreium anno Christi M.D.XLI. In-fol.; 53 pp. non ch. mais signées A.-G.

Dans le livre VIII de ses *Variorum de rebus mathematicis responsorum*, Viète, parlant des tables de sinus de Regiomontan, les apprécie en ces termes : " *Supputante Regiomontano bene, juste et accurate* (IV). " Il était loin d'être toujours aussi élogieux, quand il parlait de ce genre de travaux. Ainsi, dans le *Canon mathematicus*, il avait déjà eu l'occasion de parler des tables trigonométriques construites avant les siennes. Elles sont faites par des ravaudeurs, " rhapsodi " (V), dit-il fort peu respectueusement; ils n'ont pas de précision dans les calculs et laissent maladroitement s'accumuler les erreurs.

On lira donc peut-être avec intérêt une analyse du petit opuscule de Regiomontan.

Il se compose en tout de sept propositions que nous allons énoncer en langage moderne.

Prop. 1 (VI) :

$$\text{Cos A} = \sqrt{R^2 - \sin^2 A}$$

(*) Dans l'édit. de Nuremberg, 1537, f° 6 v°; dans celle de Bologne, 1645, pp. 9 et 10.

(**) Je résume ici la communication que j'ai faite aux Membres de la 1re section de la Société scientifique, à la session du 25 octobre 1900.

(***) Il est coté I, 78, 5, et est relié à la suite de l'*Instrumentum Sinuum seu primi mobilis* de Pierre Apien (Edit. de Nuremberg, 1541).

(IV) Paris, Mettayer, 1593, p. 40 v° ; Éd. Schooten, p. 417.

(V) P. 17.

(VI) P. B_2 r°.

Prop. 2 (*) : Calcul des sinus *per Kardagas*. L'auteur a soin de définir lui-même ce mot étrange. " Kardaga, dit-il, portio arcus 15 graduum appellatur. " Il s'agit donc du calcul du sinus des arcs du premier quadrant, pris de 15° en 15°.

Prop. 3 (**) :

$$2 \sin^2 \frac{A}{2} = \text{sin. vers } A = R - \cos A$$

Prop. 4 (***) : Calcul de la longueur du côté du décagone et du pentagone réguliers inscrits dans une circonférence.

Prop. 5 (IV) :

$$\text{Corde } (A - B) = \sqrt{(\sin A - \sin B)^2 + (\cos B - \cos A)^2}$$

Regiomontan établit cette formule dans le but de pouvoir calculer le côté du pentédécagone régulier ; mais il a soin de dire qu'elle est générale et applicable dans tous les cas.

Prop. 6 (V) : Si A et B sont deux arcs du premier quadrant, $A > B$, on a

$$\frac{A}{B} > \frac{\sin A}{\sin B}$$

Cette proposition permet de calculer les valeurs des sinus en les comprenant entre deux inégalités de sens contraire. C'est l'application d'une idée que Ptolémée avait eue à propos du calcul des cordes (VI). Il est inutile cependant, dit Régiomontan, d'employer ce procédé à l'exclusion de tout autre. Il en est un plus rapide qui, en pratique, à un moment donné est tout aussi exact. Quand vous aurez calculé rigoureusement tous les arcs du premier quadrant de 15′ en 15′, vous pourrez supposer que les accroissements des sinus sont proportionnels à ceux des arcs et opérer au moyen d'une simple règle de trois.

Et la preuve ?

Elle est purement empirique. J'ai presque partout employé les deux méthodes, dit-il, et j'ai chaque fois constaté que les résultats étaient parfaitement concordants (VII).

Prop. 7 (VIII) : Trouver le sinus d'un arc au moyen des tables.

(*) P. B_2 r°.

(**) P. B_2 v°.

(***) P. B_3 r°.

(IV) P. (B_4) r°.

(V) P. (B_4) r°. La démonstration de Régiomontan est remarquable d'élégance et de simplicité. Je regrette de ne pouvoir la résumer ; mais le lecteur la trouvera, s'il le désire, dans les œuvres de Simon Stévin bien moins rares que la *Compositio tabularum Sinuum* (Édit. d'Albert Girard, II, p. 6).

(VI) *Claudii Ptolem. opera*... Éd. Heiberg. *Magna Syntaxis*, t. I, p. 45 seq.

(VII) P. (B_4) v°.

(VIII) P. C r°.

Cette proposition n'a rien de théorique. Les tables dont il s'agit sont au nombre de deux. Elles donnent l'une et l'autre de minute en minute les sinus de tous les arcs du premier quadrant. La première est construite au rayon 60 000, et la seconde au rayon 100 000 (*).

Il y aurait ici une comparaison aussi instructive qu'intéressante à faire entre les procédés de Régiomontan et ceux dont Rheticus s'est servi dans l'*Opus palatinum;* mais je dois me borner.

(6) Cette réclamation de priorité surprend au premier abord. Je la crois cependant justifiée, à condition d'entendre l'énoncé de la proposition dans le sens rigoureux des termes et de ne pas regarder, comme un théorème équivalent, une proposition qui dirait, par exemple, que les triangles BAE, BAD sont semblables. Il faut juger en cela Coignet, avec les idées de son temps. Dois-je rappeler pour le justifier de combien de manières les Grecs ont tourmenté leurs proportions, et quelle variété de théorèmes ils y distinguaient ? Oserions-nous les énoncer encore aujourd'hui, même dans les ouvrages élémentaires, sans risquer d'encourir le reproche de tomber dans la prolixité et les redites?

Quant à la similitude des triangles BAE, BAD, elle avait été remarquée bien antérieurement à Coignet et Regiomontan s'en était servi dans son traité des triangles (**), pour calculer en fonction des côtés le rayon du cercle circonscrit à un triangle.

(7) Il est peut-être utile d'exprimer les énoncés de ces 8 problèmes, par des formules équivalentes :

Prob. 1 :

$$\cos A = \sqrt{R^2 - \sin^2 A}$$

Prob. 2 :

$$\text{corde } (A - B) = \sqrt{(\sin A - \sin B)^2 + (\cos B - \cos A)^2}$$

Prob. 3 :

$$\sin \tfrac{1}{2} A = \tfrac{1}{2} \sqrt{\sin^2 A + \text{sin. vers.}^2 A}$$

Prob. 4 :

$$\sin 2A = \frac{2 \sin A \cos A}{R}$$

Prob. 5 :

$$\sin (A + B) = \frac{\sin A \cos B + \cos A \sin B}{R}$$

Prob. 6 :

$$\sin (A - B) = \frac{\sin A \cos B - \cos A \sin B}{R}$$

(*) Chacune de ces tables occupe 18 pages.

(**) *De Triangulis.* Lib. II, prop. 23. Edition de Nuremberg, 1533, p. 56.

Prob. 7 :

$$\sin(A - B) = \tfrac{1}{2}\sqrt{(\sin A - \sin B)^2 + \left(\sqrt{1 - \sin^2 B} - \sqrt{1 - \sin^2 A}\right)^2}$$

Prob. 8 : Étant donnés sin A et sin B, calculer sin (2A — B) et sin (2B — A).

Coignet lui-même remarque que les problèmes 7 et 8 sont sans grande importance et nous pouvons en dire autant aujourd'hui de la formule

$$\sin \tfrac{1}{2} A = \tfrac{1}{2} \sqrt{\sin^2 A + \text{sin. vers.}^2 A}$$

La formule

$$\sin 2A = \frac{2 \sin A \cos A}{R}$$

était connue des Arabes. Le baron Carra de Vaux la signale dans l'Almageste d'Aboulwefa (*).

Delambre dit (**) que la formule

$$\text{corde}(A - B) = \sqrt{(\sin A - \sin B)^2 + (\cos B - \cos A)^2}$$

est de Regiomontan. On la trouve effectivement, nous venons de le voir, dans la *Compositio tabularum sinuum* (***). Quant aux formules

$$\sin(A \pm B) = \frac{\sin A \cos B \pm \cos A \sin B}{R}$$

(*) Art. cit. p. 416.

« La considération de la corde, dit Carra de Vaux, conduit vite à l'idée de la » multiplication des arcs, puisque les définitions mêmes fournissent la relation : » $\sin \alpha = \tfrac{1}{2}$ corde 2α. Les formules employées par Abû 'lwéfa sont les suivantes :

$$\frac{\frac{1}{2}\,\text{sin v.}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{R}; \qquad \frac{2R - \text{corde}(\pi - \alpha)}{\text{corde}\frac{\alpha}{2}} = \frac{\text{corde}\frac{\alpha}{2}}{R}$$

$$\frac{\text{corde}\,\alpha}{\text{corde}\frac{\alpha}{2}} = \frac{\text{corde}\left(\pi - \frac{\alpha}{2}\right)}{R}; \qquad \frac{\sin\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)}{\frac{1}{2}R}$$

» La dernière, lorsqu'on l'énonce en vue du calcul et qu'on y fait le rayon égal à » l'unité est notre formule $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$. »

(**) *Histoire de l'Astronomie du Moyen Age*, chap. III, p. 282 et chap. VIII, p. 458.

(***) P. (B_4) r°. Voyez ci-dessus p. 149.

les erreurs qu'on rencontre à leur sujet sont nombreuses et de sens divers. Ces formules sont très importantes dans l'histoire de la construction des tables de sinus, et ont de l'intérêt. Nous leur consacrons la note 10.

([8]) *Eucl. ed. Heiberg...*, t. I, p. 260.

([9]) La perpendiculaire FH abaissée de F sur CD a été oubliée dans le dessin de la figure 11.

([10]) NOTICE HISTORIQUE SUR LES FORMULES sin $(a \pm b)$.

Il est impossible d'être quelque peu familier avec les anciens traités de trigonométrie, sans être frappé de la netteté et de la précision, que la formule

$$\sin(a \pm b) = \frac{\sin a \cos b \pm \sin b \cos a}{R}$$

prend sous la plume de Coignet et de la forme, presque moderne, dirais-je, sous laquelle elle y est énoncée.

Je n'apprendrai rien à personne en rappelant que Claude Ptolémée donne, dans l'*Almageste*, le théorème classique du rectangle des diagonales du quadrilatère inscrit dans un cercle, précisément en vue d'établir à propos des cordes de la somme ou de la différence de deux arcs, les propositions analogues à celles que nous démontrons aujourd'hui à propos des sinus de ces mêmes sommes et de ces mêmes différences (*). A la fin du x[e] siècle, Albategnius substitue aux cordes entières, les demi-cordes des arcs doubles et introduit ainsi l'usage des sinus dans le calcul (**). C'est un de ses plus beaux titres de gloire. Coignet déduit les formules sin $(a \pm b)$ des théorèmes de Ptolémée d'une manière si simple, si naturelle, qu'en lisant sa démonstration on est porté à se dire que ces formules ne sont que ces théorèmes eux-mêmes, énoncés en d'autres termes.

Somme toute, c'est assez vrai et, s'il était permis de faire de l'histoire *a priori*, on se croirait même pleinement en droit d'ajouter, que depuis Albategnius les formules sin $(a \pm b)$ ont évidemment été remarquées par tous les géomètres. Ce serait cependant là une grave erreur; car, quand on remonte aux sources, il faut bien reconnaître que cela n'est pas.

(*) *Claudii Ptolemaei opera Vol. I. — Syntaxis mathematica ed. J. L. Heiberg*, Pars. I, pp. 39-42. — Les démonstrations de l'astronome grec sont très bien exposées par Cantor dans ses *Vorlesungen über Geschichte der Mathem.*, 1[e] Band, 2[e] Aufl. Leipzig, 1894, p. 389, et par Delambre dans son *Histoire de l'Astronomie ancienne*, t. II, liv. III, ch. II, pp. 36-49.

(**) *De Motu stellarum*, chap. III; édit. de Nuremberg, 1537, ff° 5 r°, édit. de Bologne, 1645, pp. 7-14. L'astronome arabe a certainement le mérite d'avoir vulgarisé cette idée; mais les Indiens, et peut-être même quelques Grecs, l'ont eue avant lui (Voyez pour plus de détails von Braunmühl, *Vorlesungen über Gesch. der Trigon.*, Erster Teil, pp. 34, 49 et 260).

Je suis loin d'être le premier à le dire. Voici, par exemple, les réflexions d'un historien autorisé, Montucla, sur ce sujet (*).

" Je ne vois pas, dit-il, que personne avant les premières années de ce siècle, — „ c'est du XVIIIe siècle qu'il s'agit, — je ne vois pas que personne se soit avisé „ de rechercher les formules propres à exprimer les sinus ou cosinus, tangentes „ ou cotangentes des sommes ou différences d'arcs de cercle, de leurs puis- „ sances, etc. Il était cependant bien naturel ce semble et l'occasion a dû s'en „ présenter souvent, de chercher à connaître quel était le sinus ou le cosinus, „ la tangente ou la cotangente d'un arc, qui serait la somme ou la différence de „ deux autres, dont on connaissait les sinus et les cosinus, les tangentes ou „ cotangentes. Les premiers théorèmes sur ce sujet paraissent être l'ouvrage de „ Frédéric-Christian Mayer, l'un des premiers membres de l'Académie de „ Pétersbourg. On a de lui, dans les anciens Mémoires de cette Académie „ pour l'année 1727 (**), une trigonométrie analytique toute fondée sur ces „ théorèmes. Nous allons faire connaître les principaux et divers autres que „ les analystes y ont depuis ajoutés.

„ Si l'on a les arcs y et z, dont les sinus et cosinus soient respectivement „ exprimés ainsi, sin. y, sin. z; cos. y, cos. z, le rayon étant de plus supposé $= 1$, „ on a d'abord les quatre formules suivantes et fondamentales en sinus et „ cosinus des sommes et des différences de ces arcs :

$$\sin.\ \overline{y + z} = \sin.\ y \times \cos.\ z + \sin.\ z \times \cos.\ y$$

$$\cos.\ \overline{y + z} = \cos.\ y \times \cos.\ z - \sin.\ y \times \sin.\ z$$

$$\sin.\ \overline{y - z} = \sin\ y \times \cos.\ z - \sin.\ z \times \cos.\ y$$

$$\cos.\ \overline{y - z} = \cos.\ y \times \cos.\ z + \sin.\ y \times \sin.\ z$$

(*) *Histoire des mathématiques*, Paris, Agasse, an. X, t. III, part. 5, liv. I, nº XXVI, pp. 276 et 277.

(**) Il s'agit des *Commentarii Academiae Petropolitanae*, t. II, *ad annum 1727*. Petropoli, typis Academiae, 1729; pp. 12-30 (Bibl. de l'Acad. roy. de Belgique). Le mémoire de Christian Mayer est intitulé *Trigonometrica F. C. Maieri* (Voyez à son sujet Cantor : *Vorlesungen über Gesch. der Math.*, 3ᵉ Band, Leipzig, Teubner 1898; pp. 539-540).

J'ai cherché à connaître l'impression produite dans le monde savant au siècle dernier par le mémoire de Mayer. Les grandes revues périodiques du temps s'en sont naturellement occupées; elles sont même parfois curieuses à lire, car elles semblent surtout effrayées par la nouveauté et l'étrangeté des notations de l'auteur. " Il faut être consommé, dit, par exemple, le rédacteur des MÉMOIRES DE TRÉVOUX, pour suivre M. Mayer dans ses sçavantes abbreviations. „ (Cahier de nov. 1737, p. 1678). Quant aux ACTA ERUDITORUM, ils nomment le mémoire de Mayer dans le cahier de juillet 1731, p. 298.

„ On trouve de même, que si y et z sont deux arcs, on aura

$$\text{tang.}\ \overline{y+z} = \frac{\text{tang.}\ y + \text{tang.}\ z}{1 - \text{tang.}\ y \times \text{tang.}\ z}$$

$$\text{tang.}\ \overline{y-z} = \frac{\text{tang.}\ y - \text{tang.}\ z}{1 + \text{tang.}\ y \times \text{tang.}\ z}$$

$$\text{sec.}\ \overline{y+z} = \frac{\text{sec.}\ y \times \text{sec.}\ z}{1 - \text{tang.}\ y \times \text{tang.}\ z}$$

$$\text{sec.}\ \overline{y-z} = \frac{\text{sec.}\ y \times \text{sec.}\ z}{1 + \text{tang.}\ y \times \text{tang.}\ z}$$

„ Il est facile à quiconque a le goût de l'analyse, d'apercevoir l'élégance et „ l'analogie de ces expressions. Elles eussent été d'une grande utilité aux „ premiers calculateurs de nos tables trigonométriques; mais quoique la „ découverte de ces théorèmes n'excédât pas la force de la trigonométrie de „ leur temps, je ne vois pas qu'ils leur fussent connus. „

On doit en convenir, pour qu'un historien de l'érudition de Montucla ait pu tenir ce langage, il faut que dans l'antiquité et au moyen âge, les géomètres qui ont employé les formules sin $(a \pm b)$ aient été peu nombreux.

Des recherches subséquentes ont cependant conduit de nos jours à des conclusions assez différentes. En voici quelques-unes offrant, peut-être, de l'intérêt.

Dans un article déjà plusieurs fois nommé ici même, *L'Almageste d'Abû'lwéfa Albûzdjani* par M. le baron Carra de Vaux et publié en 1892 dans le JOURNAL ASIATIQUE (*), ce savant a démontré que les formules sin $(a \pm b)$ se trouvent déjà dans l'ouvrage de l'astronome arabe. Aboulwéfa (**) y obtient d'abord par des considérations à moitié géométriques, à moitié algébriques, l'expression assez lourde (***)

$$\sin(a \pm b) = \sqrt{\sin^2 a - \frac{\sin^2 a \sin^2 b}{R^2}} \pm \sqrt{\sin^2 b - \frac{\sin^2 a \sin^2 b}{R^2}}$$

Mais il est plus heureux bientôt après, et arrive alors explicitement à la formule moderne (IV)

$$\sin(a \pm b) = \frac{\sin a \cos b \pm \cos a \sin b}{R}$$

(*) 8e série, t. XIX. Paris, 1892; pp. 408-471.

(**) Le nom d'Aboulwéfa me semble avoir acquis droit de bourgeoisie dans la langue française et je crois pouvoir écrire avec Delambre, Aboulwéfa au lieu d'Abû 'lwéfa.

(***) *Loc. cit.*, p. 418.

(IV) *Loc. cit.*, p. 419.

On n'est pas d'accord sur l'année de la naissance d'Aboulwéfa. Le baron Carra de Vaux la met en 959 après J.-C.; Cantor l'avance de 19 ans et la place en 940; mais les deux historiens datent l'un et l'autre de 998 (*) la mort de cet astronome. Il est donc, en tous cas, à peu près le contemporain d'Albategnius, puisque celui-ci vécut de l'an 850 à l'an 929 de notre ère environ.

L'influence de la découverte d'Aboulwéfa, sur la science des Occidentaux, a été nulle. La chose est hors de doute et d'ailleurs généralement admise. En voici cependant une nouvelle preuve, peu connue, mais curieuse parce qu'elle se rapporte directement à Régiomontan.

Dans le discours d'ouverture si original, par lequel ce grand constructeur de tables de sinus commence à Padoue son cours de leçons sur Alfragan (**); dans le résumé si précieux pour l'histoire des connaissances scientifiques de son temps, qu'il nous y laisse (***); il parle jusqu'à trois reprises différentes des Arabes. Il nomme Albategnius, Geber, Alfragan, Alhazen et Avicennes; il ne dit pas un mot d'Aboulwéfa.

Mais écoutons-le plutôt lui-même. Dans un style solennel et pompeux, il vient de résumer devant ses auditeurs, les progrès faits par l'astronomie sous les Grecs et les Latins, puis il continue en ces termes. Je traduis (IV).

" La haute valeur des Arabes en ce genre de sciences, nous est prouvée „ par des témoins très dignes : Albategnius mis en latin par un certain „ Platon de Tivoli; ensuite Geber de Séville, traduit par un certain Gérard de „ Crémone (V). Albert le Grand, dans son *Miroir astronomique*, ne craint pas de „ nommer ce dernier le correcteur de Ptolémée, parce que dans sa préface il „ promet de rectifier jusqu'à treize erreurs de Ptolémée. Ce n'est pas ici le lieu „ de dire, combien les neuf traités de son ouvrage sont beaux et utiles. Enfin, „ si nous nous mettons au point de vue de l'astronomie pure, nous rendrons „ les plus grandes actions de grâces à Alfragan, pour peu que nous nous sen- „ tions capables de comprendre sa doctrine. „

Deux pages plus loin, à propos de la Perspective, Regiomontan parle d'Alhazen (VI); puis, deux pages plus loin encore il nomme Avicennes, qu'il

---

(*) Carra de Vaux, *loc. cit.*, note de la p. 411. Cantor, *Vorles. über Geschichte der Mathematik*, 1e Band, 2e Aufl. Leipzig, 1894, p. 662.

(**) *Oratio introductoria in omnes Scientias Mathematicas Ioannis de Regiomonte, Patavii habita, cum Alfraganum publice praelegeret.* Nuremberg, 1537. J'ai transcrit, ci-dessus (p. 147) le titre complet de cet ouvrage : *Continentur in hoc libro...* etc.

(***) Voyez ce qu'en dit Cantor dans ses *Vorlesungen über Gesch. der Mathem.*, 2e Band, 2e Aufl., Leipzig, 1900, pp. 260-262.

(IV) P. 11 non chiffrée.

(V) *Loc. cit.* " Plato quidam Tiburtinus,... „ dit Regiomontan, " Gerardo quodam Cremonensi „. Mais ce mot " quidam „ n'a pas dans sa bouche le sens quelque peu méprisant, qu'on pourrait, à tort, être porté à y voir.

(VI) P. 13 non chiffrée.

appelle : " egregium de lineis et numeris scriptorem " (*). Mais encore une fois, c'est tout ce que ce discours si remarquable contient sur la science des Arabes et Aboulwéfa y est passé sous silence.

On ne peut donc, que se rallier à la conclusion de l'étude du baron Carra de Vaux, quand il dit (**) :

" Très originale si on la compare aux écrits antiques, " la trigonométrie d'Aboulwéfa " l'est même en regard des travaux occidentaux plus modernes, " car les progrès qu'elle renferme se sont perdus, et les formules trouvées par " les Arabes au IXe siècle ont dû être réinventées cinq cents ans plus tard par " des Latins, dont elles ont fait la gloire. "

Mais il est temps d'aborder ces Latins eux-mêmes.

Parcourons leurs noms à peu près par ordre de date.

Dans son traité *Super propositiones Ptolemaei de sinibus et chordis*, Purbach (***) n'a pas la proposition sin $(a \pm b)$.

Je ne la trouve pas non plus dans la *Compositio tabularum sinuum* (IV) de

---

(*) C'est à-dire : " Un écrivain ayant écrit d'une manière excellente sur les lignes et les nombres. " P. 15, n. ch.

(**) *Loc. cit.*, p. 439.

(***) Voir plus haut p. 148.

Le traité de Purbach est divisé en deux parties. Dans la première (p. A_2 r° — A_3 r°) il s'occupe du calcul des sinus, *per Kardagas.* J'ai déjà dit ce qu'il fallait entendre par ce mot (p. 149). Purbach nous avertit lui-même qu'il le fait d'après Arzahel. Von Braunmühl analyse fort exactement cette méthode de l'astronome arabe dans ses *Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie* (Erste Teil, p. 78).

La deuxième partie (pp. A_3 r°-B r°) renferme les six propositions classiques de Ptolémée sur les cordes du cercle. Elles ne sont qu'une réédition de celles que l'on pouvait lire depuis 1496 dans l'*Epytoma Joãnis De mõte regio In almagestũ ptolomei*; à part toutefois l'application de ces propositions à la construction de la table des cordes, qui est un peu plus développée ici que dans l'*Epitoma*. On le sait, la première moitié de l'*Epitoma* est de Purbach et Regiomontan n'a fait qu'achever l'œuvre de son maître.

La première édition de l'*Epitoma* n'a au titre ni date ni adresse d'imprimeur, mais on lit à la dernière page : *Explicit Magne Compositionis Astronomicon Epitoma Johannis de Regio monte. Impensis non minimis : curaq; et emendatione non mediocri virorum praestantiũ Casparis Grossch : et Stephani Roemer. Opera quoq; et arte impressionis mirifica viri solertis Johannis hãman de Landoia : dictus herzog : felicibus astris expletum. Anno a prima rerum ethereaũ circuitione. 8480. Sole in parte sextadecima virginis gradiente. In hemisphaerio Veneto : Anno salutis 1496, currente : Pridie Calen. Septembris Venetiis : Maximiliano Romanorum rege primo Faustissime imperante.* In fol. (Bibl. roy. de Belgique. Incunable, 905).

(IV) Voir plus haut, p. 148.

Regiomontan, et on sait qu'il ne s'occupe pas de la construction des tables dans l'*Opus tabularum directionum profectionumque* (*).

Voilà pour le xvᵉ siècle.

Serons-nous plus heureux au xviᵉ ?

Pierre Apien dans l'*Instrumentum primi mobilis* (**), Oronce Fine dans les diverses éditions de la *Mundi sphaera* (***), Rheinhold dans le *Liber tabularum*

(*) Ouvrage célèbre dans l'histoire de la trigonométrie. Il renferme la première table de sinus et la première table de tangentes qui aient été imprimées; les sinus y sont calculés au rayon 60 000 et pour toutes les minutes du premier quadrant, les tangentes au rayon 100 000, mais de degré en degré seulement. Il a eu de nombreuses éditions. La première dont l'existence soit certaine est celle qui est sortie en 1490, à Augsbourg, des presses du grand imprimeur d'ouvrages scientifiques de l'époque, Ratdolt de Venise. L'exemplaire de la Bibliothèque royale de Belgique (Incunable 1724) est malheureusement incomplet. Il contient les tables sans aucune lacune, mais toute l'Introduction fait défaut. J'ai complété les renseignements qu'il ne pouvait me fournir à l'aide de l'édition de Tubingue 1550 (Bibl. roy. de Belg., v. 5164). Je transcris, dans le *Catalogue des incunables de la Bibliothèque Mazarine*, par Paul Marais et A. Dufresne de Saint-Léon (Paris, Welter, 1893, p. 294), le titre de l'édition de 1490. *Tabule directionū profectionūq; Famosissimi viri Magistri Joannis Germani de Regiomonte in natiuitatibus mvltvm vtiles*; sans date ni adresse d'imprimeur.

(**) *Instrumentum primi mobilis, a Petro Apiano nunc primum et inventum et in lucem editum... Accedunt iis Gebri... libri IX de Astronomia.. Norimbergae, apud Io. Petreium, anno MDXXXIII.* In-fᵒ (Bibl. du Coll. de la Comp. de Jésus à Louvain). C'est dans cet ouvrage qu'a été imprimée pour la première fois une table de sinus indépendante de la division sexagésimale du rayon. Elle est calculée au rayon 100 000 et pour toutes les minutes du premier quadrant. Pierre Apien ne nous dit pas par quels procédés il l'a construite. Il existe une réimpression de son ouvrage (Nuremberg, 1541), qui ne contient pas le traité de Geber. Nous l'avons déjà nommée ci-dessus (p. 148).

(***) Imprimé d'abord dans *Orontii Finaei Delphinatis, Liberalium disciplinarum professoris regii, Protomathesis... Parisiis 1532.* In-fᵒ. Bibl. roy. de Belg. V. 5279. Reproduit ensuite avec des changements de rédaction assez considérables dans *Orontii Finei Delphinatis, Regii mathematicarum professoris De Mundi Sphaera siue Cosmographia, primave Astronomiae parte, Lib. V : Inaudita methodo ab authore renovati propriisque tum commentariis ac figuris, tum demonstrationibus et tabulis recens illustrati. Eiusdem Orontii Rectarum in circuli quadrante subtensarum (quos sinus vocant) demonstratio, supputatioque facillima, nunc primum edita : una cum eorundem sinuum tabula, fideli admodum calculo supputata. Eiusdem Orontii organum universale, ex supradicta sinuum ratione contextum, quo tum geometrici tum omnes astronomici canones, ex quatuor sinuum proportione pendentes, mira facilitate practicantur. Parisiis ex officina Simonis Colinaei 1542. Cum amplissimo Privilegio.* In-fᵒ. Bibl. roy. de Belg. V. 1542.

directionum (*), Viète (**) lui-même, justifient pleinement ce que dit Montucla. Pas un d'entre eux non plus n'a la formule sin $(a \pm b)$.

Nous pourrions allonger presque à volonté cette liste en y ajoutant, par exemple, Thomas Finkius (***), Philippe van Lansberge (IV), Clavius (V), Ursus Dithmarsus (VI) et bien d'autres, car nous n'aurions ici que l'embarras du choix.

(*) *Primus liber Tabvlarvm directionvm discentibvs prima elementa Astronomiae necessarius et utilissimus. His insertvs est canon secundus ad singula scrupula quadrantis propagatus. Item nova tabvla climatum, et Parallelorum, item umbrarum. Appendix canonvm secvndi libri Directionum, qui in Regiomontani opere desiderantur. Authore Erasmo Rheinholdo Salueldensi. Cum gratia et privilegio Caesareae et Regiae Maiestatis. Tvbingae apud haeredes Vlrici Morhardi. Anno M.D.LIII.* In-4° (Bibl. roy. de Belg., v. 5125²). C'est le plus ancien ouvrage contenant une table de tangentes pour toutes les minutes du premier quart de cercle. Elle est calculée au rayon 10 000 000. Les tables de Rheinhold sont précédées d'une introduction contenant la démonstration de 60 préceptes, parmi lesquels les préceptes 3-9 forment un petit traité de trigonométrie (pp. γ r°-ε v°).

(**) Outre le *Canon Mathematicus*, il faut lire encore le chapitre XIX° du *Variorum de rebus mathematicis responsorum* pour connaître les idées de Viète sur la construction des tables trigonométriques.

(***) *Geometria rotundi*, pp. 123-136.

(IV) *Triangulorum geometriae libri IV* (cités ci-dessus p. 116), liv. I et II.

(V) *Christophori Clavii Bambergensis opera...*, t. II..., *Sinus vel semisses rectarum in circulo subtensarum lineae secantes et tangentes...*, pp. 50-148.

Ce volume des *Opera* ne fut édité qu'en 1611, mais d'après la *Bibliothèque de la Compagnie de Jésus* des PP. De Backer et Sommervogel (3° éd., t. II, Bruxelles, 1891, v° Clavius) ce travail de Clavius parut pour la première fois à Rome, en 1586, dans ses *Theodosii Tripolitae Sphaericorum libri tres*. Dès l'année suivante, en 1587, Clavius donna encore : *Tabulae sinuum, tangentium et secantium ad partes radii 10,000,000 et ad scrupula prima quadrantis, et ad earum praxim brevis introductio ex pleniore tractatu Christophori Clavii Bambergensis e Societate Jesu. Moguntiae ex Typographia Joannis Albini. Anno M.DC.VII.* In-4° (Bibl. roy. de Belg., II, 43437). Comme ce titre le fait prévoir, l'auteur n'y réédite pas son grand traité de la construction des tables trigonométriques.

(VI) *Fundamentum Astronomicum...* Cap. II de Extructione Canonis sinuum, p. 5 v°-13 v° (Voir ci-dessus pp. 106-110).

L'auteur revint sur la construction des tables de sinus dans son livre de *Astronomicis Hypothesibus* (Prague, 1597, in-4°), et donna, sous le nom de *règle de l'aggrégat*, p. I r°-I v° et de *règle de l'excès*, p. I v°, deux expressions des plus compliquées pour sin $(a+b)$ et sin $(a-b)$. On peut les lire dans Delambre (*Hist. de l'Astr. mod.*, t. I, liv. III, pp. 302-303).

Ne nous hâtons cependant pas trop de conclure, car il est en outre, au xvi[e] siècle, deux savants de premier ordre sur lesquels l'attention se porte nécessairement et dont il est difficile de séparer les noms dans l'étude qui nous occupe. J'ai dit Copernic et Rheticus.

Ouvrons d'abord le *De Revolutionibus Orbium Coelestium* (*).

Les trois derniers chapitres du premier livre ne sont autre chose qu'un traité de trigonométrie (**) et Copernic y consacre le chapitre douzième tout entier à la construction des tables de sinus. Dans ce chapitre — il prend soin de nous le dire lui-même (***) — il s'en tient exclusivement aux théorèmes de Ptolémée et

---

(*) *Nicolai Copernici Torinensis, De Revolutionibus orbium coelestium Libri VI. Norimbergae apud Ioh. Petreium. Anno M.D.XLIII.* In-f°. C'est l'édition originale très rare (Bibliothèque royale de Belgique; fonds Van Hulthem, nn° 8284 et 8285).

(**) On sait que deux de ces chapitres, le 13[e] et le 14[e], avaient été publiés dès l'année précédente par Rheticus, dans *De lateribvs et angvlis triangulorum, tum planorum rectilineorum, tum sphaericorum, libellus eruditissimus et utilissimus cum ad plerasque Ptolemaei demonstrationes intelligendas, tum uero ad alia multa, scriptus a Clarissimo et doctissimo uiro D. Nicolao Copernico Torinensi. Additus est Canon semissium subtensarum linearum in Circulo. Excussum Vittembergae, per Ioannem Lufft. Anno M.D.XLII.* In-4° (Bibl. du Coll. de la Comp. de Jésus à Louvain).

Antérieurement à l'*Opus Palatinum*, Rheticus avait publié un petit *Canon doctrinae Triangulorum*. A ma demande, le R. P. Van den Gheyn, S. J., Conservateur à la Section des manuscrits de la Bibliothèque royale de Belgique, a bien voulu, dans un voyage récent, examiner l'exemplaire qu'en possède la Hof- und Staatsbibliothek de Munich. Math. P. 168. Voici la description qu'il m'en donne :

" *Canon doctrinae Triangulorum. Nunc primum a Georgio Ioachimo Rhaetico* „ *in lucem editus. Lipsiae, Wolfgang Gunter, 1551.* In 4°. Signatures : Aij. Aiij, „ B, Bij, Biij, C, Cij, Ciij.

„ Il contient une pièce de vers : De Studio et opera singulari explicandi „ doctrinam triangulorum Georg. Ioachimi Rhetici. Cette pièce est signée „ Mathias S. R. φιλομαθὴς. F.

„ Suit le *Canon doctrinae triangulorum in quo triquetri cum angulo recto in* „ *planitie partium 10 000 000 ponitur* (14 pages de tables).

„ Suit le *Dialogus de Canone doctrinae triangulorum Georgii Ioachimi* „ *Rhetici.* „

A en juger par l'analyse que Hunrath fait de cet opuscule dans le Festschrift zum siebzigsten Geburtstage Moritz Cantor (pp. 213-217), ce n'est pas à lui mais à l'*Opus Palatinum* qu'il faut recourir pour connaître les idées de Rheticus.

(***) *Op. c.*, f° 12, v° " Haec autem sex theorematis explicabimus et uno problemate Ptolemaeum fere secuti. „

aux démonstrations du géomètre grec. De fait, on y chercherait en vain une idée, qui ne se trouve déjà dans l'*Almageste*. Exceptons-en, toutefois, cette remarque jetée, isolée et comme perdue, à la fin du chapitre (*) :

" Je crois suffisant de donner dans la table la moitié des cordes de l'arc „ double. Par cette abréviation nous comprendrons en un quadrant ce qu'il „ aurait fallu étendre à une demi-circonférence. La chose est d'autant plus „ avantageuse, que les moitiés des lignes viennent plus souvent dans les „ démonstrations et les calculs, que les lignes entières. „

Faut-il conclure de cette phrase, que Copernic a connu la formule sin $(a \pm b)$ et qu'il en a fait usage? Peut-être. Mais pour moi j'en doute et voici pourquoi.

Si quelqu'un devait savoir exactement à quoi s'en tenir au sujet de l'idée du chanoine de Frauenburg, c'était bien son élève, son collaborateur, son éditeur, son ami, Rheticus en un mot (**). Or, quand celui-ci reprend la question dans l'*Opus Palatinum de Triangulis*, voici l'invraisemblable formule par laquelle il débute (***) :

$$\mathrm{Sin}\,(a+b) = \frac{\mathrm{R}\sin b}{\cos a} + \frac{\sin a}{\mathrm{R}}\left[\cos b - \frac{\sin a \sin b}{\cos a}\right]$$

Décidément ce n'était pas là un coup de maître. C'était à peine une formule pratique. Il fallait imaginer mieux, quand on se proposait comme lui de calculer une table de sinus avec quinze décimales. Rheticus se rappela probablement alors le traité des *Révolutions*, qu'il connaissait si bien, et la remarque finale du chapitre de la construction des tables (IV). Il retravailla le problème et finit par

---

(*) *Op. cit.*, f° 15, r°.

(**) Voyez les " prolegomena „ des éditeurs (p. XIII) dans les *Nicolai Copernici Thorvnensis de Revolvtionibvs orbivm coelestivm libri VI ex avctoris avtographo recvdi cvravit Societas Copernicana Thorvnensis*... Thorvni, Svmptibvs Societatis Copernicanae, MDCCCLXXIII. Gr. in-4°.

(***) Dans le traité : *De Fabrica Canonis Doctrinae Triangulorum, Lib. II*, prop. 5, pp. 20-21. C'est la première démonstration intitulée par l'auteur, on ne voit pas trop pourquoi, " compositio „.

(IV) Je fais allusion à quelques propositions du livre I de la *Fabrica Canonis Doctrinae Triangulorum*, dont voici le résumé.

Lem. 4. Démonstration du théorème de Ptolémée, sur la propriété des diagonales du quadrilatère inscrit dans une circonférence (p. 8).

Coroll. Cinq droites de ce quadrilatère inscrit étant connues, on possède les éléments nécessaires pour calculer la sixième (pp. 8, 9).

Lemm. 5. Étant donné un quadrilatère inscrit, il est possible de former un second quadrilatère, ayant pour côtés les demi-côtés du précédent, pour diagonales les demi-diagonales et ce nouveau quadrilatère sera inscriptible (p. 9).

Coroll. Si l'on découvre une propriété du quadrilatère inscrit, celle-ci restera vraie, qu'il s'agisse des cordes entières ou des demi-cordes (p. 9).

Toute cette suite de lemmes et de corollaires ne sont en définitive, on le voit, que la démonstration de la remarque de Copernic.

énoncer la loi suivante. Je prie le lecteur de bien vouloir se souvenir, que l'auteur n'emploie jamais les mots sinus et cosinus. Dans sa terminologie, les sinus sont des *perpendiculaires* et les cosinus des *bases*.

" Étant données, dit Rheticus (*), les perpendiculaires et les bases de deux „ arcs inégaux ; qu'on multiplie la perpendiculaire de l'un, par la base de „ l'autre, qu'on ajoute les deux produits, on aura la perpendiculaire de l'arc „ composé par la somme des deux arcs proposés. Qu'on retranche le plus petit „ produit du plus grand, on aura la perpendiculaire de l'excès du plus grand „ arc sur le plus petit. Pour avoir les bases, multipliez la perpendiculaire d'un „ arc par la perpendiculaire de l'autre et la base par la base ; ajoutez les pro- „ duits, vous aurez la base de l'excès du plus grand arc sur le plus petit. „ Retranchez le plus petit produit du plus grand, vous aurez la base de l'arc „ formé par la somme des proposés. Mais dans tous les cas, après l'addition et „ la soustraction, vous diviserez le résultat obtenu par le nombre des parties du „ diamètre. „

Le diamètre dont il est ici question est celui d'un cercle auxiliaire, décrit sur le rayon du cercle trigonométrique. Cela résulte sans ambiguïté du contexte.

Nous nous trouvons bien cette fois clairement et d'une manière tout à fait explicite en présence des formules :

$$\sin(a \pm b) = \frac{\sin a \cos b \pm \cos a \sin b}{R}$$

$$\cos(a \pm b) = \frac{\cos a \cos b \mp \sin a \sin b}{R}$$

Mais, quelle peine, quels détours, quelles considérations entortillées leur démonstration coûte à Rheticus !

Grâce à l'algèbre, grâce à l'excellence de nos notations, nous hésiterions aujourd'hui à leur consacrer quelques lignes pour les déduire du théorème de Ptolémée. Il ne faut pas à Rheticus moins de quatre grandes pages in-folio bien remplies pour en venir à bout (**).

Aussi, en étudiant ce travail si long, si laborieux, et en songeant a la phrase de Copernic, je ne puis m'empêcher de me rappeler ce conseil de Delambre, dans son analyse des œuvres de Viète (***) :

" Il faut être très circonspect dans les interprétations que nous donnons „ parfois à des passages obscurs, pour attribuer à quelque ancien une décou- „ verte à laquelle il n'a jamais songé. „

(*) *De Fabrica Can. Doctr. Triang. lib. II.*, " Quatuor antecedentium propositionum canon secundum Ptolemaeum lemma. „ (p. 25.)

Cette règle se trouve énoncée entre les propositions 8 et 9.

(**) Op. cit. — *De Fabrica Canonis Doct. Triang.*, lib. II, prop. 5-9, pp. 21-25.

(***) *Hist. de l'Astron. du Moyen Age.* Chap. VIII, p. 478.

Je résume :

Aboulwéfa chez les Arabes, Rheticus (*) chez les Latins ont certainement énoncé et démontré les formules sin $(a \pm b)$.

Comment se fait-il alors, me dira-t-on, que des théorèmes si utiles aient eu tant de peine à se vulgariser et à entrer dans l'usage courant ?

Pour une raison bien simple.

Aboulwéfa n'était pas connu. Quant à l'auteur de l'*Opus Palatinum*, c'est un écrivain prolixe, obscur et souvent difficile. Disons le mot, il faut un certain courage et une forte dose de patience pour le lire et chercher à le comprendre. Rien d'étonnant que beaucoup de géomètres aient reculé devant cette tâche (**).

Cette réflexion me ramène à Coignet.

S'il y a du mérite à découvrir la vérité, il y en a aussi à la mettre en pleine lumière. Il faut reconnaître, que ce dernier mérite, Coignet l'a eu au plus haut degré. Il a profondément étudié Rheticus. La comparaison des ouvrages des deux savants ne laisse aucun doute à cet égard. J'admets, que le mathématicien anversois a trouvé chez son devancier les formules sin $(a \pm b)$. J'en suis même convaincu. Mais qui empêchait Stevin (***), Henrion (IV) Snellius (V) ou

---

(*) Ces formules se trouvent naturellement aussi dans Pitiscus, le correcteur et le continuateur de Rheticus. Voyez : *Trigonometriae libri V*, édit. d'Augsbourg, 1600, pp. 45-48 ; édit. d'Augsbourg, 1608. pp. 56-58 ; édit. de Francfort, 1612, pp. 65-70.

(**) Si l'on veut bien relire le passage de Montucla, transcrit au commencement de cette note, on constatera que lui aussi, comme tant d'autres, a reculé devant l'ennui d'étudier Rheticus. S'il s'était donné la peine de parcourir avec un peu d'attention l'*Opus Palatinum*, il aurait vu, qu'il y est fait continuellement usage des formules sin $(a \pm b)$.

(***) L'édition d'Albert Girard que l'on cite habituellement, diffère ici d'une manière notable des trois autres ; seule elle ne donne pas les tables des lignes trigonométriques. Comme j'ai à ma disposition les quatre éditions des œuvres de Stevin, j'ai cru utile de les examiner toutes :

Wisconstige gedachtenissen... Vol. I, Eerste bovck (sic) des driehovckhandels (sic) van het maecksel des tafels der hovckmaten (sic), pp. 1-140.

Hypomnemata mathematica... Vol. I. Pars. 1ª cosmographiae. De Triangulorum doctrina. Lib. I, pp. 1-140.

Mémoires mathématiques. Descrit premierement en Bas Alleman par Simon Stevin de Bruges, translaté en François par Jean Tuning... Vol. I. Première partie du Traicté des triangles ; de la composition des tables des sinus, pp. 1-140.

Les Œuvres mathématiques de Simon Stevin de Bruges,... par Albert Girard... 2e vol. Premier livre de la construction des sinus, pp. 1-10.

(IV) *Mémoires mathématiques*... Paris M.DCXXIII. In-8°. Bibl. de l'Univ. de Gand. Math. 789ª, t. I, pp. 45-72.

(V) *Doctrinae Triangulorum canonicae libri quatuor*. Lugd. Bat. Maire 1627. In-8°. Lib. I, pp. 1-61.

même van Lansberge (*) de les y remarquer comme lui? Je ne nomme cependant que des géomètres de première valeur, qui tous ont publié des tables des lignes trigonométriques et avaient un intérêt évident à les composer, ou tout au moins à les vérifier (**) par les procédés les plus simples possible (***).

(11) Cette note de Coignet est intéressante, mais demande quelques explications. Résumons-la d'abord en langage moderne.

Soit la progression géométrique

$$\div\div\ \tfrac{1}{2} : \sin A : 2 \sin^2 A : 4 \sin^3 A : 8 \sin^4 A : 16 \sin^5 A : \ldots$$

Si nous appliquons à ses différents termes, les règles indiquées par l'auteur, nous aurons:

" Pour doubler "	$\cos 2A = 1 - 2 \sin^2 A.$
" Pour tripler "	$\sin 3A = 3 \sin A - 4 \sin^3 A.$
" Pour quadrupler "	$\cos 4A = 1 - 8 \sin^2 A + 8 \sin^4 A.$
" Pour quintupler "	$\sin 5A = 5 \sin A - 20 \sin^3 A + 16 \sin^5 A$

Les termes de cette série ne sont pas assez nombreux, pour nous en faire apercevoir immédiatement la loi de formation. Mais Coignet a pris soin de nous avertir que sa " très singulière pratique est trouvée par la reigle d'algèbre " Il est assez naturel de se dire, que par ces mots il entend probablement nommer Viète.

Quoi qu'il en soit, nous nous trouvons en présence d'un problème de l'opuscule: *Ad Problema quod omnibus mathematicis totius orbis construendum proposuit Adrianus Romanus, Francisci Vietae responsum* (IV).

(*) Je ne cite pas la première édition des *Triangulorum geometriae libri IV*, puisqu'elle est de 1591 et qu'elle précède par conséquent l'*Opus Palatinum*; mais la deuxième " *ab auctore recognita, multisque in locis aucta* ", publiée en 1631 seulement, mais néanmoins du vivant de l'auteur (pp. 1-107). Voyez aussi dans les *Opera omnia;* triang. geom. lib. IV (pp. 1-54).

(**) Leurs tables n'ont évidemment pas toutes été calculées en entier à nouveau. La chose est incontestable pour Stevin, par exemple. Ce ne sont souvent que des éditions revues et corrigées de tables plus anciennes.

(***) Je me serais écarté du but spécial de cette note, beaucoup trop longue déjà, en faisant l'histoire de la formule sin $(a \pm b)$ chez les Indiens. Cette question a été d'ailleurs tout récemment fort bien résumée dans les *Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie* de von Braunmühl (Erster Teil, p. 37).

(IV) Parisiis, Apud Iamettum Mettayer, Typographum Regium, 1595. In-4° pp. 10 v° et 11 r°. Bibl. roy. de Belg. V. 5007.

Dans les *Francisci Vietae opera*, édités par Schooten, Leyden, 1646, pp. 318 et 319.

Avouons-le sans détours, Viète a fait de son énoncé un obscur et presque intraduisible logogriphe. Heureusement, il a pris soin de le répéter en partie sous une forme algébrique, ce qui va nous permettre de le deviner. Je prie le lecteur de bien vouloir se rappeler que 1. N, 1. Q, 1. C désignent respectivement, la première, la deuxième et la troisième puissance de l'inconnue.

Cela posé, voici d'abord la transcription littérale des équations de Viète (*).

2 — 1Q		basi		duplus
3N — 1C		perpend.	ejus trian-	triplus
2 — 4Q + 1QQ		basi	guli cujus	quadruplus
5N — 5C + 1QC	aequa	perpend.	angulus	quintuplus
2 — 9Q + 6QQ — 1CC	bitur	basi	acutus ad	sextuplus
7N — 14C + 7QC — 1QQC		perpend.	acutum	septuplus
2 — 16Q + 20QQ — 8CC + 1QCC		basi	primi est	octuplus
9N — 30C + 27QC — 9QCC + 1CCC		perpend.		nonuplus

„ Et eo in infinitum continuando ordine, adscita si placet numerorum „ continue triangulorum suum a binario ducentium incrementum Tabella. „

Pour pouvoir nous faire comprendre, écartons-nous légèrement du texte de Viète. Il veut dire : Considérons les équations

$$\begin{aligned}
2 - x^2 &= f(2A)\\
3x - x^3 &= f(3A)\\
2 - 4x^2 + x^4 &= f(4A)\\
5x - 5x^3 + x^5 &= f(5A)\\
2 - 9x^2 + 6x^4 - x^6 &= f(6A)\\
7x - 14x^3 + 7x^5 - x^7 &= f(7A)\\
2 - 16x^2 + 20x^4 - 8x^6 + x^8 &= f(8A)\\
9x - 30x^3 + 27x^5 - 9x^7 + x^9 &= f(9A)
\end{aligned}$$

équations que l'on peut prolonger indéfiniment, en se servant, au besoin, pour la formation des coefficients du tableau, des nombres figurés commençant par 2. Ces équations admettent la solution :

$$x = 2\sin A, \quad f(2n\,A) = 2\cos 2n\,A, \quad f\,[(2n+1)\,A] = 2\sin(2n+1)\,A.$$

Il est clair qu'en introduisant cette hypothèse dans les quatre premières équations, on obtient les identités de Coignet.

Viète ajoute, et la remarque valait la peine d'en être faite, qu'en prolongeant

*) Éd. de Paris, 1595, p. 11 r°; éd. de Leyden, 1646, p. 319.

la loi jusqu'à la 45ᵉ puissance de l'inconnue, on trouve l'équation du 45ᵉ degré d'Adrien Romain (*).

(12) Nous employons ici des lettres grecques qui ne se trouvent pas dans le manuscrit. Coignet y fait usage des symboles ou caractères spéciaux dus à Stiefel (**), et dont Clavius (***), Brasser (IV) et un grand nombre d'autres algébristes se servaient pour représenter les diverses puissances de l'inconnue; caractères que ne possède pas notre imprimeur. Le lecteur qui désirerait les connaître les trouverait entre autres dans le tome II des *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* de Cantor (V).

(13) Voyez sur la vie et les travaux de ce savant la *Notice sur Ludolphe van Colen*, par M. G. A. Vosterman van Oijen, publiée en français dans le BULLETTINO DI BIBLIOGRAFIA E DI STORIA DELLE SCIENZE MATHEMATICHE E FISICHE DE BONCOMPAGNI (VI).

Le livre du cercle est le chef-d'œuvre de van Coelen. Il a eu trois éditions fort soigneusement décrites par Bierens de Haan dans son étude sur *Quelques quadrateurs du Cercle dans les Pays-Bas* (VII).

La première, *Van de Circkel, Daer in gheleert werdt te vinden de naeste proportie des Circkels-Diameter teghen synen omloop... Delft, Jan Andriesz, 1596.* In-fᵒ. Je n'ai pas eu jusqu'ici l'occasion de la voir.

La seconde, publiée par Adriana Symons, veuve de van Coelen,... *van nieuws*

(*) Éd. de Paris, 1595, p. 11 rᵒ; édit. de Leyde, 1646, p. 319.

L'équation d'Adrien Romain a été donnée, on le sait, dans les liminaires des *Ideae mathematicae pars prima, sive methodus polygonorum*, p. 14 non ch. Son histoire est trop connue pour qu'il y ait lieu d'y revenir ici (V. Cantor, *Vorl. üb. Gesch. der Math.*, 2ᵉ Band, 2ᵉ Aufl., p. 606).

(**) *Arithmetica integra, Authore Michaele Stiefelio Cum Praefatione Norimbergae apud Johan. Petreium. Anno Christi M.D.XLIIII. Cum gratia et privilegio Caesareo atq. Regio ad Sexennium.* In-4ᵒ (Bibl. de l'Univ. de Louv., Ar. V, rel. 24).

(***) *Algebra Christophori Clavii Bambergensis...* Romae M.DC.VIII. In-4ᵒ. Bibl. de l'Univ. de Gand, Math. 683, ou bien : *Opera*, t. II.

Il en existe aussi une traduction française : *L'Algèbre de Christophe Clavius... traduite du latin par Gilles Guillion...* Liége... Streel... M.DC.XII. In-4ᵒ. Bibl. de l'Univ. de Liége, F. Capit. Nᵒ 3808.

(IV) *Regula Cos, of algebra zijnde de alder-konstrijckst en Regel om het ombekende bekent te maken... Door J. R. Brasser, geadmitteert Landmeeter tot Hoorn... t' Amsterdam bij Gerrit van Goedesbergh Boekverkooper op 't Water aen de Nieuwenbrugh in den Delfsche Bybel. Anno 1663.* In-4ᵒ (Bibl. roy. de Belg., V. H. 8068).

(V) 2ᵉ Aufl., p. 427.

(VI) Rome, 1668, t. I, pp. 141-156.

(VII) Publiée dans le BULLET. DI BIBLIOG. E DI STORIA DELLE SC. MAT. E FIS. DE BONCOMPAGNI. Rome, 1874, t. VII. Ces descriptions se trouvent respectivement pp. 108 et 109, 110 et 111, 114.

oversien, ende van alle voorgaende fauten verbetert, ende eyndelyck vermeerdeert met dry Tractaetgens... Leyden, Joris Abrahamsz van der Marsse, voor Jacob Marcus Boeckverkooper, Anno 1615. In-4° (Bibl. de l'Univ. de Louv. Scienc. N° 94).

Voici enfin au complet le titre de la troisième : *Ludolphi a Ceulen De Circulo et adscriptis liber. In quo plurimorum polygonorum latera per irrationalium numerorum griphes, quorum libet autem per numeros absolutos secundum algebraicarum aequationum leges explicantur. Quae insuper accesserunt versa pagina explicabit. Omnia e vernaculo latina fecit, et annotationibus illustravit Willebrordus Snellius R. F. Lugd. Batav. Apud. Jodocum a Colster. Anno 1619.* In-4° (Bibl. communale à Anvers, N° 4867).

(14) C'est l'ouvrage intitulé : *Mathematicae analyseos triumphus, in quo Enneagoni circulo inscripti ad ipsum circulum exhibetur ratio, auctore A. Romano. Lovanii, 1607.* In-f°. Il est devenu des plus rares et je ne l'ai jamais vu. Je ne l'ai pas même trouvé à la Bibliothèque de l'Université de Louvain à laquelle Adrien Romain mourant, légua, on le sait, sa propre bibliothèque.

(15) Ce théorème peut s'écrire :

$$\sin(60 + A) - \sin(60 - A) = \sin A.$$

Il est énoncé pour la première fois par Viète dans les termes suivants :

" Differentia inter Sinus aequidistantium Peripheriarum a LX, tanta est
" quantus sinus dimidiae Peripheriae quâ differunt inter se, id est, integrae
" quâ absunt a LX. Et ideo datis Sinubus ad partes XXX, dantur Sinus reliqui
" sola Additionis, vel Subductionis via (*). "

Voilà bien, en effet, l'incontestable mérite du théorème. Le calcul des sinus et des cosinus de 30 degrés, permet d'achever par de simples additions et soustractions le calcul de tous les autres. Delambre le fait remarquer à tout propos dans son *Histoire de l'Astronomie* (**), car il semble tenir singulièrement à ce que la gloire de cette découverte n'échappe pas à son illustre compatriote.

En guise de démonstration Viète se contente de donner une figure. Le raisonnement qu'il faut y adapter peut ensuite s'imaginer sans trop de peine. Ce travail vient d'être fait tout récemment encore par M. Hunrath (***), ce qui me dispense de le recommencer ici.

(16) Cognet établit ici la formule

$$\operatorname{tg} A = R \frac{\sin A}{\cos A}$$

(*) Canon mathematicus, p. 16.

(**) Voyez par ex. : *Histoire de l'Astronomie du Moyen Age*, ch. VIII, p. 458.

(***) *Des Rheticus Canon doctrinae triangulorum und Vieta's Canon mathematicus*, publié dans le CANTOR's FESTSCHRIFT, pp. [illegible].

Il est presque superflu de rappeler qu'on la trouve déjà chez les Arabes, par exemple chez Albategnius et chez Aboulwéfa (*).

([17]) Il s'agit ici de la formule

$$\sec A = \frac{R^2}{\cos A}$$

Je ne sache pas qu'on l'ait déjà signalée chez les Arabes, quoiqu'il paraisse probable que tôt ou tard on finisse par la rencontrer dans leurs écrits.

Finkius la démontre dans sa *Geometria rotundi* (**). A cette occasion, guidé par ce scrupule qui le pousse à toujours citer les noms des auteurs qu'il utilise, il prend soin de nous dire que c'est là une formule d'Erasme Rheinhold. On la trouve, en effet, au précepte 8 du *Primus liber tabularum directionum* (***).

([18]) Ces trois propositions peuvent s'écrire respectivement

(1) $$\operatorname{tg}(45 + \tfrac{1}{2} A) - \operatorname{tang}(45 - \tfrac{1}{2} A) = 2 \operatorname{tang} A$$

(2) $$\operatorname{tang} A + \operatorname{tg}(45 - \tfrac{1}{2} A) = \sec A$$

(3) $$\sec A + \operatorname{tg} A = \operatorname{tg}(45 + \tfrac{1}{2} A)$$

Coignet, il est vrai, énonce la première, comme si l'on avait :

$$\operatorname{tg}(45 + \tfrac{1}{2} A) - \operatorname{tang}(45 - \tfrac{1}{2} A) = \operatorname{tang} A;$$

mais c'est là de sa part une simple faute de plume. L'exemple numérique qu'il joint à la règle et qu'il calcule correctement le prouve à l'évidence.

Dans les formules (3) et (2), changeons A en 90 — A, il vient :

(4) $$\operatorname{cosec} A + \cot A = \cot \frac{A}{2}$$

(5) $$\operatorname{cosec} A - \cot A = \operatorname{tg} \frac{A}{2}$$

(*) Voyez par ex. Cantor, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, 1e Band, 2e Aufl., Leipsig, 1894, p. 694, ou Carra de Vaux, l'*Almageste d'Abû'lwefa*, Journal Asiatique, 1892, p. 420.

Dans ce passage, Carra de Vaux nous apprend qu'on trouve chez Aboulwéfa les quatre formules :

$$\frac{\operatorname{tg} A}{R} = \frac{\sin A}{\cos A}, \quad \frac{\cot A}{R} = \frac{\cos A}{\sin A}, \quad \frac{\operatorname{tg} A}{R} = \frac{R}{\cot A}, \quad \frac{\operatorname{tg} A}{\sec A} = \frac{\sin A}{R}$$

La dernière surtout est intéressante, parce que l'astronome arabe y emploie la sécante, qu'il appelle *diamètre de l'ombre*. Le fait vaut la peine d'être remarqué, car on semblait jusqu'ici attribuer à Copernic la première idée des sécantes trigonométriques (Voyez Cantor, *o. c.*, 2e Band, 2e Aufl., Leips., 1900, p. 472). Nous constatons ici une fois de plus combien Carra de Vaux a raison quand il dit que les formules de la trigonométrie trouvées par les Arabes se sont perdues et qu'elles ont été réinventées par les Latins (Voir ci-dessus, p. 156).

(**) P. 76.

(***) Tubingue, 1554, p. b_4 r° (Voyez, ci-dessus, p. 158, le titre complet de cet ouvrage).

Sous cette forme nous avons deux formules de Viète, qui les a données sans démonstration dans le *Canon mathematicus*. Delambre les regarde avec raison, comme une des plus belles découvertes de l'algébriste français (*).

Il suit de ces formules que :

$$\text{(6)} \qquad \cot A = \frac{1}{2}\left(\cot \frac{A}{2} - \operatorname{tg} \frac{A}{2}\right)$$

$$\text{(7)} \qquad \operatorname{cosec} A = \frac{1}{2}\left(\cot \frac{A}{2} + \operatorname{tg} \frac{A}{2}\right)$$

ce sont encore deux formules du *Canon mathematicus*. Ainsi, avec les tangentes de 45° on aura les tangentes de tous les autres par de simples soustractions. Par de simples additions on aura de même toutes les sécantes (**).

(*) *Histoire de l'Astronomie du Moyen Age*, chap. VII, p. 450, chap. VIII, p. 458, etc., etc.

(**) Voici le texte même du *Canon mathematicus* (p. 11). Il faut se rappeler que Viète nomme les tangentes et les cotangentes des *Féconds;* les sécantes et les cosécantes des *Hypoténuses.*

" Hypotenusa et Faecundus Residuae peripheriae aggregata sunt Faecundus „ Residuae semiperipheriae. „ C'est la formule (4).

" Et ἀνάπαλιν, Faecundus Residuae peripheriae, est Faecundus et Hypote- „ nusa residui Duplae peripheriae. „ C'est-à-dire :

$$\cot A = \cot 2A + \operatorname{cosec} 2A.$$

" Differentia inter Faecundum et Hypotenusam Residuae, est Faecundus „ Dimidiae peripheriae. „ C'est la formule (5).

" Et ἀνάπαλιν, Faecundus peripheriae est differentia inter Faecundum et „ Hypotenusam residui Duplae. „ C'est-à-dire :

$$\cot A = \operatorname{cosec} 2A - \cot 2A.$$

" Ex his consectarium.

„ Datis Faecundis ad partes XLV, dantur Faecundi reliqui, & Faecundorum „ Hypotenusae omnes, solâ Additionis et Subductionis via. „

Littéralement :

" D'où il suit, qu'étant donnés les Féconds de 45°, on a les autres Féconds, „ et toutes les Hypoténuses des Féconds, par la seule voie d'Addition et de „ Soustraction. „

Si le lecteur croit, comme moi, qu'il faut entendre ce dernier passage en ce sens que Viète a déduit les formules (6) et (7) des formules (4) et (5), il prendrait de l'importance dans l'histoire de la trigonométrie; car ce serait alors probablement le premier exemple de formules trigonométriques déduites d'autres par des procédés purement algébriques et sans aucune considération géométrique.

Après des théorèmes de cette importance il devient d'un intérêt un peu secondaire de remarquer, que Coignet emprunte la démonstration de la formule (3) à la *Geometria rotundi* de Finkius (*); que c'est aussi Finkius, qui a mis (4) sous la forme (3); et que c'est enfin dans les *Metrices astronomicae* de Bressieu, publiées en 1581 deux ans après le *Canon mathematicus*, qu'on lit pour la première fois la formule (2) (**).

([19]) Dans la figure 17 la lettre D, intersection de FA et de BE, a été oubliée; de plus, on devrait avoir DE = EC.

([20]) Les formules qui doivent servir d' " abbreviation sur la reigle de trois ", sont

$$\frac{\sin A}{R} = \frac{R}{\operatorname{cosec} A}, \qquad \frac{\operatorname{tang} A}{R} = \frac{R}{\operatorname{cotang} A}.$$

Elles permettent l'une et l'autre de remplacer une division par une multiplication. C'est là effectivement une " abbreviation ", qui n'était pas à dédaigner quand on ne possédait pas de tables de logarithmes.

([21]) La lettre E est oubliée dans la figure; elle se trouve à l'intersection des arcs CO et γF.

Dans cet exemple, Coignet prend pour point de départ la proposition

$$\frac{\sin CE}{\sin BE} = \frac{\sin FG}{\sin BF}$$

et il y fait,

$$CE = 23^\circ\, 1/2 \qquad BE = 90^\circ \qquad FG = 21^\circ.$$

Or, ajoute-t-il, au lieu de calculer

$$\sin BF = \frac{\sin 90^\circ \sin 21^\circ}{\sin 23^\circ \frac{1}{2}} = \frac{100\,000 \times 35837}{39875} = 89873,$$

(*) Liv. V. N° 30, p. 78.

Finkius donne en outre à la page précédente (Liv. V. N° 30, p. 77) une démonstration des formules (2) et (3). Ce sont les deux démonstrations reproduites dans les diverses éditions de la trigonométrie de van Lansberge (Édit. de Leyde, 1591, p. 10; édit. d'Amsterdam, 1631, pp. 9 et 10; édit. de Middelbourg, 1663, pp. 5 et 6) et que Delambre attribue à tort au savant gantois (*Histoire de l'Astronomie moderne*, t. II, p. 41, 42, etc.).

C'est avec moins de raison encore que dans son *Mémoire sur la vie et les travaux de Simon Stevin* (Bruxelles, 1846; § 10, Trigonométrie, p. 51), Steichen dit que (2) est une formule trouvée par ce géomètre.

(**) J'emprunte ce dernier détail aux *Vorles. üb. Gesch. der Trig.* de von Braunmühl, I Teil, p. 187 en note.

il est bien plus expéditif de calculer

$$\sin BF = \frac{\sin 21^\circ \operatorname{cosec} 66^\circ \frac{1}{2}}{\sin 90^\circ} = \frac{35837 \times 250784}{100\,000} = 89873;$$

ce qui est évident, quand les multiplications et les divisions doivent s'effectuer au long sans tables de logarithmes.

(22) C'est sur cette phrase et quelques autres du même genre disséminées à droite et à gauche dans les traités suivants, que je m'appuie pour dire, que ce manuscrit n'est pas un autographe de Coignet, mais une simple copie d'un de ses cours.

Qu'on me permette à ce propos une dernière réflexion :

Si l'on songe que ce cours est donné à Thomas Francquin, quartier-maître général des Archiducs (*) et que Coignet semble avoir donné des leçons analogues à beaucoup d'autres de leurs officiers; si l'on veut bien se rappeler en outre que la trigonométrie était regardée à cette époque, comme l'une des parties les plus relevées des mathématiques supérieures, on ne laisse pas que d'être émerveillé devant le degré de science que ces princes pouvaient trouver à l'occasion chez les seigneurs auxquels ils confiaient la direction de leurs armées.

(*) Voyez l'Introduction, pp. 94 et 95.

LA QUESTION DES FOSSILES CARACTÉRISTIQUES

ET

SON APPLICATION A QUELQUES FORMATIONS GÉOLOGIQUES

PAR

M. le Chanoine BOURGEAT

Malgré les démentis sans nombre que les observations patiemment suivies sur le terrain leur infligent chaque jour, les géologues classificateurs en sont encore à donner une importance exagérée à ce que l'on appelle les *fossiles caractéristiques.*

Qu'il soit nécessaire pour déterminer l'âge relatif des assises de recourir à la paléontologie, et que, sans s'appuyer sur la série des êtres qui se sont succédé, on ne puisse établir sérieusement la succession des terrains, c'est là une vérité que personne n'oserait contester : un de ces principes fondamentaux sur lesquels repose la géologie tout entière. Qu'il soit même avantageux de choisir, parmi les formes organiques si nombreuses, celles qui pour chaque âge, par leurs caractères plus saillants, leur plus grande abondance, leur plus grande facilité d'expansion, sont de nature à frapper davantage et à dispenser de recourir à toutes les autres lorsqu'il s'agit de déterminer à peu près l'époque d'une assise, c'est là encore un principe reçu de tous, même de ceux que la paléontologie préoccupe le moins. Mais, qu'on choisisse ces types comme à l'aventure, et qu'on leur donne un rôle qu'ils ne sont pas appelés à remplir, c'est assurément s'écarter du chemin de la logique et franchir les bornes de la vraie méthode scientifique.

J'avoue que, depuis quelques années, les fossiles caractéristiques ont été mieux choisis qu'autrefois. On ne trouve plus guère dans les listes actuelles au-dessous du nom de *caractéristiques,* qui semble d'abord indiquer quelque chose de caractérisé, cette série d'êtres qui tenaient place dans les anciennes listes sans avoir aucun caractère bien tranché. On a eu soin aussi d'en éliminer, autant que possible, certains types *si rares* que les terrains ne les présentent presque jamais. Il en reste toutefois quelques-uns de l'une et l'autre catégorie, et les jeunes géologues, qui ont des jambes vigoureuses, peuvent encore avoir la satisfaction de courir après les *Ammonites planorbis* et *angulatus* qu'ils n'atteindront presque jamais, de même que ceux qui aiment à classer à l'infini pourront s'exercer à distinguer par des stries d'ordre tout à fait accidentel les différentes espèces du groupe des *perisphinctes.*

Si franchement on donnait aux géologues, qui ont ainsi multiplié les espèces à plaisir, les photographies d'un même individu prises à des époques différentes de sa vie, et qu'on leur demandât d'appliquer sincèrement à ces photographies leurs méthodes paléontologiques, il n'y a pas de doute qu'ils en feraient autant d'espèces différentes, peut-être même de genres distincts. Je possède à notre collection de l'Université catholique de Lille, des térébratules et des rhynchonelles que j'ai trouvées, non seulement dans le même banc mais dans le même bloc de calcaire. La série en est complète, depuis les formes jeunes dépourvues d'ornements jusqu'aux formes adultes où les plis et les ornements sont très accusés. Or, lorsque je veux faire une surprise à mes étudiants, après leur avoir montré, conformément aux auteurs, comment une espèce de térébratule ou de rhynchonelle se distingue d'une autre par sa longueur, sa largeur, ses ornements et ses plis, je leur présente les cartons sur lesquels j'ai collé à la suite les formes dont je viens de parler et je constate qu'ils retrouvent là presque toutes les espèces que je leur avais classées comme différentes.

Pourquoi s'est-on attaché à de telles minuties lorsqu'il a été question de choisir le fossile caractéristique? La raison en paraît bien simple. Un fossile caractéristique ne peut caractériser un terrain qu'autant qu'il ne se trouve que là, c'est-à-dire ni plus haut ni plus bas. C'était ce qu'enseignait autrefois à la Sorbonne un professeur par ailleurs très éminent. Or, si un type organique

est du nombre des fossiles réellement caractéristiques, en d'autres termes assez abondants pour être facilement retrouvés, il y a bien des chances pour que ce type ne se soit pas astreint à paraître et à disparaître en même temps que l'assise qu'on veut lui faire caractériser. On le trouve plus bas sous sa forme spécifique jeune et plus haut sous sa forme vieillie. Comme les deux formes peuvent différer l'une et l'autre de la forme spécifique adulte par quelques caractères secondaires, on divise le type en trois formes au moins, dont l'une, la moyenne, se distinguera des autres par des détails que l'heureux faiseur des trois formes ou des trois espèces sera seul capable d'apprécier.

Encore si cette forme correspondant à l'état adulte du type, c'est-à-dire à la période moyenne de sa durée, tenait uniquement aux modifications que l'âge apporte aux espèces, le mal ne serait pas grand; mais le plus souvent les changements d'aussi faible importance tiennent autant au milieu qu'à l'âge de l'espèce. Il en résulte ce fait étrange que, si l'on veut suivre une assise avec soin, on voit la forme qui la caractérisait en un point, être remplacée sur un autre par une forme plus jeune ou plus vieille suivant que le milieu a eu une influence plus grande ou plus faible.

Laissons toutefois de côté ces questions secondaires, auxquelles les géologues sérieux ont réfléchi depuis longtemps, et supposons les fossiles caractéristiques bien choisis, il y a encore à notre avis un sérieux danger à leur donner une importance trop grande dans la classification lorsqu'il s'agit de régions éloignées. Si on limite ses observations à une étendue peu considérable de terrain, et que ce soit dans la région même où les fossiles caractéristiques ont été recueillis, évidemment l'ordre de succession de ces fossiles devra être le même que celui que les paléontologistes consciencieux auront établi pour cette région. Mais, si on étudie à une grande distance de là, il y a tout lieu de croire ou que l'on ne trouvera plus tous les fossiles dits caractéristiques ou que si on les rencontre ils ne se montreront pas absolument dans le même ordre. Les fossiles d'un facies pélagique ne sont pas ceux d'un facies littoral : la faune des récifs n'a souvent que de très faibles liens de parenté avec celle des formations contemporaines qui se sont constituées loin des îlots coralliens. Sur un rivage en particulier, la faune d'une époque donnée variera beaucoup suivant

la profondeur de la mer, le trajet des courants, l'embouchure des fleuves, la nature des matières apportées par ces derniers et mille autres influences connues ou inconnues de nos jours. Il pourra en résulter, si le rivage est étendu, que le fossile qu'on appelle caractéristique se montre plus tôt sur un point et plus tard sur un autre.

Et, quand toutes ces influences n'existeraient pas, il resterait toujours, au sujet du fossile caractéristique, une question à se poser : celle de sa facilité d'expansion. La géologie montre, en effet, de plus en plus que les formes organiques ne sont pas apparues instantanément en tous les points de la terre. Parties d'un centre qu'on appellera, comme on le voudra, leur centre de création ou leur centre d'évolution, elles se sont répandues de là dans les autres régions : tantôt très vite, tantôt très lentement suivant les obstacles qu'elles rencontraient ou les circonstances qui favorisaient leur dispersion. L'indication chronologique, que chacune d'elles fournit, n'est donc que relative. Si l'on prend ainsi deux formes nées à la même époque dans deux milieux éloignés pour se répandre ensuite au loin, ces deux formes *rigoureusement contemporaines* ne paraîtront pas toujours telles dans la succession des terrains. Désignons l'une d'entre elles par A et l'autre par B. En son centre d'apparition, A sera antérieure à B, qui n'y sera pas encore venue et B sera antérieure aussi à A en son centre propre d'apparition, puisque A devra mettre un certain temps pour y pénétrer.

Pour l'un des points donc on aura la succession $\frac{B}{A}$ et en l'autre la succession inverse $\frac{A}{B}$. Dans l'intervalle, il existera une zone C où les deux fossiles se montreront dans la même assise. Là, mais là seulement, ils seront rigoureusement contemporains dans leur gisement comme ils le sont dans leur âge.

On voit donc que ce n'est pas au moment même de leur apparition mais après, et dans un lieu différent de celui qui les a vues naître, que les deux formes semblent être de même âge et se trouvent réunies dans la même assise. Si un géologue en étudiant la zone C y trouve les deux fossiles en même temps, il sera assurément dans son droit de les dire contemporains; mais celui qui voudrait après cela prétendre qu'ils doivent se rencontrer partout dans les mêmes assises, commettrait une faute sérieuse de logique.

Après avoir insisté sur ces principes généraux, je vais essayer

d'en faire l'application à quelques formations géologiques des mieux connues.

Je prendrai d'abord les formations carbonifères marines du bassin de Namur. Chacun sait que ces formations offrent des caractères différents suivant qu'on les observe à Visé, à Huy, aux Écaussines, à Tournai et dans les environs de Boulogne. A Visé, les carrières en exploitation nous montrent en bas des bancs épais d'un calcaire légèrement bleuâtre et vers le sommet des assises moins épaisses en partie siliceuses en partie argileuses, où les encrines sont abondantes. C'est dans cet ensemble, mais surtout vers la limite des gros bancs calcaires et des assises à encrines que l'on trouve la faune *dite de Visé*, dont les deux fossiles *caractéristiques* sont les *Productus giganteus* et *cora*. Les calcaires d'en bas, qui contiennent déjà cette faune, se soudent intimement, sans trace aucune de ravinement ou de lacune, comme l'a fait remarquer M. Gosselet, aux formations à *Rhynchonella cuboïdes,* qui est regardée comme caractéristique du Frasnien.

A Huy, ces calcaires diminuent d'importance et sont séparés des dernières assises du devonien par du calcaire encrinitique. Vers Namur, entre le calcaire encrinitique et le calcaire à gros bancs s'intercalent des formations dolomitiques assez massives où les encrines abondent associées à des polypiers. Vers les Écaussines, et surtout vers Tournai, c'est le calcaire encrinitique qui domine englobant des enclaves de dolomie et surmonté des calcaires à *Productus giganteus* réduits. Enfin, dans le Boulonnais, le carbonifère marin est manifestement formé de deux genres d'assises : des dolomies très encrinitiques à la base, et des calcaires en gros bancs à *Productus giganteus* et *cora* vers le sommet.

Si la faune était partout la même, les géologues classificateurs n'auraient pas de peine à dire que tout cet ensemble constitue une seule formation avec des facies différents. Mais le malheur est qu'à *Tournai* se montrent en abondance dans les calcaires encrinitiques des *Productus* différents de ceux qui dominent à *Visé*, et que surtout le fossile pris là comme caractéristique est le *Spirifer Tornacensis*, *fort abondant* et bien éloigné des *Productus giganteus* et *cora*.

Qu'a-t-on fait pour ne pas sacrifier les fossiles caractéristiques et pour tout harmoniser avec ces différences de faune ? On a fait

tout simplement trois étages : l'un du *Productus giganteus* et des gros bancs de calcaire, l'autre des dolomies, le troisième des calcaires encrinitiques à *Spirifer Tornacensis*. Ces trois étages inventés, il a fallu les mettre à leur place. La chose n'a pas été des plus commodes, car de Koninck, après avoir placé les calcaires de Visé en haut, a cru devoir les remettre en bas, puis les replacer en haut. Les dolomies seules sont toujours restées au milieu. Et de fait, en plaçant le calcaire de Visé vers le bas du carbonifère, on tenait bien compte de sa liaison intime avec le Frasnien, mais sa faune était là pour le dire supérieur aux calcaires encrinitiques de Tournai. En le plaçant au sommet, comme on le fait aujourd'hui, la faune peut se trouver à l'aise; mais n'est-ce pas faire violence aux données les plus évidentes de la stratigraphie que d'oublier qu'il se lie au Frasnien ?

Dans tous les cas, grâce aux fossiles caractéristiques, on a vu successivement les terrains Viséen et Tournaisien faire la culbute comme une pierre qui roule : hier le Viséen en bas, aujourd'hui au sommet en attendant qu'il plaise de le faire rentrer en dessous.

Quant aux dolomies, on les a placées au milieu des deux formations en en faisant un étage à part, quitte à admettre qu'il y a lacune lorsqu'on ne les trouve plus.

En réalité a-t-on bien là trois formations distinctes? Est-ce que les formations marines carbonifères de Tournai ne sont pas dans leur ensemble synchroniques de celles de Visé, et les différences dans la faune ne tiennent-elles pas à des différences dans les conditions de sédimentation? Je suis d'autant plus porté à le croire qu'il s'agit de formations déposées dans une fosse étroite, sous des influences littorales et, qu'en Russie, le *Productus giganteus* se montre avant le *Spirifer Mosquensis,* dont le *Tornacensis* est très voisin.

La faune dans son ensemble est-elle même aussi différente qu'on le suppose? C'est peut-être une illusion de ma part, mais je ne cacherai pas que lorsque je jette les yeux sur les belles planches où de Koninck a représenté les fossiles du carbonifère belge, ceux de Visé me semblent souvent ressembler beaucoup à ceux de Tournai.

Comment d'ailleurs, en soutenant que le Tournaisien et le Viséen ne sont pas deux facies d'une même formation, peut-on

s'expliquer que presque toutes les formations carbonifères marines de l'Europe soient *viséennes ?*

Voici, en effet, ce qu'écrit à ce sujet M. Julien dans son grand travail sur le terrain carbonifère marin de la France centrale : « Toutes les recherches relatives à la faune carbonifère de l'Europe pélagique, coralligène ou à facies du Culm, montrent qu'elle appartient intégralement à l'étage de Visé. *Tournai n'est représenté d'une manière certaine, comme nous l'avons vu, que dans quatre régions :* la Belgique et le Nord de la France, le comté de Wexford en Irlande, Molowka-Murajewna en Russie et le Morvan en France (*). »

Où était donc la mer carbonifère de l'Europe durant le *Tournaisien ?* Y a-t-il eu partout lacune, aussi bien en Bretagne qu'aux Vosges, à la Montagne Noire qu'aux Pyrénées ?

C'est à mon avis par un même abus du fossile caractéristique que des géologues, très éminents d'ailleurs, ont voulu comparer dans le détail les formations carbonifères marines de la Sambre avec celles de la Meuse, et se sont vus contraints de multiplier les lacunes. Une lacune, ce me semble, ne doit s'admettre que lorsqu'elle est prouvée. Ce n'est pas la lacune qui doit céder à la faune, mais la faune, qui est quelque chose de plus plastique, qui doit céder lorsque la lacune n'est pas prouvée. Il est vrai qu'il y a là *les brèches,* cet énigme sur lequel on a déjà tant discuté, mais les brèches se fondent si bien latéralement dans les assises, qu'on aurait de la peine à y voir la preuve des lacunes cherchées. J'ai constaté du reste pour celle de Bachant, comme M. le Chanoine de Dorlodot l'a fait pour d'autres, que les éléments de ces brèches ont en partie du moins un caractère organique. Ne vaut-il pas mieux encore ici admettre que les différences entre le carbonifère marin de la Meuse et celui de la Sambre tiennent à des différences dans les conditions de sédimentation, d'autant mieux qu'entre les deux bassins s'élevait le récif Frasnien de Philippeville et de Marienbourg. En voyant combien certaines assises d'Avesnelle ressemblent à celles de Tournai, on serait presque tenté de croire que c'était plutôt avec la mer de Tournai qu'avec la mer de Dinant que le bassin de la Sambre se trouvait relié.

(*) Page 238.

Le second exemple que je me propose de mettre en lumière est celui du Callovien et de l'Oxfordien de la bordure orientale du bassin de Paris. Je n'insiste pas sur le Bajocien et le Bathonien, qui fourniraient le même témoignage, parce que ces formations ont parfois un caractère coralligène qui influe comme on le sait considérablement sur la faune. Pour un motif analogue, je ne dirai donc rien du Jurassique supérieur qui fournirait des témoignages encore plus probants.

Partant donc du Callovien, avec le fossile qu'on donne comme caractéristique de ses assises inférieures, le *Macrocephalites* ou *Ammonites macrocephalus* et m'appuyant sur les travaux de M. Rigaux dans le Boulonnais, de MM. de Lapparent, Douvillé, Munier Chalmas, de Grossouvre, Collot et Wolghemuth dans les Ardennes, la Meuse, la Haute-Marne et la Côte-d'Or, aussi bien que sur mes observations personnelles en ces diverses régions, voici ce que j'ai constaté (*) :

1° Dans le Boulonnais : L'*Ammonites macrocephalus* surmonte la *Terebratula digona* et l'*Holectypus depressus,* et touche presque immédiatement en bas à l'*Ostrea Knorii.*

Au-dessus d'elle viennent successivement *Ammonites crenatus* et *Ammonites hecticus, Ostrea dilatata, Serpula vertebralis, Ammonites Lamberti, Millecrinus Echinatus, Ostrea Gregaria, Pholadomya exaltata, Ammonites cordatus.*

2° Dans les Ardennes et le Nord de la Meuse cet ordre se trouve déjà troublé.

En bas la *Terebratula digona* et l'*Holectypus depressus* se rapprochent de l'*Ammonites macrocephalus.*

En haut l'*Ammonites Lamberti* descend presque au contact de l'*Ammonites macrocephalus* en même temps que l'*Ammonites cordatus* s'abaisse vers l'Oxfordien moyen, comme on le constate à Neuvizy.

Par contre la *Serpula vertebralis* et surtout l'*Ostrea dilatata* éprouvent un mouvement ascendant marqué accompagnées en en cela du *Millecrinus echinatus.*

(*) Bulletin de la Société géologique de France, 2e série. t. XVIII, p. 646 ; 3e série, t. VI, p. 439 et suiv. ; t. IX. p. 258. Notices explicatives des cartes de Dijon-Nancy-Mirecourt.

Diagramme figurant les niveaux

DES PRINCIPAUX FOSSILES CARACTÉRISTIQUES DU CALLOVIEN ET DE L'OXFORDIEN DANS L'EST DU BASSIN DE PARIS ET DANS LE JURA, PAR RAPPORT AU NIVEAU DE L'AMMONITES MACROCEPHALUS.

LES HAUTEURS SONT TRÈS EXAGÉRÉES PAR RAPPORT AUX LONGUEURS

Boulonnais.
Ardennes.
Meuse
Haute-Marne.
Côte d'or
Jura Dolois
Jura.

Ammonites cordatus
Pholadomya exaltata
Ostrea gregaria
Millecrinus echinatus
Ammonites Lamberti
Ostrea dilatata
Serpula vertebralis
Pleuromya arduennensis
Ammonites Macrocephalus
Holectypus depressus
Terebratula digona
Ostrea
Gregaria
Ostrea dilatata
Ostrea dilatata
Pholadomya
Fraucicosta
Millecrinus
Serpula vertebralis
Echinatus
Ammonites
Cordatus
Pholadomya exaltata
Ammonites Lamberti
Terebratula digona
Pleuromya arduennensis

3° Dans la Haute-Marne l'*Ammonites macrocephalus* et la *Terebratula digona* se trouvent dans les mêmes assises et sont immédiatement surmontées des *Ammonites crenatus* et *Lamberti.*

L'*Ostrea dilatata* arrive vers le sommet de l'Oxfordien, et la *Serpula vertebralis* à peu près au milieu. L'*Ammonites cordatus* accentue de plus en plus son mouvement descendant avec la *Pholadomya exaltata* qui lui était associée dans la gaize de Neuvizy.

4° Dans la Côte-d'Or, l'*Ammonites macrocephalus* devient de plus en plus rare à mesure que l'on se porte vers le sud; mais sa position peut être encore déterminée par celle de l'*Ammonites athleta* qui l'accompagne presque toujours, lui étant seulement légèrement supérieure. Là on voit la *Serpula vertebralis* monter rapidement vers les assises supérieures de l'Oxfordien pour y rejoindre l'*Ostrea dilatata* qui s'abaisse un peu de niveau.

L'*Ammonites cordatus,* comme la *Pholadomya exaltata,* atteignent en descendant le niveau de l'Oxfordien moyen, tandis qu'on voit se montrer dans l'Oxfordien supérieur la *Pholadomya paucicosta.*

5° Si l'on continue plus au sud dans la région doloise et jurassienne qui était alors en relation avec les mers du bassin de Paris, on voit l'*Holectypus depressus* atteindre le niveau de l'*Ammonites macrocephalus* à laquelle il se trouve associé, ainsi qu'à la *Terebratula digona* dans beaucoup de localités.

L'*Ammonites cordatus* et la *Pholadomya exaltata* arrivent presque au contact de l'*Ammonites Lamberti.* On constate par contre que la *Serpula vertebralis* a gagné l'Oxfordien supérieur, où elle se trouve surtout abondante en compagnie de l'*Ostrea dilatata.*

Voilà donc un fossile caractéristique, l'*Ammonites macrocephalus,* dont plusieurs autres fossiles également regardés comme caractéristiques se rapprochent ou s'éloignent très capricieusement. Si elle détermine un niveau précis, force est d'admettre que les autres fossiles n'en déterminent point. Que si au contraire, ce qui est plus que probable, elle est exposée comme ces derniers à varier de niveau, il faut bien reconnaître qu'il est déraisonnable de vouloir rigoureusement fixer l'âge d'une formation, parce que cette Ammonite s'y rencontre. On avait assurément besoin

d'admettre un âge exact pour ces fossiles à l'époque où la science était à ses débuts, comme on avait besoin d'admettre des lois simples pour la physique. Mais il me semble que maintenant les travaux des géologues doivent s'inspirer d'idées plus larges. C'est par des diagrammes comme celui que j'ai l'honneur d'exposer ici, plutôt que par des casiers ressemblant par trop aux tiroirs d'une collection que la disposition relative des fossiles doit être indiquée. Il est vrai qu'à ce système les géologues de cabinet ne trouvent pas tous les avantages de l'ancien; mais la science vraie ne peut qu'y gagner beaucoup.

Après avoir fait ressortir par les deux exemples que j'ai cités, les variations de niveau des fossiles caractéristiques, je voudrais pouvoir expliquer ici la cause de ces variations. La chose ne m'est pas possible. Tout ce que je puis dire, c'est qu'elles sont liées aux variations des sédiments.

Le *Productus giganteus* de Visé ne se montre guère en effet que dans des calcaires en gros bancs qui supposent une sédimentation plus calme, plus à l'abri des courants et des apports fluviatiles. L'*Ammonites macrocephalus* semble se plaire dans les milieux ferrugineux, tandis que la *Serpula vertebralis* et l'*Ostrea dilatata* paraissent préférer les milieux argilo-calcaires.

Aller plus loin serait de ma part une témérité. Je me contenterai en finissant de renvoyer le lecteur à une excellente note de M. de Grossouvre sur le jurassique moyen de la région des Vosges, de la Haute-Marne et de la Meuse, publiée en 1897 dans le BULLETIN DU SERVICE DE LA CARTE GÉOLOGIQUE DÉTAILLÉE DE FRANCE. On y verra, par la planche qui accompagne cette note, comment l'auteur est obligé, à raison des changements de facies qui ont amené des changements dans la faune, de réduire ou d'augmenter l'épaisseur de l'Oxfordien. Il n'est assurément guère problable que le terrain ait attendu le fossile pour se constituer, ainsi que cette planche le laisse supposer.

NOUVELLES RECHERCHES

SUR

QUELQUES CECIDOMYIDAE ET MYCETOPHILIDAE DE L'AMBRE

ET

Description d'un nouveau genre et d'une nouvelle espèce

DE

CECIDOMYIDAE DU COPAL DE L'AFRIQUE

PAR

M. Fernand MEUNIER

Introduction

De grandes lacunes existent encore en paléoentomologie. Pour les combler, j'ai revu, depuis près de dix ans, un grand nombre de mouches, revisé les types de Loew du Musée Provincial de Koenigsberg et décrit quelques nouveaux genres du succin.

Toute la littérature des Cecidomyidae fossiles se réduit à quelques observations de Loew et à deux très courtes diagnoses de S. H. Scudder.

L'examen de cent inclusions de ces minuscules diptères me permet d'apporter une sérieuse contribution à l'étude des insectes de cette famille.

Les Cecidomyidae vivants ont déjà fait l'objet d'un remarquable

mémoire de feu Winnertz. Actuellement, les espèces européennes ont été si minutieusement réexaminées par Kieffer, Ruebsaamen et Van der Wulp qu'on a reconnu la nécessité de les démembrer en une série de nouvelles coupes génériques.

Les Mycetophilidae de l'ambre sont mieux connus que les Cecidomyidae. Dans le magistral essai monographique des espèces récentes de cette famille, Winnertz a groupé plus logiquement que ses prédécesseurs les Limnobinae, les Mycetophilinae, les Sciarinae et les Ceroplatinae. La comparaison de deux mille spécimens de ces Orthorapha fossiles me permet d'augmenter le tableau des genres publiés en 1850 par le Prof. Dr Löw.

L'examen des mouches, à divers grossissements, m'a montré qu'il était indispensable de constater, plus rigoureusement qu'on ne l'a fait jusqu'ici, les rapprochements pouvant exister entre les formes vivantes et fossiles et de réunir les documents d'un catalogue des diptères tertiaires. Pictet pensait que les espèces d'articulés fossiles, y compris celles de l'ambre, étaient éteintes actuellement. Il est difficile de contrôler la véracité de la thèse du savant suisse, car d'un côté nous connaissons encore trop peu les formes exotiques et de l'autre certaines espèces tertiaires ont été établies d'après des caractères quelquefois trop superficiels. Vraisemblablement, beaucoup d'espèces ont disparu depuis le paléocène (*).

Il semble cependant que certaines d'entre elles, à peine modifiées, font encore partie de notre faune et se nourrissent de plantes voisines de celles qui croissaient sur les bords de la Mer Baltique

(*) D'après les recherches stratigraphiques de Zaddach (1), Jentzsch (2) et quelques autres observateurs, la célèbre forêt de Conifères à ambre (Bernsteinbäume), en plein épanouissement à l'époque paléocène, a été submergée par les flots de la mer oligocène. Ce fait explique comment les riches gisements d'ambre du Samland ne se trouvent que par transport (Geschiebe) dans les couches marines (blaue Erde) de l'oligocène inférieur de ce pays.

(1) *Das Tertiärgebirge Samlands*, Schrift. d. phys. oekonom. Gesellsch., Bd. VIII, S.S. 85-197, Koenigsberg, 1867.

(2) *Beiträge z. Kenntniss d. Bernsteinformation*, ibid., Bd. XVII, S.S. 101-108, Koenigsberg, 1876. — *Führer durch. d. Geol. Samml. d. Provinzial-Museums u. s. w.*, Koenigsberg, 1892, S.S. 53-54.

pendant les temps tertiaires. Les Nemestrinidae, les Pipunculidae et quelques autres genres ont peu d'homogénéité entre eux. Les systématistes ne peuvent les rapprocher des insectes d'autres familles à cause de la pauvreté de nos archives paléoentomologiques. La nervation alaire des Némestrinides paraît avoir une ressemblance morphologique éloignée avec celle des Névroptères et des Orthoptères. Ce sont des mouches qui longtemps encore exerceront la sagacité des classificateurs. Löw a décrit brièvement, ou signalé seulement " in litteris ", sans les faire figurer plusieurs nouveaux genres qu'il est parfois très difficile de retrouver dans le succin. Lorsqu'on veut établir une nouvelle coupe générique, il est nécessaire de constater la présence des mêmes caractères chez plusieurs individus.

Je compare avec le plus grand soin les divers caractères de la tête, des antennes, des ailes et des pattes, et je vérifie toujours si la nervation alaire est normale, si elle est due à une anomalie ou à une altération tératologique. Je ne décris et ne dessine l'être présumé nouveau qu'après m'être assuré que sa nervation se montre régulièrement chez un certain nombre de types identiques. Le paléoentomologiste ne doit pas accorder trop d'importance aux poils, macrochètes ou épines des pattes donnant pour les Tachininae et les Anthomyinae vivants de bons caractères distinctifs des espèces, mais n'ayant qu'une valeur très secondaire pour l'étude des genres et des espèces fossiles.

Afin de montrer l'étroite affinité d'un type vivant avec son parent paléocène, j'ai ordinairement conservé le nom de la forme récente la plus rapprochée du fossile en le faisant précéder du mot " palaeo ".

La micropaléoentomologie nous réserve encore bien des surprises! Cette science, encore si peu cultivée, est appelée à éclairer de vives lumières la phylogénie et la distribution géographique de plusieurs groupes d'arthropodes.

Dans la monographie des diptères fossiles, je donnerai la suite de la revision des types de Loew conservés au Musée de Berlin et les diagnoses d'un assez grand nombre de nouvelles espèces provenant de l'admirable collection Stantien et Becker, installée depuis peu au Musée royal de l'ambre de Koenigsberg et placée sous l'habile et savante direction du Professeur Dr R. Klebs.

I. CECIDOMYIDAE (*)

1. Cecidomyinae

I. LASIOPTERINAE

Genre Cecidomyia Rond.

J'ai rencontré une bestiole de la section des *Dasyneura* Kieff. (*Synopse,* p. 5), appartenant à ce genre. En effet, la deuxième nervure longitudinale aboutit très près de l'extrémité du bord postérieur de l'aile. On sait que les *Perrisia* Rond. et Kieff. se distinguent des *Cecidomyia* Rond. par la deuxième nervure longitudinale se terminant ordinairement loin de l'apex alaire. Les antennes paraissent avoir 14 articles reliés entre eux par des sortes de cols leur donnant l'aspect d'être pétiolés. A un très fort grossissement (358 diamètres), je ne puis constater si l'article apical des crochets tarsaux est pourvu d'une seule pelote. Les palpes ont quatre articles. Les vrais *Cecidomyia* (sensu Rond. et Kieffer) semblent être très rares dans le succin.

II. ASPHONDILINAE

Genre Oligotrophus (*Latr.*), Kieff.

J'ai observé un Asphondilide voisin de *O. bipunctata* Winn. (*Gallmücken,* p. 288). Chez ce fossile tous les articles antennaires sont cylindriques à l'exception du dernier qui est ovoïde, très petit et terminé par une pointe arrondie (*Gallmücken,* pl. 4, fig. 1). Comme chez *Mikiola* (*Hormomyia,* H. Löw pr. p. et *Oligotrophus* Latr., pr. p. fagi Hart), il existe un pli alaire, bien visible, au-dessus de la fourche formée par la quatrième nervure longitudinale. L'aile de ce fossile est assez altérée. A un fort grossissement, on voit que les palpes sont bien développés, cylindriques et composés de trois articles d'égales longueurs environ. N°s 8537, VI, 5477.

(*) Pour l'étude des diptères de cette famille, j'ai suivi la récente classification de Kieffer (*Synopse des Cecidomyies d'Europe et d'Algérie,* etc., Bull. de la soc. d'histoire naturelle de Metz, cahier XX, 2e série, t. VIII, Metz, 1898).

Voir aussi la note insérée après la table des matières, p. 203.

III. DIPLOSINAE

Genre Diplosis, H. Löw. Schiner, Winn.

1° J'ai rencontré dans l'ambre deux *Cecidomyidae* de ce groupe présentant la nervation normale des Diplosis.

Ces bestioles ont une grande ressemblance avec le *Cecidomyia decorata,* Winn. (*loc. cit.,* sect. II, p. 262). L'un des individus (♀) a les antennes, et principalement le dernier article, de même forme que celle de l'espèce citée (Winn., *op. cit.*, pl. III, fig. 86). Dans son *Synopse,* Kieffer range le Diplosis (*Cecidomyia decorata*) dans le genre *Bremia,* Rondani (*op. cit.,* p. 27). Les crochets bifides des tarses étant invisibles au microscope, il est prudent, actuellement, de placer ce diptère dans la section B des Diplosis, Winn, Nos 8126, VI, 5114; 2359, VI, 1189.

2° J'ai vu un autre Diplosis qui, par le facies morphologique de ses ailes, paraît voisin de *Cecidomyia pini,* Deg. (Winn. *loc. cit.,* p. 270). Kieffer place cette espèce dans le genre Diplosis, Rondani. Comme il existe encore beaucoup d'incertitude dans le classement des espèces de Diplosis (sensu Kieffer), je préfère me borner à grouper ce fossile avec les Diplosis (*Cecidomyia*) Winn. Les antennes faisant défaut, on ne peut pousser plus loin la détermination générique de ce minuscule diptère.

IV. EPIDOSINAE

Genre Colpodia, Winn.

En étudiant divers Epidosides du genre *Colomyia,* Kieff. (*Synopse,* p. 43), j'ai rencontré un diptère de cette sous-famille qui par sa morphologie alaire paraît appartenir au genre *Colpodia,* Winn. Chez les espèces de ce genre la base de la deuxième nervure longitudinale est fortement courbée en S tandis que ce caractère est moins appréciable chez le fossile. De plus, la partie apicale de cette même longitudinale est moins sinueuse au bord postérieur de l'aile que chez les *C. angustipennis* Winn. et *pallidula* Van d. Wulp. Les articles tarsaux étant détruits, on ne peut distinguer la curieuse forme apicale du métatarse. M'appuyant seulement sur la singulière topographie alaire, je place ce fossile dans le genre *Colpodia,* Winn.

Genre Colomyia, Kieff

J'ai examiné trois *Epidosinae* de ce genre. Comme chez le *Colomyia* (*Epidosis*) *defecta* Löw, un individu a la deuxième nervure longitudinale qui n'atteint pas le bord postérieur de l'aile. Chez deux autres spécimens, cette même nervure s'anastomose distinctement au bord postérieur. A première vue les *Colomyia* paraissent se rapprocher des *Miastor*, mais ils s'en éloignent par la morphologie des antennes et des ailes. On sait que le premier de ces genres a la troisième nervure longitudinale simple et la nervure transversale inclinée comme chez *Epidosis* (*Colomyia*) *defecta* H. Löw et Winn. (*Gallmücken*, p. 294, pl. II, fig. 11). Les crochets copulateurs des ♂ examinés sont très saillants. N[os] 8835, VI, 5658 ♂ ; 4758, VI, 2785 ♂ ; 4759, VI, 2786 ♂.

Genre Ruebsaamenia, Kieff.

J'ai étudié un autre *Epidosidae* présentant plusieurs points de ressemblance avec *Asynapta pectoralis*, Winn. = *Ruebsaamenia pectoralis*, Kieff. (*Gallmücken*, p. 303, pl. II, fig. 13 et *Synopse*, p. 46). Chez ce fossile la base de l'aile est lancéolée comme chez *Colpodia angustipennis*, Winn. et la deuxième nervure longitudinale est moins courbée que chez cette espèce. Ce dernier caractère rapproche cette bestiole de *Ruebsaamenia pectoralis*, Kieff.

Genre Winnertzia, Rond.

Dans le groupe des *Epidosinae*, j'ai rencontré sept pygmées appartenant à ce genre. Ces fossiles ont une morphologie alaire très voisine de celle de *Winnertzia lugubris*, Winn. et Kieff. (*Gallmücken*, p. 305, pl. II, fig. 14 et *Synopse*, p. 47). Les antennes des ♂ sont garnies de longs verticilles, celles des ♀ ont des verticilles plus courts et moins nombreux. Chez les deux sexes les deux articles apicaux de ces organes sont un peu plus petits que les précédents. J'ai examiné un ♂ et une ♀ paraissant avoir 13 articles aux antennes. Il est clair que, pour les formes du succin, ces derniers caractères sont souvent difficilement appréciables. Une ♀ voisine de *Winnertzia boucheana*, H. Löw a l'extrémité abdominale amincie, de diamètre se rapprochant insensiblement de celui de la " Legeröhre ,, avec le dernier segment très distincte-

ment articulé. Tous les fossiles observés ont la troisième nervure longitudinale n'atteignant ordinairement pas la base de l'aile. Par la base de la deuxième nervure longitudinale, qui est presque parallèle avec la précédente (c'est-à-dire la première) et non courbée en S, ce genre se sépare immédiatement des *Colpodia* Winn. Nos 2357, VI, 1187; 2364, VI, 1194; 2366, VI, 1196; 2362, VI, 1192; 4765, VI, 2792; 4752, VI, 2779; 2376, VI, 1176.

2. Lestreminae

I. CAMPYLOMYZIDES

Genre Campylomyza Meig.

J'ai rencontré dans l'ambre un Campylomyzide ayant la plus grande ressemblance avec la *Cecidomyia formosa* Bremi (*Beiträge zu einer Monographie der Gallmücken, Cecidomyia* Meig., p. 47, pl. I, fig. 1-6). Ce fossile a neuf articles antennaires entièrement globuleux et réunis entre eux par un col très distinct. Bremi fait remarquer que le dernier article des antennes de son *C. formosa* est pétiolé. Il ajoute qu'il est probable que l'insecte étudié par lui avait des antennes altérées, et il pense que le soi-disant article apical n'est que le col ayant réuni deux articles entre eux. Je puis confirmer l'exactitude de l'idée émise par feu Bremi. En effet, dans le fragment d'ambre renfermant ce diptère, j'ai retrouvé encore deux autres articles antennaires à quelque distance de ceux adhérant à la tête. Le minuscule fossile observé présente une morphologie antennaire semblable à celle décrite par Bremi. Cet auteur a probablement étudié les antennes de cette espèce à un grossissement insuffisant, car il ne mentionne pas leur pilosité. Vu à 358 diamètres le fossile a quelques petits poils à chaque article antennaire, laissant entrevoir que la fossilisation n'a conservé chez cet être qu'une partie de la pilosité ayant été vraisemblablement assez distincte. Bergenstamm et Löw (*Synopsis Cecidomyidarum*, p. 43, N° 194) qui ont signalé le *Cecidomyia formosa* Bremi ne savent pas avec quel genre il doit être placé. La figure de l'aile donnée par Bremi (*op. cit.*, pl. I, fig. 1), ne reproduit qu'imparfaitement la véritable topographie de sa nervation qui est semblable par tous

ses caractères à celle des espèces de *Campylomyza* étudiées avec tant de soin par Winnertz (*Die Gruppe der Lestreminae*. VERH. D. K. K. ZOOL. BOT. GESELLSCH., Wien, 1870, Bd. XX, s. s. 9-10, pl. I). C'est probablement par erreur que Kieffer (*Synops*, p. 44) a placé le *Cecidomyia formosa* dans le sous-genre des *Epidosis* vrais. Comme chez les *Campylomyza* les palpes ont quatre articles et les tarses sont également composés de cinq articles dont le dernier semble être un peu plus large que le précédent. Les tibias sont assez robustes. ♀ Nos 5124, VI, 3151.

J'ai rencontré un autre *Campylomyza* également voisin du *C. formosa* dont le dernier article des antennes est rond, terminé par une sorte de pétiole ovoïde et de diamètre plus petit que celui de sa base. Poilure des articles des antennes bien distincte. Nos 2758, VI, 1588.

Chez une femelle de ce genre les articles antennaires sont subglobuleux (Nos 1735, VI, 565), tandis qu'un autre fossile les a globuleux et munis de verticilles courbés (Nos 8868, VI, 5691). Par leurs caractères alaires ces bestioles se rangent avec les vrais *Campylomyza* Meigen.

Campylomyza Meig. (Winn. *op. cit.*, pl. I, fig. 8), Nos 5918, VI, 3945; 1974, VI, 804.

II. LESTREMIDES

Genre Lestremia Macquart.

J'ai observé deux ♂ de *Cecidomyidae* de ce genre. Comme chez *Lestremia defecta* Winn. (*Die Gruppe der Lestreminae*. VERH. D. K. K. ZOOL. BOT. GESELL., Bd. XX, Wien, 1870, S. 33, Taf. II, fig. 2), l'un d'eux a la quatrième nervure longitudinale n'aboutissant pas à la base de l'aile. Nos 2367, VI, 1197; 5747, VI, 3774.

3. Heteropezinae.

Genre Miastor Meinert.

1° Un minuscule fossile ♂ appartient bien à ce genre, car il a des palpes à quatre articles dont le premier est court, le deuxième gros et le troisième et quatrième presque d'égales longueurs.

Comme on le sait, c'est par erreur que Meinert a signalé que le *M. metraloas* a des palpes biarticulés (*Winnertz. Heteropeza und Miastor.* VERH. D. K. K. ZOOL. BOT. GESELLSCH., Wien, 1870, Bd. XX, S. 7 " note de bas de page "). Dans le *Synopse*, Kieffer se borne à ranger les *M. hospes*, *metraloas*, *nervosus* et *subterraneus* parmi les *Heteropezinae* à palpes biarticulées. Malgré les travaux de feu Winnertz et les récentes recherches de Kieffer l'étude des espèces de ce genre nécessite une complète revision systématique. Par tous ces caractères notre fossile de l'ambre se range avec les *Miastor* Winnertz. Nos 2365, VI, 1195.

2° Trois autres *Heteropezinae* se classent aussi avec les *Miastor* Winn. En effet, leurs ailes ont seulement trois nervures longitudinales dont la deuxième n'atteint pas le bord apical de cet organe. A 214 et 358 diamètres, on constate que le bord postérieur alaire est garni d'une frange de poils très longs. Ces caractères rapprochent ces fossiles du *Miastor metraloas* Mein. (Winn. *loc. cit.*, p. 7). Par leurs antennes, ils diffèrent de cette espèce, car les deux ♀ et les ♂ observés ont respectivement treize et douze articles. Les espèces de ce genre peuvent se grouper comme suit :

I. Antennes de onze articles chez les deux sexes. *Miastor metraloas* Mein. (type actuel).

II. Antennes de douze articles chez les deux sexes. *M. nervosus* et *hospes* Winn. (type actuel).

III. Antennes de treize articles chez les ♀ et de douze articles chez les ♂. *Miastor du succin.* A un fort grossissement (358 d.), le premier article antennaire d'une des deux ♀ étudiées est beaucoup plus gros que celui du ♂.

Genre Brachyneura Rond.

J'ai observé une seule *Heteropezinae* qui, par ses trois nervures longitudinales simples, se classe dans le genre *Spaniocera* Winn. (*Brachyneura* Rond. et Kieff.). A première vue, ce fossile est distinct de *Lasiopteryx* Westw. et de *Ledomyia* Kieff. qui ont la troisième nervure longitudinale fourchue. Il se rapproche du dernier de ces genres car, comme *Ledomyia lugens,* il a quatre articles tarsaux : la longueur du métatarse ou premier article dépasse plus de deux fois celle du deuxième qui est plus longue que les troisième et quatrième articles réunis. Comme chez

Spaniocera squamigera Winn. les antennes sont composées de treize articles cylindriques. Cependant l'article antennaire apical de l'espèce fossile est sensiblement plus appréciable que chez l'espèce actuelle. Le corps de ce pygmée est ovoïde allongé, son thorax légèrement gibbeux, ses palpes paraissent n'être composées que de trois articles et une des lamelles de l'appareil génital ♀ est saillante.

Je propose de nommer provisoirement ce curieux Heteropezinae **Palaeospaniocera** gen. nov.

Observation : J'ai trouvé un *Cecidomyia* (S. largo), trop altéré pour le décrire génériquement, présentant une curieuse monstruosité antennaire. A un de ces organes les cinq premiers articles sont de diamètre triple de celui qui est entièrement normal.

II. MYCETOPHILIDAE (*)

GROUPE I

Ceroplatinae (**)

Les genres *Platyura* et *Macrocera* (*Macrocerinae*) sont bien représentés dans le succin. Parmi 80 individus appartenant à ces deux genres, j'ai rencontré un fossile dont la structure des palpes est voisine de celle de *Platyura marginata* Meig. (*Syst. Beschreib. d. bekannt. zweiflügl. Insekten,* Halle, 1851, I Theil, S. 182, Taf. 8, fig. 18). Ces organes sont plus longs que chez les autres *Platyura* fossiles. Leur quatrième ou dernier article a une longueur égale aux trois précédents réunis et le troisième article est plus long que la moitié du quatrième.

(*) Pour l'étude des diptères de cette famille, j'ai suivi la classification de Winnertz (*Beitrag zu einer Monographie der Pilzmucken*, VERH. D. K. K. ZOOL. BOT. GESELLSCH. Wien, 1863, Bd. XIII, S. S. 637-964, Taf. XVIII-XXI).

(**) A l'exception des *Platyura, Macrocera, Sciophila* et *Sciara,* tous les genres signalés dans ce travail sont nouveaux pour la faune des diptères de l'ambre. Pour les autres genres de cette famille, voir : Löw H., *Ueber den Bernstein und die Bernsteinfauna*, Meseritz 1850. Meunier, *Observations sur quelques diptères tertiaires*. ANN. DE LA SOC. SCIENT., Bruxelles, 1895, t. XIX (Mémoires), pp. 1-16 et 1 pl.

Long. 4mm. ♂ ? L'appareil génital est caché, mais le facies abdominal paraît être celui de ce sexe.

Observation : On sait que Meigen qui a donné un dessin très exact des palpes de *Platyura marginata* n'a pas décrit ces organes dans la diagnose de cette espèce. Nos 2482, VI, 1312.

Genre Ceroplatus Bosc.

Pour prendre date, je me borne à signaler brièvement deux *Ceroplatus* et un *Asindulum* qui ont des antennes et des palpes trop imparfaitement conservés pour décrire la fine morphologie de ces organes. Ces deux *Ceroplatus* présentent les caractères suivants : le premier spécimen a des antennes larges, plates, vigoureuses, paraissant être composées de 14 articles (ils sont peu visibles au microscope) et plus courtes que la tête et le thorax réunis. Le pétiole de la première fourche est plus long que chez les *Platyura* Winn. et les *Ceroplatus* Bosc. et Winn. Nous avons remarqué que les fossiles ont ordinairement ce pétiole plus long que les espèces actuelles. Une ♀ ? Long. 3 mm. Nos 2350, VI, 1180.

Le second individu a l'abdomen en partie altéré. Les palpes qui ne sont pas mammeliformes, comme c'est le cas pour les *Ceroplatus*, ont leur dernier article ovoïde allongé et distinctement pourvu de petits cils. Long. 4mm. Nos 1465, VI, 285.

Genre Asindulum Bosc.

J'ai vu un *Ceroplatinae* de ce genre présentant les caractères suivants : antennes (fig. 1) composées de dix-sept articles : le 1er godiforme, le 2e cupuliforme, le 3e conique renversé et aussi long que les deux premiers réunis. Les autres articles sont cylindriques et presque d'égales largeurs, à l'exception des deux derniers. Le 17e article, de diamètre plus petit que le 16e, a la forme d'un bouton arrondi. Les palpes (fig. 2) diffèrent de celles de *A. flavum* Winn. (*Pilzmücken,* p. 706, n° 2). Les deux premiers articles sont peu distincts, le 3e paraît être aussi long que le 4e, qui est nettement fusiforme. Les 2e et 3e articles ont quelques cils forts et le 4e est cilié à son apex. La partie inférieure de la tête a la forme d'une sorte de museau court, comme cela se voit chez *A. flavum* Winn. Par ses ailes (fig. 3) ce fossile diffère aussi de cette espèce, car le

rameau supérieur de la fourche du cubitus (c'est-à-dire de la nervure cubitale), au lieu d'être droit, est parfaitement sinueux. Long. 4mm. Nos 1514, VI, 344.

J'espère pouvoir donner dans la monographie des diptères de l'ambre les diagnoses de plusieurs nouvelles espèces des genres *Asindulum*, *Ceroplatus*, *Platyura* et *Macrocera*, d'après les individus du " Bernsteinmuseum " de Koenigsberg. Nos nouvelles recherches relatives aux *Platyura* et *Macrocera* viennent justifier entièrement l'exactitude de la classification de Winnertz et elles confirment, une fois de plus, que les *Macrocerinae* et les *Ceroplatinae* ont une origine phylogénique différente.

GROUPE II

Sciophilinae

L'étude de plusieurs *Mycetophilidae* de cette sous-famille me permet de compléter le tableau des *Sciophilinae* du succin (*).

I. Nervure costale non prolongée au delà du cubitus. *Sciophila* Meig. (forme type).

II. Nervure costale à peine prolongée au delà du cubitus. *Vena mediastinalis* se réunissant au bord de l'aile en deçà de la cellule médiane (Quadratzelle). Nervure transversale s'anastomosant avec la première longitudinale avant la cellule citée.

Certaines espèces de *Sciophila* du succin. Long. 5mm. Nos 170, VI, 32; 42, VI, 10 (fig. 4 *a* et *b*).

III. Nervure costale prolongée au delà du cubitus et atteignant à peu près le milieu du bord postérieur alaire.

1° *Vena mediastinalis* s'anastomosant seulement au centre de la cellule quadriforme (médiane).

Autres espèces de *Sciophila* fossiles. Long. 8mm. Nos 38, VI, 8 (fig. 5).

2° *Vena mediastinalis* se réunissant avec la première longitudinale en deçà de la petite cellule quadriforme (médiane).

(*) Meunier, F. *Über die Mycetophiliden (Sciophilinae) des Bernsteins.* Ill. Zeitschrift f. Entomologie. n° 5, pp. 68 70 et 8 figures. Neudamm 1900.

Loewiella Meun. (*). Long. 4 mm. Nos 1355, VI, 185; 2424, VI, 1254 (fig. 6).

3° *Vena mediastinalis* aboutissant au milieu de la cellule quadriforme (médiane). Pas de rameau s'anastomosant avec le bord costal. Nervure cubitale presque droite.

Affinis Empheria pictipennis Winn. (*op. cit.*, p. 742, pl. XIX, fig. 9 *b*). Long. du fossile 4mm? Nos 2319, VI, 1149 (fig. 7).

Observations : J'ai rencontré un *Sciophilinae* (en assez mauvais état de conservation) se rapprochant par la cellule quadriforme (*Mittelzelle,* Winn.) de *Empheria formosa*, Winn. (*Pilzmücken,* pp. 743-744, pl. XIX, fig. 9*c*). Il en diffère cependant par la *vena mediastinalis* qui, au lieu de s'anastomoser au bord costal alaire, se réunit à la première nervure longitudinale à peu de distance de la cellule précédemment citée. Je n'ai pu constater si la nervure costale se prolonge à quelque distance du cubitus. Long. 4 1/2mm. Nos 2415, VI, 1245 (fig. 8).

Le genre *Palaeoempalia,* Meun., paraît être représenté par plusieurs espèces (**). Long. 5mm. Nos 2332, VI, 1162 (fig. 9).

L'aile de ce fossile a déjà été figurée en partie (Meun. F., Allg. Zeitschr. f. Entomologie, p. 69, fig. 4, n° 5). La cellule quadriforme (médiane) est plus grande que chez les *Empalia* et la deuxième fourche de l'aile est plus longue que chez les formes actuelles.

GROUPE III

Mycetophilinae (***)

Genre Syntemna, Winn.

Le spécimen de l'ambre diffère légèrement de *S. morosa*, Winn. (*Pilzmücken,* p. 768). La couleur des lamelles génitales au lieu

---

(*) Meunier, F. *Observations sur quelques diptères tertiaires,* etc. Ann. de la Soc. scient. de Bruxelles, t. XIX (Mémoires), p. 10, fig. 7. Bruxelles, 1894-95.

Note sur les *Mycetophilidae de l'ambre tertiaire.* Ann. de la Soc. ent. de France, t. LXIII, p. CX-CXI et 2 figures. Paris, 1894.

(**) Dans le travail monographique des diptères de l'ambre, je donnerai les diagnoses de plusieurs espèces tertiaires de *Sciophilinae.*

(***) Les genres de cette famille énumérés ci-dessus (à l'exception de *Sciara* et de *Boletina*) n'ont pas encore été rencontrés par les paléoentomologistes.

d'être jaune comme chez la ♀ de cette espèce est entièrement noire. Ces Mycétophiliens paraissent être très rares dans le succin. Long. 3^{mm}. N° 2321, VI, 1152.

Genre Docosia, Winn.

J'ai rencontré trois individus de ce genre. Par la *vena mediastinalis* (*Hulpader,* V. d. Wulp) qui s'anastomose avec la nervure sous-costale une des bestioles observées se rapproche de *D. sciarina,* Winn. Les autres caractères de ces fossiles sont trop altérés pour les décrire rigoureusement. Long. 3 1/2^{mm}; 3 1/2^{mm}; 3^{mm}. N°s 1874, VI, 704; 1746, VI, 576; 362, VI, 68.

Genre Allodia, Winn.

J'ai observé deux Mycétophiliens qui par la morphologie des antennes et des ailes se rangent parmi les espèces de ce genre. Long. 3^{mm}; 5^{mm}. N°s 2337, VI, 1167; 13, VI, 5.

Genre Anaclinia, Winn.

Un ♂ de ce genre a la deuxième nervure longitudinale n'étant pas visiblement courbée comme chez *A. nemoralis,* Meig. (*Mycetophila nemoralis,* Meig.). Une ♀ a la nervure précitée de même forme que l'espèce actuelle. Long. 2^{mm}; 2^{mm}; 3^{mm}. N°s 1685, VI, 515; 2248, VI, 1078; 2432, VI, 1262.

Genre Acnemia, Winn.

Un fossile de ce genre se place avec certitude dans le grand groupe des *Leia,* Meig. Long. 3^{mm}. N°s 1333, VI, 163.

Aff. Genre Glaphyroptera, Winn.

1° *Vena mediastinalis* (*Hülfsader* ou *vena auxiliaris,* Winn.) et cubitus de l'aile comme chez les espèces actuelles. Par le manque de nervule transversale à la *vena mediastinalis* une espèce fossile de ce genre paraît se rapprocher de *Leia,* Winn. (fig. 12). Pétiole de la fourche supérieure plus long que chez les formes vivantes. La quatrième cellule postérieure (c'est-à-dire celle qui est formée par

la nervure discoïdale inférieure et la nervure postérieure) se rapproche du genre *Leia,* Winn. (*Leia,* in part. Meig.) puisqu'elle se termine à peu de distance de la base de l'aile. Par la *vena mediastinalis,* ce fossile s'éloigne de ce dernier genre. Loew a raison de dire que ces bestioles ont une certaine ressemblance avec les *Sciarinae.* Leurs antennes sont composées de seize articles : les deux basilaires godiformes et pourvus de quelques cils, les suivants cylindriques et ornés d'une fine poilure bien visible à 124 diamètres. Long. 2 1/2^{mm}; 2 1/2^{mm}. N°s 124, VI, 24 (fig. 10 et 11); 1649, VI, 479 (fig. 12).

2° Aff. *Glaphyroptera,* Winn., *Leia,* Meig. (in part.), *Dianepsia?* Loew.

Ce fossile diffère des individus de ce genre par les caractères suivants : nervure sous-costale presque droite (elle est courbée chez les *Glaphyroptera,* Winn.) et pétiole de la fourche supérieure plus long que chez les espèces actuelles. Nervure costale prolongée au delà du cubitus et fourche inférieure de l'aile seulement un peu plus longue que la supérieure (ce caractère est plus accentué chez les *Glaphyroptera*). Les deux premiers articles des antennes godiformes, le deuxième avec quelques petits cils et un long macrochète à son extrémité (Winnertz ne signale pas ce caractère chez les espèces vivantes), les quatre articles suivants cylindriques et distinctement poilus, les sept derniers sont de plus petits diamètres que tous les précédents. Palpes à quatre articles, le dernier aussi long que les autres pris ensemble. Par ce caractère ce fossile se range avec les *Glaphyroptera,* Winn. Long. 2 3/4^{mm}. N°s 2315, VI, 1145 (fig. 13 et 14).

Observation : Les divers rapprochements existant parmi les espèces des genres *Boletina* et *Glaphyroptera* paraissent indiquer une même origine phylogénétique.

Aff. Genre Boletina, Staeger.

J'ai vu trois *Mycetophilidae* ayant plusieurs traits de ressemblance avec les diptères de ce genre. La nervure costale est prolongée au delà du cubitus et la nervure auxiliaire (*vena mediastinalis*) est située à la même place que chez les vrais *Boletina.* Comme chez plusieurs fossiles de cette famille, le pétiole de la première fourche alaire est toujours plus long que chez les espèces

actuelles. Un des individus observés a la nervure médiastine qui après avoir atteint la petite nervule transversale, se prolonge encore un peu, mais ne s'anastomose pas au bord costal de l'aile, comme c'est le cas pour l'autre forme du succin. Long. 3mm; 4mm; 4mm. Nos 1563, VI, 393; 1280, VI, 110 (fig. 15); 1730, VI, 560.

GROUPE IV

Sciarinae

Genre Sciara, Meig.

L'examen de 2000 individus de cette sous-famille me permet de mieux grouper les fossiles du genre *Sciara*, étudiés en 1850 par feu le Professeur Dr H. Löw (*), dont quelques types ont été redécrits et figurés (pour la première fois) dans le travail de revision des diptères du Musée provincial de Koenigsberg (**). Dans la monographie des diptères tertiaires, j'essayerai d'établir certains rapprochements parmi les formes fossiles et les espèces récentes décrites par Winnertz (***).

Comme Loew, j'ai constaté que le *Sciara hirticornis* est très commun dans l'ambre (Loew, *loc. cit.*, p. 34).

Les *sciara* du succin peuvent se diviser comme suit :

I. Première nervure longitudinale anastomosée au bord costal de l'aile au-dessus de la première fourche.

Type : *Sciara obscura,* Winn. (*loc. cit.,* p. 34, no 21).

Ces *sciara* ne semblent pas être très répandus dans cette résine tertiaire.

II. Première nervure longitudinale anastomosée au bord costal alaire bien avant le point d'où émerge la première fourche.

Type : *Sciara luctuosa,* Winn. (*loc. cit.*, p. 47).

La majeure partie des fossiles examinés appartient à cette division.

(*) *Ueber den Bernstein und die Bernsteinfauna*, S.S. 33-34.

(**) Meunier F., *Miscellanea Entomologica*, Narbonne, 1899, nos 10-11, pp. 161-165 et no 12, pp. 169-180 et 4 pl.

(***) *Beitrag zu einer Monographie der Sciarinen*, VERH. D. K. K. ZOOL. BOT. GESELLSCH., Wien, 1867.

III. Première nervure longitudinale de l'aile anastomosée au delà du dessus de la première fourche.

Type : *Sciara carbonaria*, Meig. (Winn., *loc. cit.*, p. 13).

Je n'ai trouvé aucun spécimen fossile de cette division si bien représentée dans la faune actuelle.

Observation : J'ai rencontré un *Sciara* aptère (*) paraissant avoir quelque affinité avec le genre *Epidapus Haliday* (Winn., *loc. cit.*, pp. 182-183). Il se distingue de *E. venaticus* Hal. par le dernier article des antennes qui est plus long que les précédents et par les balanciers qui sont bien développés. Ces derniers organes font totalement défaut chez l'espèce actuelle. Long. 1mm. Nos 1382, VI, 212.

Genre Bradysia, Winn.

Ces *Sciarinae* se séparent immédiatement des espèces du genre Sciara Winn. (et auct.) par leurs ailes qui sont toujours plus courtes que l'abdomen. A un fort grossissement, je ne puis constater la présence de la fine poilure qui devait garnir toute la surface du champ de l'aile. Trois ♀ et un ♂. Long. 1mm; 1 1/2mm?; 2mm; 3mm; 2mm. Nos 2087, VI, 917; 2189, VI, 1019; 1501, VI, 331; 2200, VI, 1030; 1990, VI, 820.

Genre Corynoptera, Winn.

J'ai observé trois *Sciarinae* de ce genre. Le premier article des antennes est godiforme et le deuxième cupulaire. Tous les articles sont garnis de cils raides rapprochant une de ces bestioles de *C. perpusillata* Winn. (*loc. cit.*, p. 77). Chez les fossiles les tibias sont de même longueur que les articles tarsaux. Leurs ailes dépourvues de " Fluegellappen " ont la forme de massue. Les balanciers sont grands et très saillants. Ce dernier caractère paraît exister uniquement chez les fossiles car Winnertz qui est toujours si précis dans ses diagnoses n'en fait pas mention. La ♀ que j'ai examinée est altérée par la fossilisation. A 66 diamètres, les

---

(*) Ce fossile est peut-être un Sciara immature ou qui a perdu accidentellement ses ailes. Il est curieux de constater que l'examen de 2000 spécimens de ce genre ne m'a pas permis de retrouver un autre *Sciarinae* de même facies morphologique.

antennes ne sont pourvues que de cils épars. L'abdomen de deux ♂ est robuste et aussi large que le thorax. Celui d'une ♀ a été distendu par les œufs ayant occupé presque toutes les cavités splanchniques de ce diptère. Ses tibias sont plus longs que le métatarse et les articles tarsaux réunis. Long. 1^{mm}; 1^{mm}; 1^{mm}? N°s 1481, VI, 311; 1663, VI, 466; 1823, VI, 653.

Genre Trichosia, Winn.

En étudiant les *Sciarinae* de la collection du Musée provincial de Koenigsberg, j'avais placé ce diptère avec les *Sciara* de la section I, fig. 2 (Winnertz). Un nouvel examen de ce fossile m'a permis de constater que sa surface alaire est ornée de petits poils très appréciables et que son bord costal est distinctement cilié comme chez les espèces de Trichosies. Long. 2^{mm}. N°s 2103, VI, 933 (♀).

Observation : Parmi 500 *Mycetophilidae*, j'ai rencontré un diptère trop altéré pour décrire la topographie de ses ailes. J'ai seulement pu constater que le bord antérieur et la première nervure longitudinale de ces organes sont ornés, sur toute leur longueur, de cils bien appréciables. Long. 1^{mm}. N°s 1300, VI, 130 (fig. 16).

Description d'un nouveau genre et d'une nouvelle espèce de Cecidomyidae du Copal fossile

Dans une petite collection d'insectes de Copal, qui m'a été communiquée par M. Künow, conservateur honoraire du Musée zoologique de Koenigsberg, j'ai vu un *Cecidomyidae* de la sous-famille des *Heteropezinae* se séparant du genre *Heteropeza* par les caractères suivants :

Tête peu distincte. Palpes invisibles (même à 358 diamètres).

Antennes paraissant être composées de douze articles (*), celui de la base godiforme, les suivants ovoïdes, pétiolés (chez le ♂ examiné) et garnis, de chaque côté, de quelques verticilles (fig. 17).

Thorax bombé comme dans le genre *Heteropeza* Winn. Balan-

(*) Je n'ai pu constater la presence de l'article basilaire normal existant chez les autres *Cecidomyidae*. Cet organe est probablement altéré par la fossilisation.

ciers très longs, leur bouton apical saillant. On ne peut compter le nombre des segments abdominaux de ce pygmée.

Hanches robustes, fémurs dilatés à l'extrémité, tibias longs, métatarse légèrement plus court que les trois articles suivants réunis (ce caractère rapproche ce fossile de *Heteropeza pygmaea,* Winn), deuxième article tarsal plus long que le troisième, le quatrième de longueur égale aux deux précédents pris ensemble. A 358 de grossissement, je n'ai pu voir la morphologie des crochets tarsaux (fig. 18).

Ailes étroites, longuement lancéolées et ornées d'une seule nervure longitudinale. Bord antérieur et postérieur de cet organe pourvus respectivement d'une longue et d'une très longue frange de poils. Surface alaire visiblement chagrinée (fig. 19).

Par les ailes et les articles tarsaux ce fossile semble devoir se placer parmi les *Heteropezinae.*

Comme il n'a qu'une nervure longitudinale, il s'éloigne de *Heteropeza pygmaea,* Winn. avec qui cependant il a une assez grande ressemblance morphologique. Par ses articles tarsaux, il paraît être proche parent de *Heteropeza* et *Miastor*. Comme chez le premier de ces genres, son métatarse est plus long que les autres articles réunis. Il a de l'affinité avec les *Miastor* Mein. car ses tarses ont quatre articles tandis que ceux de *H. pygmaea* ne sont que triarticulés. Par le nombre de leurs nervures longitudinales alaires les autres *Heteropezinae* se séparent, à première vue, de l'espèce du Copal fossile. Je propose de désigner ce curieux *Heteropezinae* sous le nom de : **Stenoptera** (*) **Kiefferi** en l'honneur du savant cécidologue du collège de Bitsche.

Long. 3/4 ^{mm}.

Observation : Le genre *Monodicrana* Löw, comme le dit M. l'abbé Kieffer (**), semble devoir se ranger avec les *Heteropezinae.*

Scudder (***) a décrit les *Lasioptera recessa* et *Lithomyza condita.*

(*) Du grec στενός (étroit) et πτερόν (aile).

(**) *Synopse*, p. 53.

(***) *The first discovered traces of fossil insects in the Americain Tertiaries*, Bull. of the U. S. Geol. Survey, Washington, 1877, pp. 745-746.

Observation : Par leur facies morphologique les *Heteropezinae* paraissent avoir une parenté, probablement très éloignée, avec certains hémiptères *Coccidae* (*). Chez ces insectes les ailes postérieures de quelques mâles ont parfois la forme de balanciers. L'unique article tarsal des *Coccidae* sépare immédiatement ces homoptères des *Heteropezinae* et des autres *Cecidomyidae.*

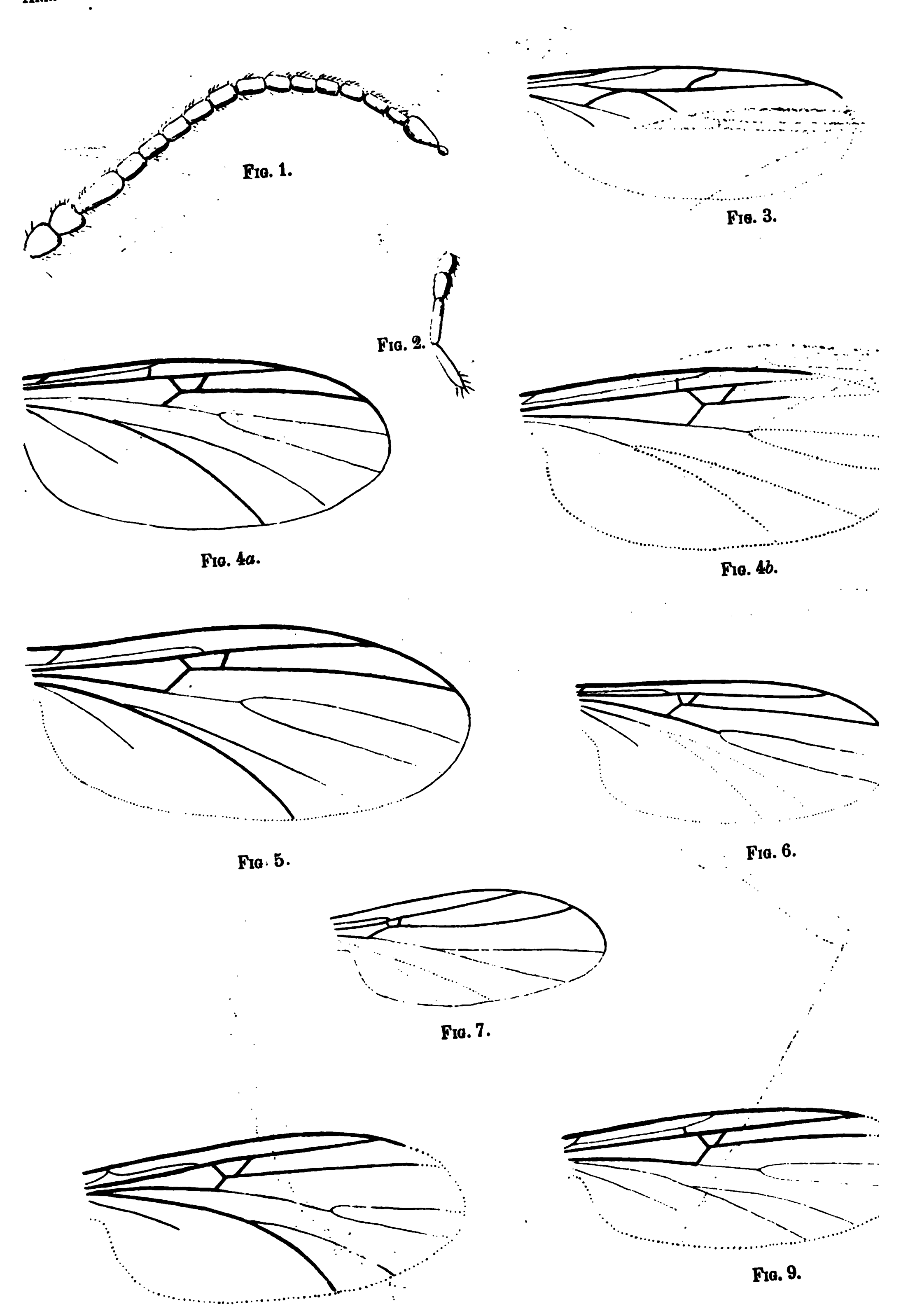
Explication des figures (**)

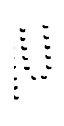
Fig. 1. Antenne de Asindulum Bosc.
Fig. 2. Palpe — — —
Fig. 3. Partie antérieure de l'aile du même insecte (***).
Fig. 4 *a* et *b*. Ailes de certaines espèces de Sciophila du succin.
Fig. 5. Aile d'une autre espèce de Sciophila du succin.
Fig. 6. — de Loewiella, Meun.
Fig. 7. — de aff. Empheria pictipennis Winn.
Fig. 8. — — — — formosa Winn.
Fig. 9. — — Palaeoempalia, Meun.
Fig. 10. — — aff. Glaphyroptera Winn.
Fig. 11. Antenne du même insecte.
Fig. 12. Aile d'une autre espèce de aff. Glaphyroptera Winn.
Fig. 13. Aile de aff. Glaphyroptera Winn. (Leia in part. Meig. = Dianepsia? Loew.)
Fig. 14. Antenne du même insecte.
Fig. 15. Aile de aff. Boletina Staeger.
Fig. 16. Partie antérieure de l'aile d'un Mycetophilidae à première nervure longitudinale ciliée.
Fig. 17. Antenne de Stenoptera Kiefferi, gen. nov. sp. nov.
Fig. 18. Patte antérieure du même insecte.
Fig. 19. Aile du même insecte.

(*) Amyot C J. B. et Serville A., *Histoire naturelle des insectes Hémiptères* Paris, 1843, pp. 625-635. — Burmeister, H., *Handbuch d. Entomologie*, Berlin, 1839, t. II, p. 61 et suivantes.

(**) Les figures 1 à 16 ont été dessinées à 66 diamètres et celles de 17 à 19 à un grossissement de 141.

(***) Les parties d'organes restaurés sont figurées en pointillé.


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4a.
Fig. 4b.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 9.



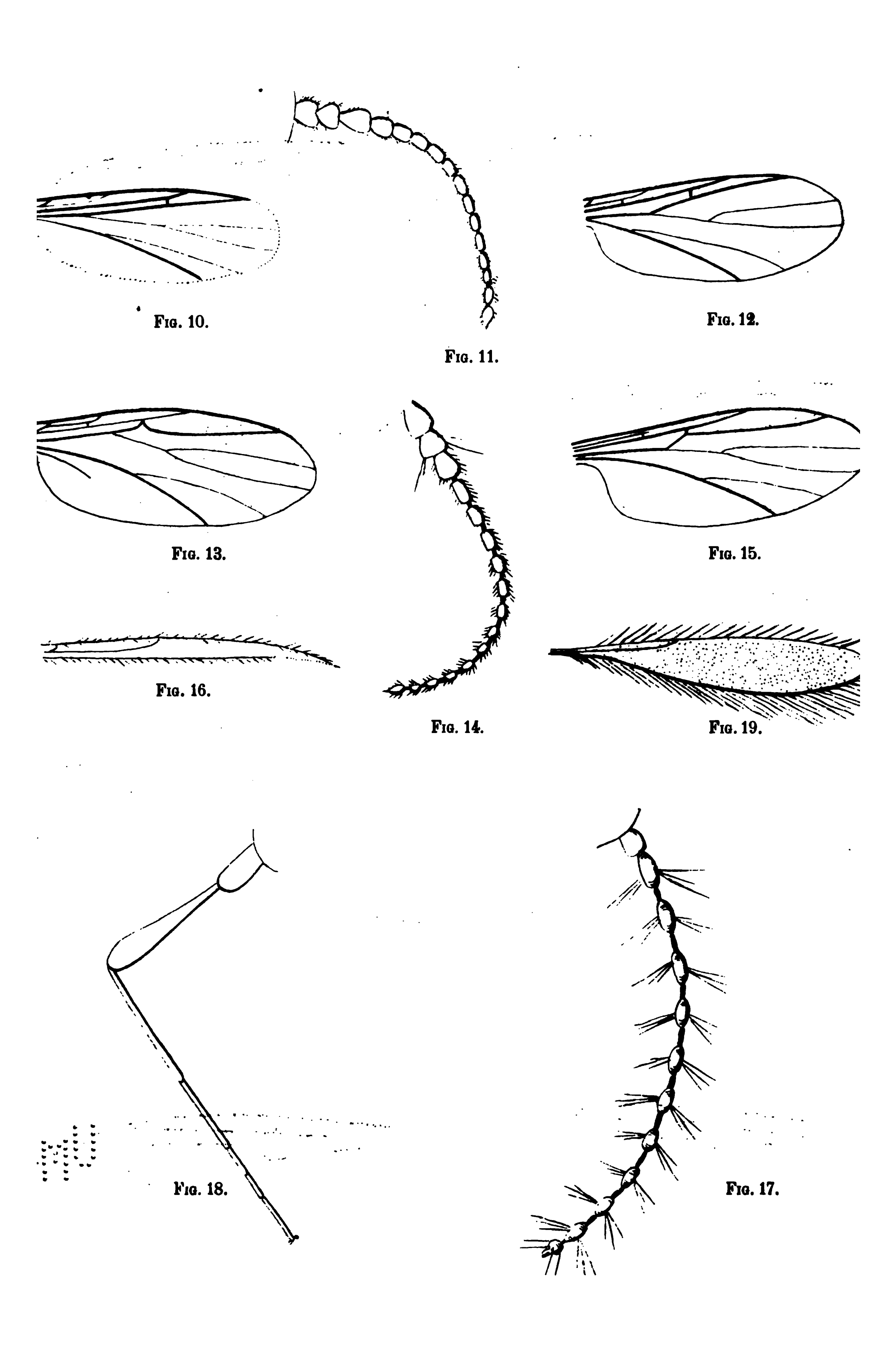


Fig. 10.

Fig. 11.

Fig. 12.

Fig. 13.

Fig. 14.

Fig. 15.

Fig. 16.

Fig. 17.

Fig. 18.

Fig. 19.

TABLE DES MATIÈRES (*)

(*) Les genres marqués d'un astérisque sont cités comme termes de comparaison.

NOTE

Au moment de mettre sous presse, j'apprends que M. v. Osten-Sacken vient de publier une note critique sur la classification des Cecidomyidae (*On the new nomenclature of the Family Cecidomyiae adopted by Mr. Rübsaamen and others*. THE ENTOMOLOGIST'S MONTHLY MAGAZINE, vol. XII, feb. 1901).

SUR L'EMPLOI DES TABLES DE SIACCI

pour résoudre les problèmes du tir

dans le cas des grands angles de projection et lorsque la vitesse est supérieure à 300 mètres

PAR

M. le C^e de SPARRE

Professeur aux Facultés catholiques de Lyon

En se reportant aux valeurs de la résistance de l'air données par Siacci dans sa note de février 1896, on constate qu'à partir de 290 m. environ cette résistance peut être représentée par une fonction linéaire de la vitesse v.

Nous donnons, en effet, dans le tableau suivant la valeur de $F(v)$ extraite de la note de Siacci, et en regard la valeur approchée

$$\varphi(v) = 0{,}362\, v - 93{,}2$$

pour des valeurs de v, de 100 en 100 m., de 300 m. à 1500 m. Nous y ajoutons la différence

$$\epsilon = F(v) - \varphi(v)$$

et la valeur $\frac{\epsilon}{F(v)}$ de l'erreur relative que l'on commet en remplaçant F(v) par $\varphi(v)$.

v	F(v)	$\varphi(v)$	ϵ	$\frac{\epsilon}{F(v)}$
300	15,45	15,40	0,05	0,003
400	51,53	51,60	— 0,07	— 0,001
500	87,08	87,80	— 0,72	— 0,008
600	123,24	124,00	— 0,76	— 0,006
700	159,62	160,20	— 0,58	— 0,004
800	196,07	196,40	— 0,33	— 0,002
900	232,55	232,60	— 0,05	— 0,000
1000	269,04	268,80	0,24	0,001
1100	305,54	305,00	0,54	0,002
1200	342,03	341,20	0,83	0,002
1300	378,5	377,4	1,1	0,003
1400	415	413,6	1,4	0,003
1500	451,5	449,8	1,7	0,004

Nous rappelons que, dans les formules de Siacci, l'accélération de la résistance de l'air est représentée par l'expression

$$r = \frac{\delta i}{c} F(v)$$

où δ est la densité de l'air dans les conditions de l'expérience; c'est le rapport du poids du mètre cube d'air en kilo, dans les conditions de l'expérience, au nombre 1,206, poids du mètre cube pour une hauteur barométrique de 750^{mm}, une température de 15° et un état hygrométrique de $^1/_2$; i est l'indice balistique du pro-

jectile ; $c = \frac{p}{1000\,a^2}$, p étant le poids du projectile en kilos et a le diamètre du projectile en mètres.

Il résulte de là que si on pose (*)

$$p = kr^3$$

r étant le rayon du projectile en mètres, on a

$$c = \frac{kr}{4000}.$$

Si on se reporte au tableau précédent, on voit que l'erreur relative résultant de la substitution de la valeur approchée $\varphi(v)$ à la valeur exacte $F(v)$ n'atteint jamais $^1/_{100}$; or on ne peut guère admettre que la loi de la résistance de l'air est connue avec une approximation plus grande; dans tous les cas, cette erreur est bien inférieure à l'influence de la variation de la densité de l'air avec l'altitude.

D'autre part, si on considère une trajectoire pour laquelle la vitesse initiale est supérieure à 400 m., s'il s'agit d'un projectile de gros calibre, ou à 300 m., s'il s'agit d'un projectile de petit calibre, on remarquera que, sur la portion de cette trajectoire où la vitesse reste, dans le premier cas, supérieure à 400 m., et, dans le second, à 300 m., l'inclinaison de la tangente variera dans des limites fort restreintes. Il en résulte que, pour cette position de la trajectoire, on pourra négliger les termes de l'ordre du carré de la variation de l'inclinaison.

Par suite, si θ_0 est l'inclinaison initiale et θ l'inclinaison en un point quelconque de la portion de trajectoire que nous considérons, nous poserons

$$\theta_0 = \varphi + \eta$$
$$\theta = \varphi + \epsilon$$

(*) Pour certains projectiles usuels on a environ

$$k = 108\,000 = 27 \times 4000$$

et par suite

$$c = 27\,r.$$

η étant un angle fixe et ϵ un angle variable, tels que nous puissions négliger les termes de l'ordre du carré de l'un et de l'autre.

Prenons pour axe des x une droite située dans le plan du tir, passant par l'origine du mouvement et faisant un angle φ avec l'horizon, pour l'axe des y la droite faisant avec l'horizon l'angle $\frac{\pi}{2} + \varphi$. Nous considérons une branche de courbe où ϵ reste toujours inférieur (à peu de chose près) à η en valeur absolue, de sorte que ϵ pourra varier de η à $-\eta$.

Désignons par gR l'accélération de la résistance de l'air prise en valeur absolue, par ρ le rayon de courbure de la trajectoire, on aura

$$\frac{dv}{dt} = -g \sin \theta - gR = -g [\sin (\varphi + \epsilon) + R]$$

$$\frac{v^2}{\rho} = g \cos \theta = g \cos (\varphi + \epsilon)$$

$$\frac{dx}{dt} = v \cos \epsilon$$

Par suite, si nous négligeons les termes de l'ordre de ϵ^2, nous aurons

$$\frac{dv}{dt} = -g [\sin \varphi + R + \epsilon \cos \varphi]$$

$$\frac{v^2}{\rho} = -\frac{v^2 d\epsilon}{dx} \cos \epsilon = -\frac{v^2 d\epsilon}{dx} = g (\cos \varphi - \epsilon \sin \varphi) ;$$

on en déduit, toujours aux termes en ϵ^2 prés,

$$(1) \qquad dt = -\frac{1}{g} \frac{dv}{\sin \varphi + R} \left(1 - \frac{\epsilon \cos \varphi}{\sin \varphi + R}\right)$$

$$(2) \qquad dx = -\frac{1}{g} \frac{v\, dv}{\sin \varphi + R} \left(1 - \frac{\epsilon \cos \varphi}{\sin \varphi + R}\right)$$

$$d\epsilon = -\frac{g}{v^2} (\cos \varphi - \epsilon \sin \varphi)\, dx$$

ou

$$d\epsilon = \frac{\cos\varphi\, dv}{v(\sin\varphi + R)}(1 - \epsilon \operatorname{tg}\varphi)\left(1 - \frac{\epsilon\cos\varphi}{\sin\varphi + R}\right)$$

Puisque nous négligeons les termes de l'ordre du carré de ϵ, il faudra, dans le calcul de ϵ, négliger les termes en ϵ dans le second membre ; on aura par suite, avec l'approximation convenue,

$$d\epsilon = \frac{\cos\varphi\, dv}{v(\sin\varphi + R)}. \tag{3}$$

Mais dans le cas qui nous occupe, on peut, ainsi que nous l'avons dit, prendre

$$gR = \frac{\delta i}{c}(av - b)$$

avec

$$a = 0{,}362, \qquad b = 93{,}2.$$

On a donc

$$dx = -\frac{v\, dv}{g\sin\varphi + \frac{\delta i}{c}(av - b)}\left(1 - \frac{g\epsilon\cos\varphi}{g\sin\varphi + \frac{\delta i}{c}(av - b)}\right),$$

$$dt = -\frac{dv}{g\sin\varphi + \frac{\delta i}{c}(av - b)}\left(1 - \frac{g\epsilon\cos\varphi}{g\sin\varphi + \frac{\delta i}{c}(av - b)}\right),$$

$$d\epsilon = \frac{g\cos\varphi\, dv}{v\left[g\sin\varphi + \frac{\delta i}{c}(av - b)\right]}.$$

Posons maintenant $v = \mu z$ où μ désigne une constante, nous aurons :

$$dx = -\frac{\mu^2 z\, dz}{g\sin\varphi + \frac{\delta i}{c}(a\mu z - b)}\left[1 - \frac{g\epsilon\cos\varphi}{g\sin\varphi + \frac{\delta i}{c}(a\mu z - b)}\right],$$

ce qui peut s'écrire

$$dx = -\frac{\mu c}{\delta i}\frac{z\,dz}{az-\frac{b\delta i - cg\sin\varphi}{\mu\delta i}}\left[1-\frac{cg\cos\varphi}{\mu\delta i}\frac{\epsilon}{az-\frac{b\delta i - gc\sin\varphi}{\mu\delta i}}\right],$$

et on aura de même

$$dt = -\frac{c}{\delta i}\frac{dz}{az-\frac{b\delta i - gc\sin\varphi}{\mu\delta i}}\left[1-\frac{cg\cos\varphi}{\mu\delta i}\frac{\epsilon}{az-\frac{b\delta i - gc\sin\varphi}{\mu\delta i}}\right],$$

$$d\epsilon = \frac{cg\cos\varphi}{\mu\delta i}\frac{dz}{z\left[az-\frac{b\delta i - gc\sin\varphi}{\mu\delta i}\right]}.$$

Faisons maintenant

$$b = \frac{b\delta i - gc\sin\varphi}{\mu\delta i}$$

d'où l'on déduit

$$\mu = \frac{b\delta i - gc\sin\varphi}{b\delta i} = 1-\frac{cg}{b\delta i}\sin\varphi \tag{4}$$

Nous aurons

$$dx = -\frac{\mu c}{\delta i}\frac{z\,dz}{az-b}\left[1-\frac{cg\cos\varphi}{\mu\delta i}\frac{\epsilon}{az-b}\right] \tag{5}$$

$$dt = -\frac{c}{\delta i}\frac{dz}{az-b}\left[1-\frac{cg\cos\varphi}{\mu\delta i}\frac{\epsilon}{az-b}\right] \tag{6}$$

$$d\epsilon = \frac{cg\cos\varphi}{\mu\delta i}\frac{dz}{z(az-b)}. \tag{7}$$

On peut remarquer d'ailleurs que l'équation (4) donne

$$\frac{cg\cos\varphi}{\mu\delta i} = \frac{b(1-\mu)}{\mu}\cot\varphi.$$

D'après ce que nous avons dit, F(v) peut être pris égal à $av - b$ pour v supérieur à 300 m.; il en résulte que, pour z compris entre

300 et 1500, nous avons au moyen des tables de Siacci les tables des fonctions

$$D(z) = -\int \frac{z\,dz}{az - b} \tag{8}$$

$$J(z) = -\int \frac{2g\,dz}{z\,(az - b)} \tag{9}$$

$$T(z) = -\int \frac{dz}{az - b} \tag{10}$$

$$A(z) = -\int \frac{J(z)\,z\,dz}{az - b}. \tag{11}$$

La dernière relation peut d'ailleurs s'écrire

$$A(z) = \int J(z)\,d\,[D(z)]. \tag{11'}$$

Nous aurons par suite

$$x = \frac{\mu c}{\delta i}\,[D(z) - D(z_0)] + \frac{c^2 g \cos\varphi}{\delta^2 i^2} \int \frac{\epsilon z\,dz}{(az - b)^2} \tag{12}$$

$$t = \frac{c}{\delta i}\,[T(z) - T(z_0)] + \frac{c^2 g \cos\varphi}{\mu \delta^2 i^2} \int \frac{\epsilon\,dz}{(az - b)^2} \tag{13}$$

$$\epsilon = \eta - \frac{c \cos\varphi}{2\mu\,\delta i}\,[J(z) - J(z_0)]. \tag{14}$$

On aura enfin

$$dy = \epsilon\,dx$$

ou, puisque nous négligeons les termes en ϵ^2,

$$dy = \eta\,dx - \frac{c^2 \cos\varphi}{2\delta^2 i^2}\,[J(z) - J(z_0)]\,dD(z)$$

donc

$$y = \eta x - \frac{c^2 \cos\varphi}{2\delta^2 i^2}\,[A(z) - A(z_0)] + \frac{c \cos\varphi}{2\mu\delta i}\,J(z_0)x$$

Mais en tenant compte de (12) et en remarquant que si on néglige les termes en ϵ

$$x = \frac{\mu c}{\delta i}[D(z) - D(z_0)]$$

on pourra écrire

$$(15) \qquad y = \eta x - \frac{cx \cos\varphi}{2\mu\delta i}\left[\frac{A(z) - A(z_0)}{D(z) - D(z_0)} - J(z_0)\right].$$

Si d'ailleurs, on remplace x par sa valeur approchée, aux termes en ϵ^2 près, on aura

$$(15') \quad y = \frac{\mu c}{\delta i}\left[\eta + \frac{c\cos\varphi}{2\mu\delta i}J(z_0)\right][D(z) - D(z_0)] - \frac{c^2\cos\varphi}{2\delta^2 i^2}[A(z) - A(z_0)].$$

Reste à calculer les termes en ϵ dans (12) et (13), c'est-à-dire les deux intégrales

$$\int\frac{\epsilon z\,dz}{(az-b)^2}, \qquad \int\frac{\epsilon\,dz}{(az-b)^2}$$

aux termes en ϵ^2 près

Si on remarque que, aux termes en ϵ près

$$dx = -\frac{\mu c}{\delta i}\,\frac{z\,dz}{az-b}$$

et que d'ailleurs

$$d\epsilon = \frac{cg\cos\varphi}{\mu\delta i}\,\frac{dz}{z(az-b)}$$

on aura

$$b\int\frac{\epsilon z\,dz}{(az-b)^2} = \int\frac{\epsilon z\frac{b}{z^2}dz}{\left(a-\frac{b}{z}\right)^2} = -\frac{\epsilon z}{\left(a-\frac{b}{z}\right)} + \int\frac{\epsilon\,dz + z\,d\epsilon}{a-\frac{b}{z}}.$$

Mais

$$\int \frac{\epsilon\, dz}{a - \frac{b}{z}} = \int \frac{\epsilon z\, dz}{az - b} = -\frac{\delta i}{\mu c}\int \epsilon\, dx = -\frac{\delta i}{\mu c}\, y;$$

Puis, en remplaçant $d\epsilon$ par sa valeur,

$$\int \frac{z\, d\epsilon}{a - \frac{b}{z}} = \frac{cg \cos\varphi}{b\mu\delta i}\int \frac{z\frac{b}{z^2}\, dz}{\left(a - \frac{b}{z}\right)^2} = -\frac{cg\cos\varphi}{b\mu\delta i}\left[\frac{z}{a - \frac{b}{z}} - \int \frac{zdz}{az - b}\right].$$

On a donc en résumé

$$b\int \frac{\epsilon z\, dz}{(az - b)^2} = -\frac{\epsilon z^2}{az - b} - \frac{\delta i}{\mu c}\, y - \frac{cg\cos\varphi}{b\mu\delta i}\left[\frac{z^2}{az - b} + \mathrm{D}(z)\right].$$

En sorte que si on introduit les limites et si on remarque que dans les conditions où nous nous trouvons, on peut prendre

$$\mathrm{F}(z) = az - b,$$

on aura en fin de compte

$$b\int \frac{\epsilon z\, dz}{(az - b)^2} = \frac{\eta z_0^2}{\mathrm{F}(z_0)} - \frac{\epsilon z^2}{\mathrm{F}(z)} - \frac{\delta i}{\mu c}\, y - \frac{cg\cos\varphi}{b\mu\delta i}\left[\frac{z^2}{\mathrm{F}(z)} - \frac{z_0^2}{\mathrm{F}(z_0)} + \mathrm{D}(z) - \mathrm{D}(z_0)\right],$$

de sorte qu'il viendra

$$(16)\quad x = \frac{\mu c}{\delta i}\left[1 - \frac{c^2 g^2 \cos^2\varphi}{\mu^2 b^2 \delta^2 i^2}\right][\mathrm{D}(z) - \mathrm{D}(z_0)] + \frac{c^2 g\cos\varphi}{b\delta^2 i^2}\left[\eta + \frac{cg\cos\varphi}{\mu b\delta i}\right]\frac{z_0^2}{\mathrm{F}(z_0)}$$
$$- \frac{c^2 g\cos\varphi}{b\delta^2 i^2}\left[\epsilon + \frac{cg\cos\varphi}{\mu b\delta i}\right]\frac{z^2}{\mathrm{F}(z)} - \frac{cg\cos\varphi}{\mu b\delta i}\, y.$$

On aura aussi

$$b\int \frac{\epsilon\, dz}{(az - b)^2} = \int \frac{\epsilon\frac{b}{z^2}\, dz}{\left(a - \frac{b}{z}\right)^2} = -\frac{\epsilon}{a - \frac{b}{z}} + \int \frac{d\epsilon}{a - \frac{b}{z}}.$$

Mais

$$\int \frac{d\epsilon}{a - \frac{b}{z}} = \frac{cg\cos\varphi}{\mu\delta i}\int\frac{dz}{(az-b)^2} = -\frac{cg\cos\varphi}{a\mu\delta i}\frac{1}{az-b}$$

$$= -\frac{cg\cos\varphi}{a\mu\delta i}\frac{1}{F(z)};$$

donc en introduisant les limites

$$\int \frac{\epsilon\, dz}{(az-b)^2} = -\frac{\epsilon z}{bF(z)} + \frac{\eta z_0}{bF(z_0)} - \frac{cg\cos\varphi}{b\mu a\delta i}\left[\frac{1}{F(z)} - \frac{1}{F(z_0)}\right]$$

et par suite

$$(17) \qquad t = \frac{c}{\delta i}\left[T(z) - T(z_0)\right] + \frac{c^2 g\cos\varphi}{b\mu\delta^2 i^2}\left[\frac{\eta z_0}{F(z_0)} - \frac{\epsilon z}{F(z)}\right]$$

$$+ \frac{c^3 g^2 \cos^2\varphi}{b\mu^2 a\delta^3 i^3}\left[\frac{1}{F(z_0)} - \frac{1}{F(z)}\right].$$

Mais l'expression (16) de x peut se transformer ; on a, en effet, dans les conditions où nous sommes placés,

$$D(z) - D(z_0) = \int_z^{z_0} \frac{z\, dz}{az-b} = \frac{z_0 - z}{a} + \frac{b}{a^2} L\frac{az_0 - b}{az - b}.$$

$$T(z) - T(z_0) = \int_z^{z_0}\frac{dz}{az-b} = \frac{1}{a} L\frac{az_0 - b}{az - b}.$$

D'où

$$D(z) - D(z_0) = \frac{z_0}{a} - \frac{z}{a} + \frac{b}{a}\left[T(z) - T(z_0)\right]$$

et par suite

$$\frac{z^2}{F(z)} + D(z) - \frac{z_0^2}{F(z_0)} - D(z_0)$$

$$= \frac{z^2}{az-b} - \frac{z}{a} - \frac{z_0^2}{az_0 - b} + \frac{z_0}{a} + \frac{b}{a}\left[T(z) - T(z_0)\right],$$

ce qui peut s'écrire

$$\frac{z^2}{F(z)} + D(z) - \frac{z_0^2}{F(z_0)} - D(z_0) = \frac{b^2}{a^2}\left(\frac{1}{az - b} - \frac{1}{az_0 - b}\right) + \frac{b}{a}[T(z) - T(z_0)]$$
$$= \frac{b^2}{a^2}\left[\frac{1}{F(z)} - \frac{1}{F(z_0)}\right] + \frac{b}{a}[T(z) - T(z_0)].$$

En tenant alors compte de cette relation, la valeur de x deviendra

$$(18) \qquad x = \frac{\mu c}{\delta i}[D(z) - D(z_0)] + \frac{c^2 g \cos\varphi}{b\delta^2 i^2}\left[\frac{\eta z_0^2}{F(z_0)} - \frac{\varepsilon z^2}{F(z)}\right]$$
$$- \frac{c^3 g^2 \cos^2\varphi}{\mu a b \delta^3 i^3}\left(\left[\frac{1}{F(z)} - \frac{1}{F(z_0)}\right]\frac{b}{a} + T(z) - T(z_0)\right) - \frac{\varepsilon g \cos\varphi}{\mu b \delta i}\, y.$$

Reste à voir dans quelles limites est comprise la valeur de μ. Nous avons

$$\mu = 1 - \frac{cg}{b\delta i}\sin\varphi.$$

On peut, comme première approximation, prendre $\delta = i = 1$; d'ailleurs nous avons dit qu'on a une valeur approchée de c, pour les projectiles généralement employés, en prenant $c = 27\, r$ on a donc, dans ce cas,

$$\mu = 1 - \frac{27}{93{,}2}\, gr \sin\varphi = 1 - 2{,}842\, r \sin\varphi.$$

Si on suppose $r = 0^m{,}2$, $\varphi = 60°$ on trouve

$$\mu = 1 - 0{,}4922 = 0{,}5078.$$

On voit donc que l'on peut regarder μ comme étant toujours supérieur à 1/2 et par suite, avec les tables de Siacci, on pourra traiter les problèmes pour v compris entre 300 m. et 750 m. puisque les tables vont jusqu'à 1500 m., ce qui sera suffisant dans la pratique, d'autant plus que μ ne pourra être voisin de 1/2 que pour les très gros projectiles, pour lesquels la vitesse initiale est toujours plus faible.

Applications

Supposons un projectile pour lequel

$$p = 172^{k},36, \qquad 2r = 0^{m},2237 \text{ (*)}$$

on en déduit

$$\log k = 5,03913, \qquad k = 109428.$$

Nous supposerons $\theta_0 = 62°$, $v_0 = 723^{m},9$ et $\eta = 2°$, donc $\varphi = 60°$; on en déduit

$$\log c = 0,50284.$$

Puis, en prenant, $\delta = i = 1$

$$\mu = 1 - \frac{cg}{b} \sin \varphi = 0,7099.$$

On en conclut $z_0 = 1019,7$; puis, pour $v = 400$, $z = \frac{v}{\mu} = 563,5$. On obtient alors, par les tables de Siacci,

$$J(z) = 0,18903, \qquad J(z_0) = 0,12157$$

$$J(z) - J(z_0) = 0,06746.$$

Puis, par la formule (14), $\eta - \epsilon = 0,07562$, d'où $\epsilon = -0,04071 = -(2°20')$ la valeur correspondante de θ est donc $\theta = 57°40'$.

On a alors, au moyen des tables de Siacci, pour $z_0 = 1019,7$ et $z = 563,5$

$$D(z) = 4584,2 \qquad D(z_0) = 2670$$

$$A(z) = 567,359 \qquad A(z_0) = 282,699,$$

et, en tenant compte des valeurs déjà obtenues, la formule (15') nous donnera $y = 19,5$.

La formule (18) donne ensuite $x = 4326,6$ et la formule (17) $t = 7^{s},97$.

(*) C'est le projectile du tir du jubilé de la reine d'Angleterre.

Nous remarquerons d'ailleurs que si l'on se bornait pour x à la valeur

(18') $$x = \frac{\mu c}{\delta i}[D(z) - D(z_0)]$$

et pour t à la valeur

(17') $$t = \frac{c}{\delta i}[T(z) - T(z_0)]$$

on trouverait

$$x = 4326, \qquad t = 8^s{,}04.$$

Or, l'exemple a été choisi dans les conditions où les termes de corrections sont les plus considérables, et l'on voit par là que *si* φ *a été choisi de façon que* ϵ *varie sensiblement de* η *à* $-\eta$ on pourra souvent se borner aux valeurs

(14) $$\epsilon = \eta - \frac{c \cos \varphi}{2\mu\delta i}[J(z) - J(z_0)]$$

(18') $$x = \frac{\mu c}{\delta i}[D(z) - D(z_0)]$$

(15) $$y = \eta x - \frac{cx \cos \varphi}{2\mu\delta i}\left[\frac{A(z) - A(z_0)}{D(z) - D(z_0)} - J(z_0)\right]$$

ou

(15') $$y = \frac{\mu c}{\delta i}\left[\eta + \frac{c \cos \varphi}{2\mu\delta i} J(z_0)\right][D(z) - D(z_0)] - \frac{c^2 \cos \varphi}{2\delta^2 i^2}[A(z) - A(z_0)]$$

(17') $$t = \frac{c}{\delta i}[T(z) - T(z_0)]$$

ou de plus, ainsi que nous l'avons vu,

(4) $$\mu = 1 - \frac{cg}{b\delta i}\sin \varphi$$

$$c = \frac{kr}{4000} \qquad k = \frac{p}{r^3}.$$

Dans l'emploi de ces formules, on pourra prendre d'abord $\varphi = \theta_0 - 2^o$ et par suite $\eta = 2^o$ et calculer la valeur finale de ϵ. Si cette valeur de ϵ ne dépasse pas 5^0 environ en valeur absolue, on pourra conserver la valeur adoptée pour φ. Si au lieu de cela la valeur finale de ϵ dépassait 6° en valeur absolue, on prendrait $\varphi = \theta_0 - 5^o$ et par suite $\eta = 5^o$ et on vérifierait que dans ces nouvelles conditions la valeur finale de ϵ ne dépasse pas *en valeur absolue* 6^0. Si elle les dépassait, il faudrait partager l'arc, mais ce cas ne se présentera guère. En agissant ainsi ϵ reste inférieur à 1/10 en valeur absolue et on peut par suite négliger son carré. Ayant alors calculé ϵ, x, y, t par les formules précédentes, on s'assurera, au besoin, que les termes de corrections donnés par les formules complètes sont effectivement négligeables.

La méthode que nous venons d'indiquer s'appliquera pour un premier arc de la trajectoire, s'étendant depuis la vitesse initiale, s'il s'agit de très gros projectiles, jusqu'à une vitesse de 400 m. environ, jusqu'à une vitesse de 320 m. environ, s'il s'agit de projectiles moyens, et enfin jusqu'à 290 m. ou 300 m. dans le cas de petits projectiles. Sur ces arcs, en effet, ϵ restera assez petit pour que l'on puisse en négliger le carré, sans être obligé de partager cet arc.

Au-dessous des vitesses que nous venons d'indiquer, on pourra calculer le restant de la trajectoire, sans être obligé de la partager, en adoptant l'hypothèse de la résistance proportionnelle à la quatrième, à la troisième ou à la deuxième puissance de la vitesse, ce sont des questions que nous avons déjà traitées, mais sur lesquelles nous nous proposons de revenir.

DU TRAITEMENT DE L'ASYSTOLIE

PAR

le Docteur Ach. DUMONT

Dès que l'homme a atteint l'âge de soixante ans, on peut dire que parmi les maux qui l'assaillent les maladies du cœur se signalent parmi les plus fréquents. Or à moins d'accidents subits, ou de complications intercurrentes, elles doivent fatalement aboutir à l'asystolie, leur fin naturelle. L'asystolie est l'état de déchéance d'un cœur surmené et devenu incapable de pourvoir à une circulation normale du sang. Le malade en proie à l'asystolie commençante se sent pris de fatigue même longtemps avant que l'œdème des extrémités inférieures ne lui en révèle la cause. Il lui devient difficile de fournir une marche prolongée ou quelque peu accélérée. La montée d'un escalier, l'ascension d'une rue à pente raide lui sont particulièrement pénibles; le moindre effort l'essouffle et, en même temps, il éprouve à la région précordiale de forts battements et une sensation de gêne ou de douleur qui se répercute jusque dans le dos au point de faire croire parfois à un mal qui a son origine en ce point.

Le pouls devient irrégulier, inégal dans sa force et sa fréquence et l'œdème ne tarde pas à apparaître aux membres inférieurs et à y faire des progrès variables. Mais la respiration, qui jusque-là n'était guère pénible qu'à l'occasion du mouvement, devient difficile même à l'état de repos. Bientôt elle devient courte et plus ou moins impossible même dans la station horizontate ou inclinée sur le dos. Aussi le malade inquiet, agité, ne pouvant trouver

de repos au lit, se voit-il forcé de passer ses nuits sur une chaise longue ou dans un fauteuil, en se rendant souvent de l'un à l'autre. C'est là une particularité presque caractéristique de la période vraiment asystolique des affections cardiaques. Un malade atteint de pneumonie, même de pneumonie double, de pleurésie avec épanchement abondant, peut passer ses nuits dans la position horizontale pourvu que son cœur fonctionne normalement. Pourquoi donc n'en peut-il faire autant s'il a le cœur malade? La raison en est que malgré le trouble de l'hématose, le sang grâce à l'énergie du cœur circule encore dans le premier cas régulièrement dans tout l'organisme. Aucun œdème, aucune compression suffisante ne s'opposent à son passage. Le cœur est à même de vaincre tous les obstacles. Il parle en maître. Dans le second cas, au contraire, ce cœur devenu malade, non seulement ne suffit plus à sa tâche normale, mais il doit vaincre encore les résistances que lui oppose l'infiltration qui s'empare de tout l'organisme. Il est donc obligé de solliciter du secours. La respiration aussi large que possible, lui vient en aide, non seulement en facilitant les échanges respiratoires nécessaires à l'hématose, mais en favorisant la circulation dans tout l'organe pulmonaire. Or, pour atteindre ce but, l'attitude horizontale est impossible à tenir. L'attitude verticale seule peut y conduire, parce que c'est elle qui permet la plus grande ampliation de la cage thoracique. Nous savons que les crises d'asthme, les sténoses laryngées et en général les obstructions brusquement établies au passage de l'air obligent de prendre pareille attitude. Mais à ne considérer que la pneumonie, la pleurésie, et les maladies du cœur, je crois que l'on peut dire qu'elle caractérise la période asystolique des affections cardiaques. Il vous est arrivé sans doute de voir de pauvres malades, parvenus à ce point, condamnés à garder le fauteuil, et même presque courbés en deux, entraînés qu'ils étaient par le poids de la tête. Toute autre attitude leur est impossible et sans faire d'examen on peut affirmer presque à coup sûr qu'ils sont au terme d'une maladie de cœur.

L'insomnie est compagne inséparable de l'asystolie. C'est une insomnie qu'on peut vaincre une ou deux fois par un hypnotique actif, mais c'est toujours au détriment du malade; car le réveil lui est des plus pénibles. J'estime d'ailleurs que le médicament peut

avoir un retentissement fâcheux sur l'état du cœur, et que c'est en venant en aide à ce dernier qu'on rendra au malade un sommeil utile.

Les fonctions de l'estomac sont amoindries. L'appétit fait même défaut et souvent la digestion pénible augmente le trouble cardiaque.

Il est plus difficile d'apprécier les fonctions intestinales; car on les doit fréquemment stimuler dans un but thérapeutique.

La sécrétion urinaire est presque toujours diminuée en forte proportion, résultat en concordance avec la diminution de la pression sanguine. Si je mentionne en outre l'altération des fonctions hépatiques et glandulaires, en général, on comprendra le trouble profond dans lequel l'organisme se trouve plongé.

Mais bientôt l'œdème progresse; il envahit tout le membre inférieur, gagne la paroi abdominale au point d'empêcher l'examen de la cavité qu'elle recouvre. Des exsudats plus ou moins abondants se répandent dans les cavités séreuses et dans l'épaisseur des organes et le malade succombe au trouble progressif de toutes ses fonctions.

Que faire pour remédier à une pareille situation? Il semble de prime abord qu'on doit trouver dans la digitale une arme précieuse contre l'action défaillante du cœur. Je crois que le plus souvent cette conception sera illusoire. Je ne puis m'empêcher de comparer le cœur asystolique à un vieux cheval fatigué que le fouet, la digitale en l'occurrence, laissera bientôt indifférent ou du moins incapable de réagir s'il n'a pas pour effet de précipiter l'épuisement final.

Ce que je dis de la digitale, je puis le dire de toutes ses préparations et de presque toutes les substances capables de stimuler un cœur moins altéré. J'irai même jusqu'à dire que si en la circonstance ils ne produisent pas plus souvent de mauvais effets, c'est parce que la plupart du temps l'absorption en est insuffisante ou parce qu'ils sont perdus dans le liquide de l'œdème. Les modifications profondes survenues dans la circulation et les sécrétions du tube digestif jointes à l'état d'imbibition séreuse de l'organisme justifient cette assertion. Voilà pourquoi les hypnotiques sont si souvent inefficaces et pourquoi le lait lui-même cesse de produire ses bons effets ordinaires.

En présence de cette faillite presque générale de la thérapeutique, il n'y a qu'une indication à remplir : il faut à tout prix diminuer l'obstacle à la circulation ; il faut donner issue au liquide qui noie l'organisme et dont l'insuffisance du cœur accroît chaque jour le flot montant. Alors, et plus souvent qu'on ne le croit, on sera étonné de voir le cœur qui semblait irrémédiablement perdu, capable de promouvoir une masse désormais proportionnée à ses forces. Or comment parvenir à ce résultat ? Je viens de dire que toutes les substances médicamenteuses et même alimentaires dont l'action exige avant tout l'absorption sont inopérantes parce que précisément cette absorption est ici gravement compromise. J'ajoute que ne le fût-elle pas, ces substances deviendraient pour le cœur un nouvel obstacle ou un nouveau danger.

Je fais donc table rase en ce moment de tous les médicaments cardiaques proprement dits et presque de toutes les substances primitivement diurétiques. Je tiens au contraire en quelque estime, celles qui après avoir déterminé de fortes évacuations intestinales deviennent secondairement d'excellents diurétiques. En certaines circonstances, les purgatifs drastiques, y compris le calomel agissent dans ce sens. L'élimination abondante de liquides qu'ils entraînent diminue l'obstacle à la circulation dans tout le réseau capillaire. Le cœur cesse d'être insuffisant et les reins soumis à une nouvelle pression fournissent une abondante sécrétion urinaire qui peut devenir réellement salutaire. J'ai vu des malades dont la situation s'est notablement améliorée pour quelque temps après l'emploi des drastiques.

Mais cet effet favorable est loin d'être constant. De plus, il ne se maintient guère, et enfin je crois que le recours aux drastiques n'est pas toujours sans inconvénient. Je lui préfère de beaucoup le second moyen d'intervention dont je vais parler. Il s'agit des incisions que l'on pratique à la partie inférieure de la jambe. Il importe que la région soit lavée et savonnée avec soin, que la lancette soit flambée, en un mot que l'on opère dans les conditions d'une propreté rigoureuse. Jusqu'ici je n'ai pas eu recours aux antiseptiques proprement dits et je n'ai jamais observé d'accidents imputables à cette technique. Trois ou quatre incisions d'un centimètre de profondeur et de la largeur de la lancette suffisent à chaque jambe. Ils convient de les espacer de quelques centimètres

sur la ligne verticale. Une sérosité sanguinolente d'abord, bientôt pure ensuite, s'écoule aussitôt en gouttes rapprochées. Et à en juger par la quantité de linges qui en sont imbibés à la fin d'un jour, je ne crains pas d'évaluer à plusieurs litres le liquide qui s'échappe quotidiennement des incisions pendant plusieurs jours. Il diminue ensuite graduellement. Une ou plusieurs ouvertures se ferment, mais en général, quand l'œdème était très marqué, l'écoulement se prolonge pendant dix ou douze jours.

Certes, si l'on veut réfléchir à la quantité de liquide que l'on recueillerait au bout de ce laps de temps, de cinq ou six robinets qu'on laisserait couler goutte à goutte dans les mêmes conditions de rapidité, on admettra sans peine l'évaluation que je viens de faire. Pendant les premiers jours une partie des boissons suit encore la voie des infiltrations, remplaçant incomplètement sans doute le liquide écoulé. Mais le cœur reprend peu à peu son énergie ; les sécrétions se rétablissent ; l'urine redevient abondante sans que l'on ait recours à la digitale ou aux diurétiques ; l'appétit renaît : le calme reparaît, le sommeil profond et le repos au lit deviennent possibles, eux aussi, sans aucun médicament ; enfin une nouvelle vie commence pour le pauvre cardiaque qui sourit bientôt à l'illusion de la guérison. Il y a une quinzaine d'années, j'ai soigné une dame atteinte de goître exophtalmique et parvenue à un état d'asystolie extrême. Les incisions ont semblé la ressusciter. Elle vit encore aujourd'hui.

Je puis citer encore le cas d'une personne âgée aujourd'hui de 73 ans, chez qui j'ai obtenu il y a deux ans et demi, un résultat semblable et dans des conditions qui m'avaient fait désespérer de la sauver. Elle reprit alors sa vie ordinaire, se promena beaucoup et ne fit pas mauvaise figure au vin et à la bonne chère. Elle eut après un an et demi une seconde atteinte de son mal aussi grave que la première. Je l'en tirai par le même moyen et aujourd'hui, devenue plus sage, elle se promène au dehors, vaque à ses occupations ordinaires et paraît jouir d'une bonne santé.

Je puis citer aussi le cas d'un homme atteint d'insuffisance aortique qui, après avoir bénéficié du traitement par les incisions au point de faire de petites promenades au dehors, est mort subitement comme on l'observe assez souvent dans ce genre de maladie du cœur. Deux autres cardiaques dont l'une est morte à

l'étranger et l'autre est en observation encore aujourd'hui, ont éprouvé une amélioration sensible par le même traitement.

Je n'ai fait mention que des incisions, car je n'approuve pas le traitement de l'œdème par les simples mouchetures que l'on pratique plus nombreuses et plus rapprochées que les incisions. Je vois dans ce traitement des inconvénients et aussi une impuissance qui doivent le faire rejeter.

Après avoir pratiqué les incisions, j'ai l'habitude d'enduire la peau des jambes d'une pommade boriquée pour éviter l'érythème que le contact d'un liquide organique ne manquerait pas de produire au bout de peu de temps. On fait le pansement trois fois par jour, à l'eau bouillie ; on renouvelle la pommade et on entoure les jambes d'ouate aseptique, et de flanelle recouverte de tissu imperméable.

Tel est le traitement simple et exempt de dangers que l'on peut opposer à l'asystolie. Il est aussi simple qu'il est vieux et si je me suis permis de le signaler aujourd'hui à l'attention, c'est parce que certaines pratiques, peut-être à cause de leur âge, sont facilement délaissées au profit de moins anciennes qui ne les valent pas : c'est parce que à diverses reprises, je me suis trouvé pharmaceutiquement désarmé, alors qu'une ressource très efficace pouvait depuis longtemps venir en aide à mes malades. C'est ce qui m'amène à dire un mot du moment opportun de recourir à la lancette. S'il convient de ne pas attendre que le malade soit arrivé à une situation extrême j'estime pourtant qu'il ne faut pas intervenir si les jambes ne sont pas suffisamment œdématisées. Tant que l'œdème est peu prononcé, il reste l'espoir de voir le cœur obéir à une médication sagement ordonnée; et puis je crois que les incisions se cicatriseront, vu la plus grande vitalité des tissus, avant que l'œdème ait disparu; enfin je crois qu'en les pratiquant on ferait donner plus de sang, ce qui impressionne toujours l'entourage.

J'avais terminé ce modeste travail, quand parut dans la Revue médicale de Louvain un article relatif au sujet que je viens de traiter. Seulement l'auteur, M. Schwartz, préconise dans son travail résumé par M. le professeur Dandois, outre les incisions l'emploi de petits tubes d'or, inoxydables et celui de tubes de Furbringer. Pour autant qu'il m'est permis d'en juger par le résumé dont je

parle, je crois que les opinions émises dans mon travail ne sont pas désavouées par M. Schwartz. Mais je n'ai pas eu recours aux tubes qu'il recommande et ne puis donc en apprécier les avantages qu'il leur reconnaît. Il considère les incisions comme nécessitant une surveillance attentive et des pansements fréquents. Je ne m'explique pas bien pourquoi l'emploi des tubes dispenserait de ces mêmes précautions. Ce que je puis dire c'est que les incisions qui réduisent au minimum l'appareil opératoire ne m'ont donné aucun fâcheux résultat.

L'ÉCLAIRAGE, LE CHAUFFAGE ET LA FORCE MOTRICE

PAR L'ALCOOL DÉNATURÉ

PAR

Edm. LEPLAE
Professeur à l'Université catholique de Louvain

Le 19 mars dernier, M. L. Denayrouze, ingénieur, ancien député, membre du Conseil de la Société nationale d'encouragement à l'agriculture de France, donnait en la salle de l'hôtel Ravenstein, en présence de S. A. R. le prince Albert de Belgique, du Ministre de l'agriculture M. le baron van der Bruggen, et d'un auditoire d'élite, une conférence-démonstration sur l'utilisation de l'alcool liquide et solidifié à l'éclairage et au chauffage.

Peu de conférences scientifiques se sont données devant une salle plus remarquable par le rang, la science et le nombre des auditeurs. Nous y trouvons une preuve indiscutable de l'attention généralement accordée par le monde intellectuel au problème de l'utilisation industrielle de l'alcool.

Les pages qui suivent n'ont d'autre but que d'exposer brièvement et simplement l'état actuel de la question.

L'alcool se produit au moyen de matières premières végétales fournies par l'agriculture, et principalement au moyen du sucre et de la fécule.

D'après les conditions spéciales de son climat et de son agriculture, chaque pays consacre à la distillerie une ou plusieurs plantes différentes : l'Allemagne produit les 9/10 de son alcool au moyen de la pomme de terre; la Belgique ne travaille guère plus que le maïs, la France distille le marc de raisin et la betterave;

l'Angleterre utilise le seigle et d'autres céréales; les pays tropicaux fermentent le jus de la canne ou du sorgho sucré, de l'ananas, de l'agave, etc.

L'industrie de la distillerie est, de nos jours, une des plus perfectionnées : elle a transformé ses méthodes d'après les dernières données de la science; elle dispose d'appareils admirables de puissance et d'ingéniosité; elle a ses revues spéciales, ses écoles techniques douées d'outillages scientifiques idéalement complets et d'un état-major de savants renommés. Tant par les locaux et machines qu'elle occupe, que par les matières premières qu'elle met en œuvre, elle est digne d'occuper une place d'honneur parmi toutes les industries.

Malheureusement, la presque totalité de l'alcool produit passe à la consommation humaine. S'il fait vivre par sa production nombre de familles ouvrières, l'alcool en ruine un plus grand nombre encore.

La consommation de l'alcool-boisson atteint une importance terrifiante : la France consomme 8,64 litres d'eau-de-vie à 50° par tête d'habitant; l'Allemagne, 8,8 litres; la Hollande, la Russie et, hélas, la Belgique, 9,4 litres.

Nulle œuvre ne saurait être plus belle que le détournement de ce fleuve d'eau de feu vers des usages moins funestes et surtout vers des usages directement utiles.

Faire servir l'alcool au chauffage, à l'éclairage, à la production de force motrice, donner un grand essor à de nouvelles industries tout en développant, pour le plus grand bien de l'agriculture, la distillerie nationale, tel est le rêve caressé par des chercheurs infatigables.

Il nous paraît opportun de traiter ici les résultats de leurs efforts, en raison de leur importance agricole et industrielle et partant économique.

La solution générale du problème de l'utilisation industrielle de l'alcool comporte la solution de deux sous-problèmes bien distincts, 1° *le perfectionnement et la multiplication des moyens et des appareils d'utilisation de l'alcool* et 2° *l'abaissement du prix de vente de l'alcool, c'est-à-dire du prix d'achat par le consommateur.*

Nous traiterons séparément ces deux questions.

Les modes d'utilisation de l'alcool

Indépendamment de son usage comme boisson alcoolique, l'alcool est appliqué dans un grand nombre d'industries spéciales; de plus, on essaie dans tous les pays de lui faire produire *économiquement* de la lumière, de la chaleur et de la force motrice.

Emplois spéciaux industriels

Les industries qui emploient l'alcool sont beaucoup plus nombreuses qu'on ne se le figure généralement. Ces industries ont acquis en Allemagne un très grand développement, grâce à la protection très accentuée et très intelligente accordée par le gouvernement et le fisc allemand : au moyen d'artifices fiscaux et notamment de ristournes, l'alcool industriel est meilleur marché en Allemagne que dans n'importe quel autre pays. Aussi, les industriels des pays voisins et principalement les Français et les Belges réclament-ils de leurs gouvernements des mesures analogues, permettant de disputer à l'Allemagne les monopoles que ses lois fiscales et son travail scientifique semblent vouloir lui assurer.

On peut répartir en trois catégories les principales industries qui ont recours à l'alcool.

1re Catégorie

Industries qui transforment l'alcool en un autre produit industriel

a) Fabrication des éthers éthyliques, depuis l'éther ordinaire jusqu'aux acétates, butyrates, etc. d'éthyle;
b) Fabrication du vinaigre;
c) Fabrication du chloroforme, de l'iodoforme, du bromoforme, du chloral;
d) Fabrication du fulminate de mercure et autres produits pyrotechniques.

2e Catégorie

Industries employant l'alcool dans une phase de leur fabrication, pour le régénérer ensuite

a) Fabrication des couleurs d'aniline et autres matières colorantes ou pharmaceutiques dérivées des goudrons. L'alcool sert ici principalement de dissolvant;
b) L'extraction d'alcaloïdes naturels ou artificiels : morphine, codéine, strychnine, quinine, aconitine, atropine, cocaïne, etc. On extrait aussi par l'alcool ou ses dérivés, l'éther ou le chloroforme, la théobromine, la caféine, la scammonée, le gayac, etc.;
c) La fabrication de l'acide salicylique, de ses homologues et de ses dérivés;
d) L'extraction des tanins, par l'alcool ou l'éther;
e) La préparation des produits chimiques purs;
f) La fabrication des poudres sans fumée, qui ne sont qu'un collodion séché dont on a évaporé le dissolvant alcool et éther;
g) L'extraction par divers procédés à l'alcool du sucre des mélasses (élution Manoury);
h) Le lavage et l'épuration des huiles.

3e Catégorie

Industries employant l'alcool comme véhicule permanent

a) Fabrication des vernis à l'alcool;
b) Fabrication des collodions photographiques et pharmaceutiques;
c) Fabrication des extraits de quinquina, alcools camphrés, ouates antiseptiques et autres produits pharmaceutiques;
d) Fabrication des eaux de toilette, extraits de parfumerie, vinaigres de toilette, savons transparents, etc.;
e) Fabrication de feutres à chapeaux;
f) Fabrication des tissus dits pégamoïdes, et autres simili-cuirs;
g) Fabrication des feux d'artifice de couleur : dissolution de strontiane, de cuivre, de potasse, etc.;

h) Fabrication de fleurs artificielles;
i) Fabrication de la dorure pour cadres;
j) Conservation des pièces anatomiques animales et végétales, des collections, etc.;

Cette liste s'accroît tous les jours par la multiplication des industries. L'Allemagne, nous l'avons dit, marche en tête de toutes les autres nations quant à la quantité d'alcool ainsi consommée. La France ne la suit que de très loin grâce aux charges plus grandes imposées pour la dénaturation et l'exemption des droits.

En Belgique, où nous n'avons pas obtenu jusqu'ici de dénaturant général, le progrès est naturellement des plus faibles : pour propager les usages industriels, faciliter les recherches et les expériences, bien plus, pour les provoquer, il faut mettre sur le marché de l'alcool dénaturé propre à tous les usages dont l'alcool est susceptible. Cet alcool-là, dénaturé par un dénaturant général, peut être débité dans les boutiques à qui veut l'acheter, on l'applique à tous usages domestiques ou industriels; il ouvre la route à beaucoup d'applications en mettant un alcool bon marché à la disposition de tous.

L'augmentation de la consommation de l'alcool dénaturé en Allemagne de 1890 à 1899 a été colossale; on y voit clairement l'importance prépondérante de l'alcool dénaturé au dénaturant général. Nous ne saurions assez insister pour que le Ministère des Finances mette aux mains de nos industriels belges les mêmes armes industrielles qui ont si bien profité à nos voisins.

Nous examinerons avec quelque détail les trois grandes questions de l'éclairage, du chauffage et de la force par l'alcool *au point de vue du prix de revient;* nous ferons usage à cet effet, des résultats obtenus dans les expériences les plus récentes et les plus dignes de foi.

Avant d'aborder ces détails techniques, nous avons à jeter un coup d'œil sur l'opération importante, qui peut seule permettre de placer de l'alcool à bas prix à la disposition de l'industrie, sans méconnaitre les Finances de l'État et les intérêts hygiéniques et moraux du peuple : c'est la dénaturation.

Dénaturation et dénaturants

L'alcool étant une consommation de luxe, et surtout un produit antihygiénique, les États l'imposent d'un droit très élevé. Il est en Belgique de 100 fr. par hectolitre d'alcool à 50°. Cet impôt constitue une des sources les plus importantes des revenus de l'État, et tend à restreindre l'emploi de l'alcool : ce dernier but n'est pas atteint en pratique.

L'alcool se vend donc partout à un prix très élevé, d'après sa concentration.

A ces prix cet alcool est *inutilisable* en industrie, et surtout comme combustible : il faut que l'alcool soit déchargé de la grande partie ou même de la totalité de l'impôt avant qu'il puisse être économiquement employé. Nous verrons que la décharge totale de l'impôt n'est elle-même pas encore suffisante pour certains usages.

Exempter de l'impôt des quantités importantes d'alcool, sur affirmation qu'elles sont destinées à des usages industriels, c'est, pour l'État, provoquer la fraude : en remettant clandestinement dans le commerce et en vendant à 1 fr. 25 par exemple, comme genièvre ou eau-de-vie, l'alcool qu'il a produit ou acheté sans payer de droits, à 20 ou 25 centimes, un débitant ferait un bénéfice net d'un franc environ *par litre,* et réaliserait en quelques mois, aux dépens du Trésor public, une fortune considérable.

Il a donc fallu que le fisc procédât à la *dénaturation* de tous les alcools qu'il voulait exempter du droit : cette dénaturation les rend impropres à la consommation humaine, en leur mélangeant des substances de très mauvais goût, nommées *dénaturants.*

Quels sont les dénaturants actuellement employés ? Il y a lieu de distinguer entre un *dénaturant général* et un *dénaturant spécial.*

Le *dénaturant général* s'emploie pour l'alcool destiné aux usages domestiques du chauffage et de l'éclairage, à la force motrice, ou en général à des usages non déterminés au moment de la dénaturation.

Les *dénaturants spéciaux* servent à la dénaturation de l'alcool destiné à des usages déterminés. Ainsi en Belgique les fabricants de vernis ont obtenu la dénaturation au moyen de métylène d'un

vernis fort contenant des gommes ou résines; les fabricants de vinaigre peuvent dénaturer au moyen d'eau et de vinaigre, etc. : le fisc s'efforce de prescrire pour chaque industrie une dénaturation telle que les frais soient les plus bas possible, et que la régénération soit *économiquement* impossible.

La dénaturation spéciale n'offre aucune difficulté, mais le choix d'un dénaturant général est très compliqué. On peut affirmer que l'on n'a pas trouvé jusqu'ici de dénaturant général parfait, mais seulement des dénaturants assez convenables pour qu'on puisse s'en contenter en pratique.

L'étendue des difficultés rencontrées par les chimistes des accises se comprendra facilement à la lecture des conditions énumérées ci-dessous, et que l'on réclame d'un dénaturant *parfait :* il doit satisfaire à la fois l'antialcoolisme, le fisc et l'industrie.

CONDITIONS AUXQUELLES DOIT SATISFAIRE UN DÉNATURANT GÉNÉRAL PARFAIT

I. Pour satisfaire à la fois aux exigences de l'antialcoolisme et du trésor public il doit avoir un goût tel que son mélange avec l'alcool rende celui-ci impropre à la consommation courante.

II. Il doit satisfaire aux exigences du fisc, et pour cela :

1° Il ne doit pas pouvoir être économiquement séparé de l'alcool : s'il peut être éliminé en tout ou en partie, ce doit être avec des frais tels que l'alcool revivifié revienne plus cher que l'alcool non exempt de droit. Cette difficulté d'élimination n'existe qu'aux conditions suivantes :

a) Le dénaturant doit posséder un point d'ébullition qui se rapproche assez de celui de l'alcool pour qu'il ne puisse être séparé par distillation.

b) Il doit être soluble dans l'alcool dilué à tous les degrés ainsi que dans l'eau, de manière à ne pouvoir être éliminé par filtration.

c) Il ne peut former avec des agents chimiques des combinaisons qui pourraient être séparées par rectification ou par précipitation et filtration.

2° Le dénaturant doit pouvoir être identifié rapidement et avec

certitude. S'il est possible de l'éliminer partiellement, il doit en rester des traces suffisantes pour qu'un réactif simple puisse déceler facilement la présence de ce dénaturant.

3° Le dénaturant ne peut pas prendre naissance au cours d'une fermentation alcoolique, afin qu'il ne puisse y avoir contestation scientifique au cas d'une action judiciaire.

III. Il doit satisfaire aux exigences de l'industrie :

1° Il doit être d'un prix tel que le prix de l'alcool ne soit pas sensiblement augmenté par la dénaturation;

2° Il ne peut être ni toxique ni nocif;

3° Il ne doit pas dégager de trop mauvaise odeur :

4° Il ne doit pas gêner le chauffage ou l'éclairage à l'incandescence ;

5° Il ne doit pas devoir être ajouté en trop grande quantité, afin de ne pas diminuer le pouvoir éclairant ou calorifique de l'alcool ;

6° Il ne peut diminuer le pouvoir dissolvant de l'alcool.

En un mot il doit laisser à l'alcool toutes ses qualités industrielles.

Ce programme, on le voit, est fort chargé. Aussi les corps chimiques susceptibles de servir de dénaturant sont-ils fort peu nombreux.

Nous citerons les principaux :

Dénaturant allemand. Le dénaturant général allemand se compose de 4 parties de méthylène (70 °/₀ d'alcool méthylique, 30 °/₀ d'acétone) et 1 partie de bases pyridiques.

Ce dénaturant coûte 2 M. 50 (3 fr. 12) par 100 litres d'alcool pur.

Les inconvénients sont sa mauvaise odeur, sa composition irrégulière, et l'élévation du prix des bases pyridiques, qui ne s'extraient qu'en faibles quantités. C'est toutefois jusqu'ici le meilleur des dénaturants.

On a proposé en Allemagne la dénaturation au benzol : le litre d'alcool dénaturé à 5 °/₀ de benzol est moins cher que l'alcool pur ; la dénaturation est donc gratuite, de plus le benzol améliore les propriétés de l'alcool au point de vue de presque tous les usages industriels.

Dénaturant français. Ce dénaturant général est le méthylène, qui communique une saveur réellement atroce. Le prix et divers

autres inconvénients de la formule française la feront bientôt remplacer par un procédé de dénaturation plus perfectionné.

Ajoutons que le fisc français avait frappé l'hectolitre d'alcool dénaturé d'un droit fixe élevé pour frais d'analyses; que de plus il ajoutait à l'alcool dénaturé une certaine dose de vert malachite, très incommode pour divers usages, notamment pour l'éclairage par incandescence.

A la suite du concours d'automobiles à alcool Paris-Rouen le 28 octobre 1900, l'administration française et les chambres reconnurent la nécessité d'abaisser le droit de dénaturation et de supprimer le vert malachite.

Dénaturant suisse. Le dénaturant proposé en Suisse par Lang est l'*éthylméthylacétone;* sans odeur, entrant en ébullition à 74°, soluble en toute proportion dans l'alcool et dans l'eau, facilement identifiée, douée d'un très mauvais goût, l'acétone méthyléthylique semble être le dénaturant idéal, ou tout au moins, d'après les conclusions de mon savant collègue M. Bruylants, présente sur les autres dénaturants de très grands avantages : elle est malheureusement encore d'un prix trop élevé pour pouvoir concourir avec le dénaturant au méthylène.

Belgique. Nous n'avons pas de dénaturant général en Belgique, aussi l'usage de l'alcool en industrie est-il encore très peu développé.

C'est en Allemagne que la question de l'alcool industriel, et plus spécialement de l'alcool de chauffage, éclairage et force motrice a fait le plus de chemin. Si nous supprimions les travaux allemands il ne resterait rien ou presque rien, sauf les lampes Denayrouze.

Si les Allemands attachent tant d'importance à cette question c'est qu'ils y trouvent un intérêt considérable.

1° *Au point de vue agricole.* Les 9/10 de l'alcool allemand (2 700 000 sur 3 000 000) sont produits par les distilleries agricoles. Ces distilleries consomment rien qu'en pommes de terre plus de 2 000 000 de tonnes, soit le produit de 100 000 hectares de terre (à 20 000 kgr. par hectare).

Favoriser la consommation de l'alcool industriel c'est donc favoriser l'agriculture allemande, comprenant 30 % de la population; c'est créer des industries nouvelles et rémunératrices, et affranchir

le pays d'une servitude à l'égard de l'étranger, l'alcool pouvant remplacer le pétrole.

2° *Au point de vue militaire.* L'utilisation de l'alcool dénaturé pour l'éclairage, le chauffage, la force motrice, peut avoir une importance considérable en cas de guerre et de blocus des ports allemands.

Pour ces deux motifs réunis, l'Empereur et le gouvernement allemand accordent la plus grande attention à tout ce qui se rapporte à l'alcool dénaturé. Au lieu d'imiter les pouvoirs publics de certains autres pays d'Europe, qui opposent de la résistance ou tout au moins de l'inertie lorsqu'il est question de dénaturation d'alcool, le gouvernement allemand étudie sans tarder toutes les mesures qui lui sont signalées comme pouvant contribuer à l'emploi de l'alcool dénaturé.

Voici les mesures prises successivement en Allemagne :

1° Le régime fiscal 1895 des distilleries prévoyait pour l'alcool dénaturé les ristournes suivantes :

a) Ristourne des droits frappant la cuve-matière.	16 M. 01	= 20 fr.
b) Ristourne des droits de distillation.	2 M. 50	
Total. . .	18 M. 51	= 23 fr. 1375

2° Trois ans plus tard (13 octobre 1898) le conseil fédéral augmente la ristourne de 1 Mark par hectolitre = 24 fr. 39.

3° Un an après (19 octobre 1899) le conseil fédéral augmente encore la ristourne de 1 Mark = 25 fr. 64.

La même année (août 1899) la dénaturation au benzol est accordée expérimentalement, parce que la station spéciale pour l'étude des emplois industriels de l'alcool avait démontré l'utilité pratique de cette réforme.

4° Le 1er juillet 1900 les chemins de fer de l'empire classent l'alcool d'industrie dans le tarif spécial n° III, ce qui permet de le transporter à bas prix dans toutes les parties de l'empire.

Aussi le prix de l'alcool dénaturé pour moteurs à 85 °/₀ vol. est-il actuellement, franco en gare dans toutes les stations de l'empire, de 20 Marks soit 25 fr. par 100 litres !

Voilà ce que les pouvoirs publics ont fait en Allemagne.

Cette action rapide du gouvernement n'était du reste que le corollaire des efforts de l'initiative privée, et notamment de l'action commune *des associations agricoles* et de l'*association des distillateurs;* nous avons vu qu'en Allemagne ces deux associations sont très connexes, les distilleries industrielles étant fort rares.

En 1896 l'association des distillateurs résolut de créer une station expérimentale pour l'utilisation industrielle de l'alcool; le gouvernement lui accorda aussitôt 10 000 Marks de subside, faveur à ajouter aux encouragements que nous venons d'énumérer.

Bientôt fut créé un *bureau central pour l'emploi de l'alcool* afin d'abaisser le prix de l'alcool dénaturé : les petits débitants des villes et des villages et les distillateurs éloignés des grands centres vendaient l'alcool à des prix supérieurs de 100 °/o au prix de vente dans les grandes villes. Tout progrès était impossible si l'on ne mettait l'alcool dénaturé à la disposition de tous à un tarif aussi bas que possible.

Ce n'est pas un des moindres titres de gloire de la *Société des distillateurs allemands* que d'avoir réussi, malgré les intérêts multiples qu'elle lésait, à vendre l'alcool directement aux petits détaillants de 24 000 débits, répandus dans tout l'empire, et engagés à ne prélever comme bénéfice que 5 à 6 pfennigs par litre.

En même temps que se prenaient ces mesures de propagande, de nombreux expérimentateurs perfectionnaient les appareils de chauffage, d'éclairage et de force motrice à l'alcool.

Et c'est ainsi qu'à l'heure actuelle l'alcool dénaturé devient en Allemagne un produit de consommation courante et pratique, dont les ménagères se servent pour faire la cuisine, pour enlever les taches, ou polir les meubles; l'éclairage des gares, des rues, des grands locaux peut déjà se faire à l'alcool; enfin en un an plus de 100 moteurs à alcool ont été construits et livrés à l'agriculture et à l'industrie!

Examinons brièvement les progrès accomplis par rapport au chauffage, à l'éclairage et à la force motrice par l'alcool dénaturé.

Éclairage à l'alcool dénaturé

Lors de la conférence de M. Denayrouze il a été démontré par des expériences très intéressantes que les lampes à alcool fournissent une superbe lumière; il s'agissait de lampes Denayrouze, d'un système nouveau, qui est, paraît-il, très économique.

Il existe en Allemagne un très grand nombre de systèmes de lampes à alcool et ils sont fort employés depuis deux ans. On estime que rien que pour l'éclairage il sera brûlé en Allemagne, en 1900-1901, plus de 1 million de litres d'alcool dénaturé.

Cependant les lampes à alcool actuelles ont encore un défaut : les modèles existants produisent trop de lumière (5 à 6 carcels). Elles sont pratiques comme maniement, sont surtout très propres, et ne sont pas d'un prix trop élevé; elles conviennent parfaitement pour éclairer des gares et de grandes salles, mais non pas pour les usages domestiques ordinaires.

Il faut être riche pour s'éclairer, sans nécessité, avec une lampe de 5 carcels (50 bougies) : cela ne peut convenir aux ménages modestes.

Il faut que les inventeurs se mettent à l'œuvre pour trouver une lampe de faible pouvoir éclairant : il n'en existe pas encore, que je sache, ni en Allemagne ni autre part. Jusqu'ici les lampes Auer et Phöbus sont estimées les plus pratiques.

Des primes très élevées sont promises à celui qui construira une bonne lampe de table : le total est de 15 000 Marcs (18 250 francs).

Il n'en est pas moins vrai que déjà, pour l'éclairage public, on emploie en Allemagne un nombre considérable de lampes à alcool, notamment sur les lignes des chemins de fer prussiens, qui ont consommé 600 000 litres d'alcool dénaturé en 1900; les chemins de fer bavarois ont utilisé 189 000 litres, les chemins de fer du royaume de Saxe 50 000 litres.

La *Centrale pour la vente d'alcool* a déjà des contrats jusqu'en 1908 avec 25 villes allemandes : elle a des contrats expérimentaux d'un an avec beaucoup d'autres villes.

Le même office central a déjà livré directement plus de 2000 lampes, et placé plus de 1000 lampes à l'essai.

Chauffage à l'alcool

L'alcool dénaturé possède un pouvoir calorifique de 6000 à 6500 calories; le pétrole au contraire monte à 10 ou 11 000 calories. Le rapport de ces puissances calorifiques est donc environ comme 6 est à 10. Il semblerait donc que l'alcool ne pourrait jamais lutter comme combustible de chauffage avec la houille et le pétrole.

Malgré cette impossibilité apparente, le chauffage au moyen de l'alcool s'est fort répandu en Allemagne et, chose surprenante, c'est surtout dans *les petits ménages* ouvriers et bourgeois qu'il est le plus généralement adopté. Sur les 105 millions de litres que l'on dénature annuellement en Allemagne, la plus grosse part est employée au chauffage.

Il ne s'agit évidemment pas ici de chauffage de locaux ou salles d'habitation, un poêle à alcool serait un meuble fort peu économique. Mais il est foule d'opérations domestiques pour lesquelles on a besoin d'une chaleur forte mais qui ne dure que peu de temps : tel est le cas, par exemple, pour le chauffage de lait, de café, d'eau, de fers à repasser, à friser, etc.

C'est précisément pour ces petits usages que les réchauds à alcool se sont répandus. Les uns sont munis de mèches, les autres vaporisent l'alcool dont ils brûlent la vapeur; ces derniers sont les plus employés. Un bon réchaud à alcool brûle 35 à 40 grammes d'alcool pour porter à l'ébullition en 8 à 9 minutes, 1 litre d'eau.

On jugera de la quantité considérable de réchauds introduits depuis quelques mois dans les ménages d'Outre-Rhin par le chiffre suivant : pendant le seul mois de juillet 1900, l'office central de Berlin a vendu 11 000 de ces réchauds.

Les moteurs à alcool

C'est surtout à cette question, très intéressante au point de vue scientifique, que nous voulons nous arrêter.

L'Allemagne agricole attache d'autant plus de prix à la solution favorable de cette question, qu'elle se trouve dans des conditions

exceptionnelles pour retirer de l'alcool combustible le bénéfice maximum : non seulement elle le produit elle-même en quantités considérables (*), mais de plus, par suite des droits d'entrée (6 M. p. 100 kgr.) qui frappent le pétrole, et des grandes distances séparant les usines agricoles des stations de chemins de fer, elle ne peut se procurer le pétrole et le charbon qu'à des prix beaucoup plus élevés qu'en Belgique.

Il est indispensable de tenir compte de ces conditions spéciales si l'on veut comprendre la faveur dont jouissent les expériences menées par nos voisins en vue d'aboutir à l'utilisation industrielle et pratique de l'alcool dénaturé.

Nous montrerons plus loin, combien différentes seraient les conclusions de ces expériences si les essais avaient eu lieu en Belgique.

Quel que soit le prix de revient *local* du travail du moteur à alcool moderne, les perfectionnements de sa construction et de son réglage offrent le plus haut intérêt au point de vue général. Aussi devons-nous saluer avec satisfaction l'apparition de la brochure de M. l'ingénieur Ad. Oelkers, brochure qui nous apporte la première synthèse raisonnée des expériences exécutées en Allemagne (**).

Nous suivrons point par point dans le résumé ci-dessous l'exposé de M. Oelkers.

L'HISTOIRE DU MOTEUR A ALCOOL

Les premiers essais furent entrepris en 1894 par la firme Grob et C° de Leipzig : le moteur imaginé par cette maison de construction fut présenté à l'association des agriculteurs qui le ren-

(*) En 1898-1899 de 60 926 distilleries en activité dans l'Empire d'Allemagne produisant ensemble 3 815 569 hectolitres d'alcool (absolu), 59 600 étaient des distilleries agricoles, 1326 seulement étaient industrielles; dans ce chiffre de 3 815 569 hectol. rentrent 3 106 734 hectol. d'alcool de pommes de terre.

(**) *Die Entwickelung der Spiritus-Motoren* von Ad. Oelkers, Ingenieur-Mittheilung aus der machinentechnischen Abtheilung des Instituts für Gährungsgewerbe. — Sonder abdruch aus dem KALENDER FUR DIE LANDWIRTHSCHAFTLICHEN GEWERBE für das Jahr 1901. Berlin, Paul Parey, 1901.



voya pour examen à la société des distillateurs d'Allemagne. Le pouvoir calorifique de l'alcool étant au pouvoir calorifique du pétrole dans le rapport de 6 à 10, le nouveau moteur semblait légitimer peu d'espoir de succès, encore qu'il présentât des avantages spéciaux quant à la propreté et à l'absence d'odeur. En mai 1894 la firme Grob exposait au concours agricole de Berlin un moteur à pétrole pouvant aussi marcher à l'alcool. Dans son rapport sur les essais des moteurs à pétrole présentés au concours, le professeur W. Hartmann-Berlin constatait que la marche à l'alcool était possible, et qu'elle ne laissait pas de résidus de combustion. Toutefois le moteur avait employé par cheval-heure 0,839 kilos d'alcool, contre 0,426 kgr. de pétrole : ce résultat semblait exclure l'alcool de l'utilisation pratique.

Malgré cela les essais furent continués. Le 15 octobre 1895 le directeur de l'association des distillateurs résolut d'organiser une exposition spéciale des procédés d'utilisation industrielle de l'alcool ; à sa demande le comte von Posadowsky (Ministère des Finances) attribua sur les fonds de l'État un subside de 10 000 Marcs (12 500 fr.). En janvier 1896 une commission fut nommée, et reçut la mission de rédiger un programme de concours pour le perfectionnement de l'usage industriel de l'alcool et la vente d'alcool à bas prix au petit commerce. La commission proposa la fondation d'un institut ayant pour but spécial d'étudier les procédés applicables à l'emploi de l'alcool dans l'industrie : cet institut se voyait assigner comme champ d'étude les questions suivantes :

1° La lumière à l'incandescence par l'alcool ;

2° Les appareils de chauffage à l'alcool ;

3° Les moteurs à alcool ;

4° La fabrication de l'alcool et du vinaigre ;

5° Les industries des produits chimiques alcooliques, des laques et des vernis.

Cette extension du plan primitif fut officiellement approuvée : le 10 décembre 1896 furent votés les subsides nécessaires à la station d'essai des moteurs à alcool, et le 30 décembre de la même année une circulaire insérée dans le Zeitschrift für Spiritusindustrie invitait les constructeurs à soumettre des moteurs de cette catégorie aux essais de la station.

Un grand nombre de firmes répondirent à cet appel, entre autres

des maisons de premier ordre : la *Gasmotorenfabrik Deutz ;* les frères *Körting* de Hanovre, la *Daimler Motorengesellschaft* de Cannstatt; *Moritz Hille* de Dresde; la *Motorenfabrik Oberursel*, etc., dix moteurs furent présentés et essayés plus ou moins complètement.

Vers la même époque le professeur Dr Slavy de l'École supérieure technique de Charlottenbourg avait chargé l'ingénieur Pétréano d'essayer dans son laboratoire un appareil vaporisateur, au moyen d'alcool à 90,2 % (en poids). Pour un travail de cinq chevaux-vapeur la consommation d'alcool fut de 0,54 à 0,55 kgr. par cheval-heure, soit un rendement industriel de 24,6 dans le premier essai et de 23,7 dans le deuxième essai.

Des résultats encore meilleurs furent obtenus par l'ingénieur Haack, de la station d'essai de Berlin, lors d'une expérience faite les 26 et 27 mars 1897 chez les frères Körting (Hanovre). Un moteur à benzine de 6 chevaux, transformé pour l'emploi d'alcool, développa 9,933 chevaux-vapeur, en consommant par cheval-heure 0,39 kgr. d'alcool à 93 %. Le moteur ne différait d'un moteur à benzine ordinaire que par l'insertion d'une chambre de vaporisation entre le pulvérisateur de benzine et la soupape d'admission. Ce vaporisateur inventé par Körting était chauffé par les gaz de décharge et se trouvait en communication directe avec la soupape d'admission d'air et d'alcool.

A la suite de ces essais un moteur Körting fut placé à la station de Berlin, et soumis à des essais, études et modifications prolongés.

En février 1899 l'ingénieur Goslich fit à la station de Berlin une série d'expériences très favorables, quant à l'action du benzol sur la puissance développée par les moteurs à alcool.

En février 1900 une locomobile à alcool de 15 chevaux construite par la fabrique d'Oberursel fut essayée : elle accusa une consommation de 0,41 kgr. d'alcool par cheval pour un travail de 21,8 chevaux, soit pour une surcharge de près de moitié. L'alcool à 88 % avait été mélangé à 20 % de benzol.

Enfin le 1er juillet 1900 une nouvelle faveur fut accordée sous forme de la classification de l'alcool industriel parmi les marchandises soumises au tarif spécial n° III. Cela permit d'abaisser le prix de l'alcool pour force motrice, à la suite de l'exposition des moteurs à alcool à Posen.

RÉSULTATS PRATIQUES DES ESSAIS DES MOTEURS A ALCOOL

M. Oelkers expose dans les termes suivants, les conclusions qui se dégagent des recherches et expériences que nous venons de mentionner.

« Il est possible d'actionner des moteurs à explosion au moyen d'alcool à 85-90 °/₀ en poids; il est avantageux de dénaturer l'alcool avec du benzol, et l'addition de 15 à 20 °/₀ de benzol est la dose la plus favorable au développement de force. Si l'on ajoute plus de benzol, on élève la consommation de combustible par cheval-heure. La dose de benzol la plus favorable dépend des conditions de prix (de l'alcool et du benzol).

La combustion du mélange de benzol et d'alcool est une combustion parfaite, de telle sorte que les gaz de la décharge sont dépourvus d'odeur et que l'utilisation du moteur se fait dans des conditions de propreté plus grandes que lors de l'emploi de pétrole. Le danger d'incendie est très faible comparativement au danger de la benzine.

La consommation d'alcool des bons moteurs atteint 0,36 à 0,42 kgr. en moyenne par cheval-heure.

Les moteurs à alcool développent comparativement aux moteurs à benzine de mêmes dimensions, une force supérieure jusqu'à 25 °/₀.

La mise en marche des moteurs à alcool ne donne aucune difficulté.

Il s'est produit de la rouille dans les cylindres des moteurs dont la vaporisation n'était pas suffisante. Cela s'évite complètement lorsqu'on vaporise l'alcool après l'avoir suffisamment chauffé. Ce danger de rouille exige une attention spéciale, lors du choix des matériaux pour l'allumeur électrique et la soupape d'admission. Le moteur à alcool qui fonctionne depuis deux ans et demi dans la distillerie expérimentale (*) a montré, lors d'une inspection récente, des cercles de piston et un cylindre en parfait état.

(*) L'école supérieure de brasserie, la brasserie expérimentale; l'Institut des fermentations, la distillerie et la féculerie expérimentales de Berlin forment un ensemble situé Seestrasse Berlin N. Les installations de ces Instituts sont faites sur le même pied que celles de l'Institut agronomique de Berlin, et n'ont d'égales dans aucun autre pays (E. L.).

Le *rendement pratique* ou industriel du moteur à alcool est extraordinairement élevé.

Pour une machine de qualité moyenne, en admettant une consommation de 0,4 kgr. d'alcool dénaturé au benzol, le pouvoir calorifique du mélange d'alcool et de benzol employé dans nos essais, se calcule comme suit :

1 kgr. d'alcool à 85,68 °/₀ en poids = 90 °/₀ en volume, développe lors de la combustion environ 5650 calories, pour un poids spécifique de 0,834;

1 kgr. de benzol C_6H_6, ayant un poids spécifique de 0,886, développe 10 330 calories.

Pour nos essais, nous avons mélangé

	80 lit. d'alcool	= 66,7 kgr.	=	376 968 calories.
et	20 lit. de benzol	= 17,7 kgr.	=	182 841 »
donc	100 l. du mélange	= 84,4 kgr.	développent	559 809 calories.

Le pouvoir calorifique de l'alcool à 90 °/₀ vol., dénaturé à 20 °/₀ de benzol est donc $\frac{559\,809}{84,4}$ = environ 6633 calories.

Le rendement pratique d'un moteur à alcool ayant une consommation moyenne de 0,4 kgr. d'alcool dénaturé par cheval-heure s'évalue d'après les considérations suivantes :

La combustion complète du mélange donnerait 6633 calories. L'équivalent mécanique de la chaleur = 427. Le rendement de 1 kgr. d'alcool dénaturé

$$\frac{6633 \times 427}{3600 \times 75} = 10,49 \text{ chev. heure.}$$

Puisque nous obtenons (avec l'alcool) 1 cheval-heure en dépensant 0,4 kgr, nous obtenons 2,5 cheval-heure en dépensant 1 kgr. d'alcool dénaturé. Le rendement pratique est donc :

$$\Upsilon = \frac{2,5}{10,49} = \text{environ } 23,8\ ^{0}/_{0}.$$

Dans les meilleures machines à vapeur 87 °/₀ du pouvoir calorifique du combustible sont perdus; le rendement pratique de nos meilleures machines à vapeur est donc de 13 °/₀.

D'après le professeur Musil (*Wärmemotoren,* 1899), le rende-

ment pratique de nos moteurs à benzine et à pétrole, en admettant un pouvoir calorifique moyen de 10 000 calories par kilogramme de combustible, atteint 14,18 °/₀ dans les moteurs à benzine et 13 °/₀ dans les moteurs à pétrole. D'après les essais de Musil, le rendement du moteur Diesel à pleine charge atteint 29,4. La supériorité thermique du moteur Diesel provient d'un cycle plus parfait, mais par contre de grands inconvénients pratiques sont propres à exclure l'emploi de ce moteur. Il n'est donc pas fait mention du moteur Diesel dans le tableau suivant des prix de revient du travail journalier; ce moteur doit encore être amélioré quant à la construction, avant qu'on puisse le compter au nombre des moteurs utilisables et dignes de confiance pouvant marcher avec une sécurité industrielle suffisante.

La comparaison des conditions d'économie thermique dans les rendements pratiques

γ pour moteur à benzine = 14 à 18 °/₀
γ „ „ à pétrole = 13 °/₀
γ „ machine à vapeur = 13 °/₀
γ „ moteur à gaz = 13 °/₀
γ „ „ à alcool = 23,8 °/₀ en moyenne

montre la supériorité considérable au point de vue de l'économie de calorique du moteur à alcool comparativement à la machine à vapeur et aux autres moteurs actionnés par des combustibles liquides. „

D'OÙ PROVIENT LE HAUT RENDEMENT THERMIQUE DES MOTEURS A ALCOOL

Les chiffres ci-dessus révèlent un progrès dépassant de beaucoup ce que l'on avait espéré.

En effet, ils démontrent que l'on peut produire au moyen d'un kilogramme d'alcool dénaturé, dont le pouvoir calorifique n'est que de 6633 calories, autant de travail mécanique que par l'emploi d'un kilogramme de benzine ou de pétrole, dont le pouvoir calorifique est de 10 000 calories environ.

Cette constatation ne peut s'expliquer autrement que par des modifications ayant perfectionné le cycle du moteur à explosion. M. Oelkers cite notamment les conditions qui avantagent le moteur à alcool par rapport aux moteurs à pétrole ou benzine; nous les condensons comme suit :

1° La compression du mélange peut être poussée plus loin dans les moteurs à alcool sans crainte d'inflammation prématurée, et cela pour deux motifs : d'abord parce que la température d'inflammation de l'alcool est plus élevée, ensuite parce que l'alcool contient une proportion d'eau considérable. M. Oelkers rappelle que l'ingénieur Banki avait essayé d'augmenter la compression à la faveur d'injections d'eau, ce qui est inutile lorsqu'on emploie l'alcool. Aussi, les compressions des moteurs à alcool employées jusqu'ici atteignent-elles 6 à 7 atmosphères, alors que les moteurs à pétrole ne compriment qu'à 5 atmosphères en moyenne.

La conséquence de cette compression plus forte se traduit dans les diagrammes par une ligne d'explosion presque verticale, entraînant une augmentation de surface. M. Oelkers rappelle que le moteur Diesel n'atteint le rendement de 29,4 qu'au moyen d'une compression de 35 à 40 atmosphères.

2° Il est possible dans les moteurs à alcool d'utiliser une plus grande partie de la chaleur des gaz d'échappement au chauffage du vaporisateur. En effet, pour les motifs ci-dessus mentionnés, on n'a pas à craindre, autant que dans les moteurs à essence ou pétrole, l'inflammation prématurée du mélange. Le moteur à alcool peut donc, de ce chef, utiliser un peu plus de la chaleur dégagée par l'explosion, et perd donc moins par la décharge.

3° La combustion du pétrole et des essences ne se fait pas complètement; une partie du combustible ne dégage donc pas les calories qu'il renferme. Ce défaut se traduit extérieurement par l'odeur forte des gaz de la décharge. La combustion dans les moteurs à alcool est parfaite.

4° L'alcool est un hydrocarbure déjà partiellement oxydé; l'oxygène qu'il contient contribue à la combustion du benzol qui sert de dénaturant. Il n'est donc pas nécessaire d'introduire un excès d'air qui absorberait de la chaleur, et d'autre part on peut employer un mélange plus riche sans craindre des résidus incomburés.

5° Il se produit peut-être, au moment de l'inflammation, des décompositions chimiques spéciales, donnant naissance à des gaz explosifs nouveaux. Oelkers fait observer que le benzol C_6H_6, lorsqu'on lui fait traverser des tubes chauffés au rouge, abandonne

du carbone et se décompose en hydrogène, acétylène et autres hydrocarbures facilement explosifs; que d'autre part, les phénomènes qui se produisent lors de la combustion de l'alcool sous pression sont encore peu connus (*).

6° Les cylindres ne s'encrassent pas; la manipulation est très propre et le moteur ne dégage pas d'odeur désagréable.

LE MOTEUR A ALCOOL AU POINT DE VUE ÉCONOMIQUE

Le prix de revient du travail d'un moteur thermique donné varie non seulement d'un pays à l'autre, mais encore d'une localité à l'autre, d'après les conditions de prix et de transport du combustible employé.

Il en résulte qu'un même moteur peut fonctionner très économiquement en Allemagne, par exemple, et cependant n'être nullement recommandable dans un pays voisin. Nous en avons un exemple caractéristique dans le moteur à alcool.

Le moteur à alcool se compare comme suit aux moteurs à pétrole et à benzine, d'après les chiffres dressés *pour l'Allemagne* par M. Oelkers.

Prix de revient en Allemagne du cheval-heure pour des moteurs de 10 H. P.

COMBUSTIBLE	CONSOMMATION MOYENNE	PRIX DE L'UNITÉ	PRIX DU CHEVAL-HEURE en Pfennigs
Alcool . . .	0,4 kgr. = 0,47 litre	1 litre = 0,197 Mk.	9,26 Pfg.
Benzine . .	0,35	1 kgr. = 0,38 Mk.	13,30 Pfg.
Pétrole . .	0,4	1 kgr. = 0,25 Mk.	10,00 Pfg.

(*) M. Oelkers cite à l'appui de cette thèse l'expérience suivante : Lors d'une détermination calorimétrique d'alcool à 85,9 en poids, la pression se maintint pendant 10 secondes à 60 atmosphères; pendant cette période, on put observer distinctement des variations de pressions atteignant 5 atmosphères, durant 1/2 à 1 seconde, et provenant probablement de phénomènes de dissociation.

Ce tableau montre que pour l'Allemagne le prix de revient du travail du moteur à alcool est au moins équivalent et même légèrement inférieur au prix du travail du moteur à pétrole, alors qu'il est sensiblement inférieur au prix de revient du travail du moteur à benzine. Si l'on tient compte de la propreté plus grande, de l'absence d'odeur et de la sûreté de marche du moteur à alcool, il faudra, suivant les conclusions de M. Oelkers, lui donner la préférence sur le moteur à pétrole dans l'étendue de l'empire allemand.

L'emploi d'alcool pour l'éclairage ou la force motrice suppose *a priori* l'exemption complète ou presque complète de droits et taxes, c'est-à-dire l'emploi de l'alcool à son prix de revient en fabrication, ou à peu près.

Dans les calculs ayant pour but de constater si l'emploi de l'alcool est possible, au point de vue économique, pour des usages industriels (éclairage, chauffage, force motrice, fabrication de laques, vernis et produits divers), on ne peut évidemment porter l'alcool au prix de l'alcool de bouche, ce dernier étant chargé dans tous les pays de droits très élevés.

En Allemagne l'alcool d'industrie est exempté des droits moyennant une dénaturation coûtant 2 M. 50 à l'hectolitre d'alcool pur; la dénaturation à 20 °/₀ de benzol autorisée expérimentalement revient à 0. M. 80 par 100 litres d'alcool pur.

Dans ces conditions les prix de revient de l'alcool pur (100 °/₀) et de l'alcool dénaturé s'établissent comme suit :

100 litres alcool à 100 °/₀ *(Prix de base pour alcool à 70° loco non logé)*	M.	38,00	Fr.	47,500
A retrancher impôts	„	19,51	„	24,387
Reste pour 100 litres alcool à 100 °/₀ exempt de droit.	M.	18,49	„	23,113
Soit pour 1 litre alcool à 90 °/₀ . .	Pfg.	16,65	„	20,813

Dénaturation au dénaturant général

100 litres alcool pur exempt de droits . .	M.	18,49	„	23,113
Dénaturant 2 litres 5 à 1 Mark. . . : .	„	2,50	„	3,125
Total pour 102,5 litres	M.	20,99	„	26,238
Soit pour 100 litres à 100 °/₀	„	20,48	„	25,600
Soit enfin pour 1 litre à 90 °/₀ . .	Pfg.	18,43	„	23,037

Dénaturant au benzol

100 litres alcool pur et exempt de droit	. M.	18,49	„	23,113
5 litres benzol à Mark 0,16	„	0,80	„	1,000
Total pour 105 litres	. M.	19,29	„	24,113
Soit pour 100 litres d'alcool dénaturé.	„	18,38	„	22,975
Soit pour 1 litre à 90 °/ₒ	Pfg.	16,54	„	20,675

Il appert de ces chiffres que l'utilisation industrielle de l'alcool est un problème à résoudre *bien plus par le fisc que par les mécaniciens.*

M. Oelkers termine sa brochure par des calculs dans lesquels il établit les faits suivants :

1° Pour tous les usages agricoles où la puissance du moteur ne doit pas dépasser 30 à 40 chevaux-vapeur, la *locomobile à alcool* est plus avantageuse que toute autre locomobile. Le prix d'achat d'une locomobile à vapeur de 10 chevaux est fixé, pour la première qualité, à 6900 Marks (8625 fr.). [Poids 6100 kgr ; nombre de tours par minute 135; consommation de vapeur 14 à 16 kgr.; consommation de charbon 2 à 2,3 kgr.; prix du charbon 2 M., 60 p. 100 kgr.]

Une locomobile à alcool, pour la même force, coûte 5800 M. (7250 fr.) pèse 3500 kgr.; fait 200 tours par minute, et consomme 0,47 d'alcool dénaturé.

Une locomobile à benzine reviendrait au prix de 5700 M.; la même locomobile à pétrole 5600 M.; le poids de ces locomobiles serait à très peu près le même que le poids de la locomobile à alcool. La consommation serait respectivement de 0,35 kgr. à 0,4 kgr.

Le nombre de jours de travail est porté à 300 annuellement.

On suppose la ferme éloignée de 10 kilomètres de la gare du chemin de fer; à raison de 2500 kgr. poids net transporté par un attelage, de deux voyages par jour et d'un prix de revient de 6 M. par jour et par attelage, le transport coûterait.

Vapeur	— 3000 × 10 × 2,3	= 69000 kgr.	= frais de transport	84 M.
Alcool	— 3000 × 10 × 0,4	= 12000 „	= „	18 „
Benzine	— 3000 × 10 × 0,35	= 10500 „	= „	12 „
Pétrole	— 3000 × 10 × 0,40	= 12000 „	= „	18 „

De plus, M. Oelkers charge le travail de la locomobile de 4 M, par jour pour transport d'eau et de charbon, plus 0,20 M. par jour. représentant 2 heures de travail d'un homme nécessaires à l'allumage et à l'extinction de la locomobile.

Le tableau ci-dessous résume les calculs de prix de revient.

LOCOMOBILE DE 10 CHEVAUX	VAPEUR	ALCOOL	BENZINE	PÉTROLE
Amortissement et intérêt du capital d'achat (12 °/₀ par an)	824,00	696,00	684,00	672,00
Service (2 M. par jour) par an . . .	720,00	600,00	600,00	600,00
Graissage	75,00	75,00	75,00	75,00
Entretien, nettoyage, etc.	75,00	25,00	25,00	30,00
Total frais annuels	1694,00	1396,00	1384,00	1377,00
Combustible pour 3000 heures. . .	1794,00	2777,00	3990,00	3000,00
Transport de la gare à la ferme . .	84,00	18,00	12,00	18,0)
„ de la ferme à la machine.	1200,00	—	—	—
Total frais	4772,00	4191,00	5386,00	4395,00
Prix de revient de 1 chev. vap. effectif	Pf. 15,91	Pf. 13,99	Pf. 17,95	Pf. 14,65

Dans un calcul analogue comparant le moteur à benzine au moteur à alcool d'après les essais de deux voitures automobiles (*), M. Oelkers obtient les chiffres suivants :

	ALCOOL	BENZINE
Charge totale (kgr.)	2995,00	3370,00
Charge utile	845,00	1500,00
Kilomètres	35,00	100,00
Tonnes-Kilomètre Totales	104,80	337,00

(*) L'automobile à benzine dont il est question ici est une voiture à benzine de la firme *de Dietrich*, essayé au concours de Versailles 1898.

Tonnes-Kilomètre Utiles.	29,60	150,00
Combustible par T. K. T.	0,095	0,1148
„ „ T. K. U.	0,348	0,2579
Prix par T. K. T.	2,23 Pfg.	4,36 Pfg.
„ „ T. K. U.	7,90 „	9,80 „

Les conclusions de M. Oelkers sont donc très favorables à l'emploi de l'alcool comme source de force motrice EN ALLEMAGNE.

Il donne enfin le tableau suivant, donnant le nombre de moteurs à alcool en activité ou en construction dans l'étendue de l'empire allemand.

FIRMES	Nombre	depuis le 1er janv. 1900	Locomobiles	Moteurs	Puissance chev.-vap.	OBSERVATIONS
Daimler Motoren Gesellschaft, Carmstadt	3	—	—	3	7	p. automobiles
Gasmotorenfabrik Deutz. . .	16	—	—	—	1-12	—
Körting, Hannovre.	12	5	—	5	2-20	p. silos à grain
Motorenfabrik Oberursel . .	49	48	34	15	2-15	p. agriculture
Motorfahrzeug und Motorenfabrik Berlin-Marienfelde. .	22	22	—	—	—	—
Kühlstein Wagenbau. . . .	1	1	—	1	—	p. automobiles
TOTAL.	103	76	34	24	1-20	

Nos conclusions. D'après le rapport de M. Oelkers le moteur à alcool est actuellement d'emploi aussi pratique que le moteur à benzine et à pétrole, dans les pays où l'alcool est à bon marché et le pétrole à haut prix, par suite, d'une part, des primes accordées à l'alcool d'industrie et d'autre part, des droits frappant le pétrole.

Si nous examinons quel est le prix de revient du travail des moteurs à alcool en Belgique en supposant que le fisc, favorisant

l'emploi d'alcool comme source de force motrice, supprime le droit et autorise la dénaturation au benzol en nous mettant à peu près sur le même pied que les Allemands, nous trouvons :

Prix de revient en Belgique du cheval-heure pour des moteurs de 10 H. P. (*)

COMBUSTIBLE	CONSOMMATION MOYENNE	PRIX DE L'UNITÉ	PRIX DU CHEVAL-HEURE
Alcool. . .	0,4 kgr. = 0,47 litre	fr. 0,261 le litre	12,3 centimes
Benzine . .	0,35	fr. 0,30 le kilo	10,5 »
Pétrole. . .	0,4	fr. 0,1875 »	7,5 »

La simple exemption de droit laisse donc encore une supériorité très marquée à la benzine et surtout au pétrole.

L'économie de l'emploi de l'alcool pour force motrice est donc encore purement artificielle.

Pour les usages où l'économie n'est pas une condition absolue, pour l'automobilisme par exemple, l'alcool exempt de droits semble appelé à rendre de grands services.

Pour les usages industriels proprement dits la différence est encore très en faveur du pétrole.

Pour rendre économique l'emploi d'alcool-moteur en Belgique il y a deux moyens : imposer le pétrole comme en Allemagne (et actuellement cela n'est pas possible); ou bien accorder à l'alcool dénaturé des *primes* encore plus fortes que celles de l'Allemagne

(*) Nous calculons le pétrole au prix actuel de 18,75 les 100 kilos (février-mars); la benzine à 30 fr. les 100 kilos. L'alcool dénaturé n'a pas de cours en Belgique; nous supposons dans nos calculs qu'il nous soit possible de produire en Belgique de l'alcool à 100° coûtant exempt de droit 30 fr. soit à 90 p. c. = 27 fr. Le benzol est calculé à raison de 22,5 centimes le kilo, prix coté en Allemagne. Il coûte actuellement en Belgique 45 centimes, parce qu'il n'y a pas de vente en très gros.



et prélevées sur le produit des impôts payés par l'alcool de bouche. Ces impôts pourraient être majorés de manière à ce que le Trésor public ne subisse de ce chef aucune perte.

Dans la question de l'utilisation de l'alcool à l'éclairage, au chauffage et à la production de force motrice, les inventeurs et techniciens se sont acquittés de leur rôle en produisant les appareils qui nous faisaient défaut : réchauds, lampes, moteurs.

C'est maintenant que commence le rôle du fisc : sans son intervention la question de l'alcool industriel restera pour nous sans solution pratique, il en sera de même si l'intervention du fisc ne se fait pas avec la largeur de vues et la volonté d'aboutir que nous constatons en Allemagne.

SIMPLE RECHERCHE TRIGONOMÉTRIQUE

DE LA

NUTATION EULÉRIENNE DE L'AXE INSTANTANÉ

PAR

M. F. FOLIE
Membre de l'Académie royale de Belgique

Dans les nos du BULLETIN DE L'ACADÉMIE d'août et d'octobre derniers, après avoir en vain cherché à remplacer par une analyse correcte l'analyse incorrecte d'Oppolzer, j'ai fait voir que cette recherche ne pouvait pas aboutir parce qu'elle exigeait l'intégration de $\frac{d\omega}{dt} = f$, intégration qui n'a aucun sens mécanique, puisque ω est la vitesse autour de l'axe instantané, mobile, et qu'on ne peut sommer des rotations qu'autour d'un même axe.

Les objections qui ont été faites tout récemment à mes démonstrations par un géomètre illustre m'ont engagé à en chercher une qui fût accessible à tous les astronomes, et à l'abri de tout reproche. Je l'ai trouvée; elle est tellement simple que chacun se demandera comment il est possible que personne n'y ait encore songé. La voici. Soit P le pôle géographique, I le pôle instantané, Π celui de l'écliptique. Ces trois cercles déterminent entre eux un triangle EE_1F dont les angles E, E_1, F sont $\pi - \theta$, θ_1, $\Upsilon = PI$; le côté $EE_1 = \Psi - \Psi_1$, le côté $EF = \zeta$, angle compris entre le colure des solstices et l'arc PI. On sait que la période de cet argument est de 300 j. environ.

Les formules absolument rigoureuses, rapportées aux axes principaux, formules admises par Oppolzer (*), sont

$$\text{I}\quad\left\{\begin{aligned}\theta &= \theta_m + \Delta\theta - \gamma \sin\beta\\ \Psi &= \Psi_m + \Delta\Psi + \frac{\gamma}{\sin\theta}\cos\beta,\end{aligned}\right.$$

θ_m et Ψ_m désignant l'obliquité et la longitude moyennes, $\Delta\theta$ et $\Delta\Psi$ la précession et la nutation, γ la constante de la nutation eulérienne, β un argument de la forme $\varphi + \mu t + \beta_0$, dont la période est de $1\frac{1}{300}$ jour.

Celles d'Oppolzer, prétendûment rapportées au pôle instantané, sont

$$\text{I}'\quad\left\{\begin{aligned}\theta_1 &= \theta_m + \Delta\theta\\ \Psi_1 &= \Psi_m + \Delta\Psi.\end{aligned}\right.$$

Si elles sont correctes il faut que

$$\text{I}''\quad\left\{\begin{aligned}\theta - \theta_1 &= -\gamma\sin\beta\\ \Psi - \Psi_1 &= \frac{\gamma}{\sin\theta}\cos\beta.\end{aligned}\right.$$

Or le triangle EE_1F donne

$$\cos\theta_1 = \sin\theta\cos\zeta\sin\gamma + \cos\theta\cos\gamma,$$

$$\operatorname{tg}(\Psi - \Psi_1) = \frac{\sin\zeta}{\sin\theta\cot\gamma - \cos\theta\cos\xi},$$

ou, en s'arrêtant aux termes du premier ordre :

$$\text{II}\quad\left\{\begin{aligned}\theta - \theta_1 &= \gamma\cos\zeta\\ \Psi - \Psi_1 &= \frac{\gamma}{\sin\theta}\sin\zeta.\end{aligned}\right.$$

(*) Les formules (15), p. 149, concordent avec celles-ci, si l'on fait

$$\beta = \varphi + \mu t + \beta_0,\qquad \xi_0 = -\gamma\cos\beta_0,\qquad \eta_0 = \gamma\sin\beta_0$$

Ces formules correctes présentent la plus grande analogie avec les formules I″, auxquelles elles devraient être identiques si celles d'Oppolzer étaient exactes. Pour cela il faudrait que $\zeta = \beta + \frac{\pi}{2}$, ce qui est absurde, puisque la période de ζ est de 300 j., celle de β de $1\frac{1}{300}$ j.

Les formules d'Oppolzer I′, universellement adoptées par les astronomes depuis 25 ans, sont donc absolument fausses (*).

Les formules correctes de la nutation, rapportées au pôle instantané, sont, au contraire, les suivantes, qui se déduisent de I et de II:

$$\text{III}\left\{\begin{aligned} \theta_1 &= \theta_{*} \div \Delta\theta - (\sin\beta + \cos\zeta) \\ \Psi_1 &= \Psi_{*} + \Delta\Psi + \frac{\Upsilon}{\sin\theta}(\cos\beta + \sin\zeta); \end{aligned}\right.$$

elles renferment, outre les termes de la nutation eulérienne rapportée à l'axe d'inertie, dont la période est de $1\frac{1}{300}$ j., ceux qui dépendent de l'argument ζ, c'est-à-dire du mouvement du pôle instantané autour du pôle d'inertie, dont la période est de 300 j.

Nous avons cherché à nous rendre clairement compte et de ces formules, et de la raison qui a porté tant d'hommes éminents à adopter celles d'Oppolzer; nous croyons y être arrivé.

On a pensé à tort, et Tisserand lui-même a partagé cette opinion erronée (**), que l'axe instantané, mobile dans la Terre par le fait de la nutation eulérienne, n'est pas mobile dans l'espace du chef de cette même nutation, et que celle-ci, qui se traduit, pour l'axe d'inertie, par un mouvement d'une période de $1\frac{1}{300}$ j., n'a pour effet, sur le pôle instantané, que de lui faire décrire en 300 j. un petit cercle autour du pôle géographique.

Cet effet existe bien certainement, mais il n'est pas le seul.

Il semble que les astronomes contemporains, prenant l'axe d'inertie pour une ligne idéale, et non pas pour une succession de points matériels invariablement reliés aux autres points du corps, aient oublié complètement que le mouvement de cet axe n'est

---

(*) Dans l'Annuaire de l'Observatoire pour 1897 j'ai fait voir, p. 285, quelles sont les équations incorrectes qui servent de point de départ à Oppolzer pour l'établissement de ses formules: j'y reviendrai.

(**) Bulletin astronomique, 1890, pp. 273 et suivantes.

que la traduction analytique du mouvement de la Terre entière. Quand le pôle géographique se déplace dans l'espace par le fait d'une nutation quelconque, tout point de l'écorce terrestre se déplace exactement de la même quantité, puisqu'il est invariablement relié à ce pôle; le pôle instantané subit donc la même nutation que le pôle géographique, mais il a de plus, autour de ce dernier, un mouvement d'une période de 300 j.

Ce sont ces deux mouvements qu'expriment les formules III démontrées ci-dessus.

Voilà clairement exposée, pensons-nous, et sans aucun calcul, la raison pour laquelle la nutation eulérienne du pôle instantané, loin d'être plus simple, est plus compliquée que celle du pôle d'inertie. L'axe instantané, outre qu'il participe intégralement au mouvement de nutation de l'axe géographique, est animé, en plus, autour de celui-ci, d'un mouvement d'une période de 300 j.

Les astronomes ont cru que ce dernier mouvement était le seul effet de la nutation eulérienne sur le pôle instantané; et c'est pourquoi ils ont admis avec tant de facilité, et ce résultat de l'analyse erronée, mais très spécieuse, d'Oppolzer, et les développements de cette analyse, ne prêtant nulle attention aux critiques que je n'ai cessé d'en faire depuis dix ans (*).

J'espère, dans l'intérêt de la science et de la vérité, que cette dernière démonstration, accessible à tous, recevra un meilleur accueil.

3. Cherchons, au moyen des formules précédentes, à interpréter sainement le phénomène connu sous le nom de variation des latitudes.

Dans la discussion de cette question importante, nous admettrons que le pôle d'inertie est fixe. Des circonstances météorologiques (accumulation des neiges, grandes perturbations atmosphériques) peuvent en modifier la position, et produire, même dans la latitude géographique, des variations dont nous n'avons pas à nous occuper ici. Il en sera de même de celles qui sont dues aux déformations élastiques de l'écorce terrestre et aux déviations périodiques de la verticale.

(*) Bull. astr., 1890. Acta math., 1892. Astr. Nachr., 1893. Vierteljahrschrift, 1896 et 1900. Annuaire de l'Observatoire royal, 1891-1897. Bull. de l'Académie royale, 1892-1900.

La relation purement géographique

IV $$\Phi_1 - \Phi = \gamma \cos(\kappa - \zeta)$$

qui se tire du triangle PIL, κ désignant l'angle compris entre le méridien PL et le colure des solstices, sera la formule de la variation de la latitude astronomique Φ_1, la géographique Φ étant supposée constante.

Nous prendrons PL pour premier méridien; alors, pour un passage supérieur, nous aurons $\varphi = \alpha$.

La formule précédente doit concorder avec celle qui se déduit de I et de III en partant des relations

$$z = \Phi - \delta = \Phi_1 - \delta_1,$$

d'où

$$\Phi_1 - \Phi = \delta_1 - \delta = \Delta_e(\delta_1 - \delta),$$

la notation Δ_e représentant la nutation eulérienne.

De

$$\Delta\delta = \sin\alpha\Delta\theta + \cos\alpha\sin\theta\Delta\Psi$$

on tire très simplement, pour un passage supérieur

$$\varphi_1 - \Phi = \Delta_e\delta_1 - \Delta_e\delta = -\gamma\sin(\zeta + \alpha),$$

formule qui concorde avec la précédente si l'on fait

$$\kappa = 3\frac{\pi}{2} - \alpha.$$

Ce n'est donc pas parce que δ_1 est indépendant de la nutation eulérienne que la latitude astronomique en est indépendante, mais parce que $\delta_1 - \delta$ l'est, et est égal à $-\gamma\sin(\zeta + \alpha)$; d'où

$$\Phi_1 - \Phi = -\gamma\sin(\zeta + \alpha) = \gamma\cos(\zeta - \kappa).$$

De cette formule correcte, qui a été adoptée par les astronomes, et d'où l'on déduit une période de 300 j. pour la variation de la latitude *astronomique*, on ne peut donc nullement conclure que le pôle astronomique n'est pas soumis dans l'espace, tout comme le pôle géographique, à la nutation eulérienne.

Rien n'empêche certainement de continuer à faire usage de

la formule géographique IV, si l'on veut calculer les variations de la latitude astronomique, ou le mouvement du pôle astronomique à la surface de la Terre; mais on doit tenir compte de la nutation eulérienne dans le calcul de la déclinaison. Vérifions ce point.

La latitude astronomique se calcule, dans le cas le plus fréquent, au moyen de la formule

$$\begin{aligned} z &= \Phi_1 - \delta_1 \\ &= \Phi + \gamma \cos(\zeta - \kappa) - [\delta_m + \Delta\delta + \gamma \cos(\mu t + \beta_0) - \gamma \sin(\zeta + \alpha)] \\ &= \Phi - [\delta_m + \Delta\delta + \gamma \cos(\mu t + \beta_0)] = \Phi - \delta. \end{aligned}$$

Cette dernière expression $z = \Phi - \delta$ est celle de la latitude géographique. Et il nous a toujours paru qu'elle est beaucoup plus simple que la première $z = \Phi_1 - \delta_1$ (*).

Mais quant à ne tenir nul compte, comme le font les astronomes, de la nutation eulérienne en D, et surtout en AR, c'est commettre une erreur flagrante qui entraîne les conséquences les plus graves pour l'astronomie sphérique.

Formules incorrectes et formules correctes de l'astronomie sphérique de précision

1. Après avoir démontré, par la simple trigonométrie, que les formules relatives à l'axe instantané n'éliminent pas, à très peu près, comme Oppolzer a cru le prouver, et comme l'ont admis pendant vingt-cinq ans tous les astronomes, les termes diurnes de la nutation eulérienne, il ne sera pas hors de propos, pour l'édification complète de ceux-ci, de résumer ici les principaux arguments que j'ai invoqués, depuis plus de dix ans, contre l'analyse de l'astronome viennois (**).

Il importe, en effet, que le xxe siècle ne s'ouvre pas sur une erreur qui a été, depuis dix ans surtout, si funeste aux progrès de

(*) *Des préjugés en astronomie*, Bull. de l'Acad. 1892, n° 12.

(**) C. R. et Bull. astr., 1890. Acta math., 1892. Astr. nachr., 1893. Vierteljahrschrift, 1896 et 1900. Ann. de l'Observ. roy., 1893 à 1897. Bull. de l'Acad. de Bruxelles, 1892 à 1900.

l'astronomie sphérique, et l'a empêchée d'aborder résolument et correctement la vraie solution du grand problème à l'ordre du jour, celui de la variation des latitudes.

C'est pourquoi je me suis proposé tout simplement, dans le but de faire revenir les astronomes aux saines formules de la nutation, de leur montrer, en suivant pas à pas le texte d'Oppolzer, qui sert de base aux leurs, que ce texte renferme des erreurs flagrantes, et que c'est sur ces erreurs que reposent les conclusions de l'astronome viennois.

2. Je ferai usage de la traduction française, qui suit, du reste, page par page, le texte allemand.

Commençons par faire remarquer que toutes les formules d'Oppolzer se rapportent aux coordonnées orthogonales, et que, par conséquent, s'il veut prendre l'axe instantané, que j'appellerai Z″, pour axe de référence, il est obligé de lui adjoindre les axes orthogonaux X″ et Y″, dont le premier serait bien difficile à définir, puisqu'il est mobile dans le corps même. Or, il n'en est *jamais* question.

Il y a plus : l'angle φ, qui définit l'heure dans l'équateur géographique, devrait être remplacé par l'angle φ_1, compté dans l'équateur instantané. Or Oppolzer, lorsqu'il s'occupe de l'heure (p. 198), prend simplement l'angle φ, rapporté au pôle géographique.

Il définit donc l'heure relativement à l'axe principal, et la latitude relativement à l'axe instantané, contradiction qui suffit à infirmer tout son système.

L'AR, en effet, est mesurée par l'heure, c'est-à-dire, suivant Oppolzer même, dans l'équateur géographique, qui est soumis à la nutation eulérienne.

Donc, dans Oppolzer, l'AR n'est pas indépendante de cette nutation.

C'est un point capital qui lui a complètement échappé, ainsi qu'à tous les astronomes.

Pour la nutation eulérienne, il écrit, en effet, dans le système de l'axe instantané $\Delta\epsilon_1' = 0$, $\Delta\Psi_1 = 0$. D'où les astronomes ont conclu $\Delta\alpha = 0$, oubliant que, dans Oppolzer même, α est compté, non dans l'équateur instantané, mais dans l'équateur géographique, pour lequel la variation eulérienne en AR n'est pas nulle.

Montrons que cette contradiction n'est pas la seule.

Page 155, il dit que l'équateur est déterminé par le plan perpendiculaire à l'axe (instantané) de rotation, ce qui est déjà en contradiction avec la définition de la page 137; et il en conclut que les angles ϵ' et Ψ des formules (4) page 138, doivent se remplacer par ϵ'_1 et Ψ_1 relatifs à l'axe instantané; mais il oublie d'introduire en même temps φ_1 au lieu de φ, omission qui, du reste, n'infirme pas les calculs relatifs à la nutation, mais bien ceux qui se rapportent à l'expression de l'heure, comme il vient d'être dit.

Une chose m'étonne, c'est que des géomètres, comme Tisserand, se soient laissé influencer par cette idée que, puisque la Terre tourne autour d'un axe instantané, et non autour de l'axe géographique, c'est au premier qu'on *doit* rapporter les formules (*). Comme si le choix des axes n'était pas entièrement arbitraire, pourvu que les formules y relatives soient correctes!

3. Indépendamment des contradictions que je viens de signaler, il existe, dans le paragraphe : *Les mouvements de l'axe de rotation de la Terre*, une erreur tellement capitale qu'il ne reste absolument rien des conclusions de l'auteur, qui sont, comme je l'ai dit, les suivantes :

„ La nutation eulérienne de l'axe instantané est 300 fois plus faible que celle de l'axe principal. „

Ici, je suivrai l'auteur pas à pas.

Après avoir posé exactement (**) ses équations (4) page 156, il les transforme en les suivantes :

$$- \omega \sin \epsilon'_1 \frac{d\Psi_1}{dt} = \left\{ \sin\varphi \cos\epsilon' \sin(\Psi_1 - \Psi) + \cos\varphi \cos(\Psi_1 - \Psi) \right\} \frac{dp}{dt}$$

$$+ \left\{ \cos\varphi \cos\epsilon' \sin(\Psi_1 - \Psi) - \sin\varphi \cos(\Psi_1 - \Psi) \right\} \frac{dq}{dt},$$

(*) A la vérité, il ne donne que les formules relatives aux axes principaux, mais il confond l'axe Z′ avec l'axe instantané Z″, à cause de leur faible écartement, et définit la latitude relativement à ce dernier axe, tandis que ses formules se rapportent au premier, ce qui est une grave inconséquence. Pour lui, la nutation eulérienne n'est pas nulle; elle est simplement négligée comme insensible, de même que la nutation diurne.

(**) Pour autant qu'il soit licite, en mécanique, de passer simplement des axes principaux aux axes instantanés, qui sont mobiles à la fois dans le corps et dans l'espace.

$$\omega \frac{d\epsilon_1'}{dt} = \{ \sin\varphi [\cos\epsilon' \cos\epsilon_1' \cos(\Psi_1 - \Psi) + \sin\epsilon' \sin\epsilon_1'] - \cos\varphi \sin(\Psi_1 - \Psi) \cos\epsilon_1' \} \frac{dp}{dt}$$

$$+ \{ \cos\varphi [\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,] + \sin\varphi \sin(\Psi_1 - \Psi) \cos\epsilon_1' \} \frac{dq}{dt};$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \{ \sin\varphi [\cos\epsilon' \sin\epsilon_1' \cos(\Psi_1 - \Psi) + \sin\epsilon' \cos\epsilon_1'] - \cos\varphi \sin(\Psi_1 - \Psi) \sin\epsilon_1' \} \frac{dp}{dt}$$

$$+ \{ \cos\varphi [\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,] + \sin\varphi \sin(\Psi_1 - \Psi) \sin\epsilon_1' \} \frac{dq}{dt},$$

et il ajoute :

« Puisque p et q sont de l'ordre... de l'inclinaison de l'axe » instantané on peut regarder leurs dérivées comme des quantités » du premier ordre... »

Rien de plus faux.

Abstraction faite des forces perturbatrices, on a, en effet, en désignant $\frac{C-A}{A}$ par i :

$$\left.\begin{aligned} p &= \xi_0 \cos nit + \eta_0 \sin nit\,, \\ q &= \xi_0 \sin nit - \eta_0 \cos nit\,. \end{aligned}\right\} \quad (4)\ \text{p. } 156.$$

De là

$$\frac{dp}{dt} = ni \{ -\xi_0 \sin nit + \eta_0 \cos nit \},$$

$$\frac{dq}{dt} = ni \{ \quad \xi_0 \cos nit - \eta_0 \sin nit \}.$$

Or, $i = \frac{1}{300}$ environ ; mais sa petitesse est déjà compensée par le facteur $n = 2\pi$, vitesse de rotation de la Terre.

Il est donc absurde de prétendre que $\frac{dp}{dt}$ et $\frac{dq}{dt}$ sont des quantités du premier ordre, à moins qu'on ne considère p et q elles-mêmes comme telles, ce qui serait préjuger entièrement la question.

Allons même jusqu'à admettre qu'il en soit ainsi : $\sin(\Psi_1 - \Psi)\frac{dp}{dt}$ sera donc un terme du second ordre ; mais qui osera prétendre qu'il est négligeable, sachant, à priori, que $\sin(\Psi_1 - \Psi) = F \times t$, F désignant une fonction de période eulérienne ?

Tout au plus peut-on admettre que les produits de sin $(\epsilon_1' - \epsilon')$ par $\frac{dp}{dt}$ et $\frac{dq}{dt}$ sont négligeables; alors les formules précédentes se réduiront à

$$\omega \sin \epsilon_1' \frac{d\Psi_1}{dt} - \cos \epsilon' \sin (\Psi_1 - \Psi) \left\{ \sin \varphi \frac{dp}{dt} + \cos \varphi \frac{dq}{dt} \right\} + \cos \varphi \frac{dp}{dt} - \sin \varphi ;$$

$$\omega \frac{d\epsilon_1'}{dt} = \sin \varphi \frac{dp}{dt} + \cos \varphi \frac{dq}{dt} - \cos \epsilon_1' \sin (\Psi_1 - \Psi) \left\{ \cos \varphi \frac{dp}{dt} - \sin \varphi \frac{dq}{dt} \right\} ;$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \qquad - \sin \epsilon_1' \sin (\Psi_1 - \Psi) \left\{ \cos \varphi \frac{dp}{dt} - \sin \varphi \frac{dq}{dt} \right\} ,$$

en posant cos $(\epsilon_1' - \epsilon')$ et cos $(\Psi_1 - \Psi)$ égaux à l'unité, c'est-à-dire en négligeant, dans la seconde de ces égalités, les termes en t^2.

On n'a donc pas, comme l'écrit Oppolzer,

$$- \omega \sin \epsilon_1' \frac{d\Psi_1}{dt} = \cos \varphi \frac{dp}{dt} - \sin \varphi \frac{dq}{dt};$$

$$\omega \frac{d\epsilon_1'}{dt} = \sin \varphi \frac{dp}{dt} + \cos \varphi \frac{dq}{dt};$$

$$\frac{d\omega}{dt} = 0;$$

et puisque ω n'est pas constant, on ne peut pas, comme il le fait, intégrer $\omega \frac{d\epsilon_1'}{dt}$, $\omega \sin \epsilon_1' \frac{d\Psi_1}{dt}$, qui renferment, au surplus, si même on néglige les termes en t^2, les termes

$$\cos \epsilon' \sin (\Psi_1 - \Psi) \left\{ \sin \varphi \frac{dp}{dt} + \cos \varphi \frac{dq}{dt} \right\}$$

$$- \cos \epsilon_1' \sin (\Psi_1 - \Psi) \left\{ \cos \varphi \frac{dp}{dt} - \sin \varphi \frac{dq}{dt} \right\}$$

négligés par lui, et qui ne sont nullement négligeables, comme nous l'avons démontré ci-dessus.

Toutes les conclusions d'Oppolzer, reposant sur la négligence des produits de sin $(\Psi_1 - \Psi)$ et de sin $(\epsilon_1' - \epsilon)$ par $\frac{dp}{dt}$ et $\frac{dq}{dt}$, sont donc radicalement fausses.

4. Il serait peut-être superflu d'aller plus loin.

Essayons toutefois de jeter quelque lumière sur les conséquences des formules précédentes.

Nous occupant exclusivement de la nutation eulérienne, nous écrirons, au lieu des expressions un peu compliquées d'Oppolzer, rappelées ci-dessus

$$p = -\gamma_1 \cos(nit + \beta) + \&,$$

$$q = -\gamma_1 \sin(nit + \beta) + \&;$$

d'où

$$\frac{dp}{dt} = ni\gamma_1 \sin(nit + \beta) + \&.$$

$$\frac{dq}{dt} = -ni\gamma_1 \cos(nit + \beta) + \&;$$

$$\sin\varphi \frac{dp}{dt} + \cos\varphi \frac{dq}{dt} = -ni\gamma_1 \cos(nit + \beta + \varphi) + \&$$
$$= -ni\gamma_1 \cos[n(1 + i)t + \beta_1] + \&;$$

$$\cos\varphi \frac{dp}{dt} - \sin\varphi \frac{dq}{dt} = ni\gamma_1 \sin(nit + \beta + \varphi) + \&$$
$$= ni\gamma_1 \sin[n(1 + i)t + \beta_1] + \&,$$

les & représentant l'ensemble des termes provenant des forces perturbatrices.

Il en résulte, en posant $ni\gamma_1 = \Gamma$ et $n(1 + i) = n_1$:

$$-\frac{1}{\Gamma}\omega \sin\epsilon_1' \frac{d\Psi_1}{dt} = -\cos\epsilon' \sin(\Psi_1 - \Psi)\cos(n_1 t + \beta) + \sin(n_1 t + \beta) + \&$$

$$\frac{1}{\Gamma}\omega \frac{d\epsilon_1'}{dt} = -\cos(n_1 t + \beta) - \cos\epsilon_1' \sin(\Psi_1 - \Psi)\sin(n_1 t + \beta) + \&$$

$$\frac{1}{\Gamma}\frac{d\omega}{dt} = -\sin\epsilon_1' \sin(\Psi_1 - \Psi)\sin(n_1 t + \beta) + \&.$$

Nous n'aborderons pas l'intégration extrêmement compliquée de ces équations, et nous nous bornerons à faire remarquer que Ψ_1 renfermera des termes périodiques multipliés par le temps.

En considérant ω et ϵ'_1 comme constants dans une première approximation, on pourra écrire, en effet :

$$A \frac{d\Psi_1}{dt} = F \cos \Psi_1 \sin \Psi + \ldots$$

A désignant une constante, F une fonction périodique eulérienne.

Sin Ψ pourra se remplacer par ct, c désignant la constante de la précession luni-solaire ; alors

$$A \frac{d\Psi_1}{\cos \Psi_1} = F \times ct\, dt + \ldots$$

d'où, en intégrant :

$$\frac{A}{2}\, l \left(\frac{\pi}{4} + \Psi_1\right) = c \int F \times t\, dt.$$

Cette dernière intégrale, à raison du caractère périodique eulérien de F, donnera des termes de même période multipliés par le temps.

On voit confirmé ainsi, par l'analyse même d'Oppolzer rectifiée, le fait de l'existence, dans Ψ_1, de ces termes qui font absolument défaut dans son traité, p. 157, parce qu'il a négligé les produits de $\sin (\Psi_1 - \Psi)$ par $\frac{dp}{dt}$ et $\frac{dq}{dt}$.

5. Ainsi donc :

1° Les équations (5) p. 156, sont fausses, parce que l'astronome viennois a négligé les produits de $\sin (\epsilon'_1 - \epsilon_1)$ et de $\sin (\Psi_1 - \Psi)$ par $\frac{dp}{dt}$ et $\frac{dq}{dt}$; or ces dérivées ne sont nullement très petites, et, de plus, $\sin (\Psi_1 - \Psi)$ renferme des termes très petits, à la vérité, mais qui sont multipliés par le temps.

2° Les deux premières des équations (5) fussent-elles admissibles (ce qui reviendrait à négliger le mouvement du nœud de l'équateur instantané) on ne pourrait pas encore les intégrer, à

cause du facteur ω qui multiplie $\frac{d\epsilon_1'}{dt}$ et sin $\epsilon_1' \frac{d\Psi_1}{dt}$, facteur qui n'est nullement constant.

3° Et c'est l'un des plus graves reproches qu'on puisse faire au procédé d'Oppolzer, l'heure y est absolument indéfinissable.

L'expression de celle-ci doit être, suivant les notations d'Oppolzer

$$\frac{d\theta_1}{dt} = \omega - \cos \epsilon_1' \frac{d\Psi_1}{dt},$$

et non, comme il l'écrit,

$$\frac{d\theta}{dt} = r - \cos \epsilon \frac{d\Psi}{dt} \qquad (1), \text{ p. } 198,$$

équation relative aux axes principaux, qui ne sont pas ses axes de référence.

Or quelle est l'expression de ω? Ensuite, quelle est celle de Ψ_1, qui renferme, *à priori,* un terme périodique eulérien multiplié par le temps, provenant du mouvement du nœud de l'équateur instantané? L'heure θ_1 comptée dans l'équateur instantané, à supposer même qu'on connût $\int \omega \, dt$ et Ψ_1, est donc absolument inacceptable pour l'astronomie, parce que Ψ_1 renferme un terme périodique multiplié par le temps (*).

6. Nous ne poursuivrons pas davantage cette étude, notre but étant simplement de démontrer aux astronomes l'incorrection des formules d'Oppolzer, et non de remplacer ces formules, relatives à l'axe instantané, par d'autres formules correctes relatives au même axe.

(*) Indépendamment de ces termes multipliés par le temps, il en existe, à priori, un autre (même s'il n'y a pas de forces perturbatrices) moins aisé à déduire de l'analyse d'Oppolzer.

On en trouvera l'expression dans l'équation (K), n° 146 du *Traité de mécanique* de Poisson :

$$d\Psi = -\frac{h - Cr^2}{k^2 - C^2r^2} kdt, \text{ d'où il résulte immédiatement}$$

$$\Delta\Psi = ckt$$

si ϵ, vitesse angulaire autour de z, est constant.

Ces formules correctes, on l'a vu au commencement de cette note, renferment les termes mêmes de la nutation eulérienne rapportée à l'axe d'inertie, en plus de ceux qui proviennent du mouvement du pôle instantané autour du pôle d'inertie.

Elles n'atteignent donc nullement le but qu'avait visé Oppolzer, l'élimination de ces premiers termes, à période diurne, et l'on doit en revenir aux formules de Laplace, rapportées aux axes principaux, en les adaptant à l'écorce solide du globe.

Ces formules sont rigoureuses autant qu'il est nécessaire pour la pratique la plus exigeante; elles sont, du reste, les seules qu'aient adoptées tous les géomètres qui ont traité *ex professo* la question, depuis Euler et Laplace jusques et y compris Tisserand.

Elles permettent enfin de définir une heure *rigoureusement* (*) uniforme, tandis que, dans le système de l'axe instantané, son expression renfermerait des termes périodiques multipliés par le temps.

C'est à elles qu'on reviendra.

Nous osons espérer que les astronomes qui ont à cœur les progrès de la science et leur propre renommée, abandonneront enfin des formules dont la fausseté leur sautera aux yeux après la lecture de ces pages.

7. Dans l'état actuel de la science, les formules relatives à une Terre rigide, exposées par tous les géomètres, sont devenues absolument insuffisantes. C'est sur celles du mouvement de rotation de l'écorce solide de la Terre que doit reposer l'astronomie sphérique du XXe siècle.

8. Voici quelles sont les formules de la nutation, aussi complètes que nous avons pu les établir jusqu'à ce jour, pour l'écorce terrestre (**) :

(*) Voir *Revision des constantes de l'astronomie stellaire*, p. 93 et *Catéchisme correct d'astronomie sphérique* (Extrait des MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE PONTIFICALE DES NUOVI LINCEI).

(**) *Théorie du mouvement de rotation de l'écorce solide du globe.* Bruxelles, 1898. Dans cet ouvrage on trouvera les expressions correctives des coefficients des termes solaires pour l'écorce terrestre.

On trouvera également, dans notre *Revision des constantes de l'astronomie stellaire*, Bruxelles, 1896, des termes du second ordre dont on ne s'est pas encore occupé.

$$\Delta\theta = N_\theta + \gamma'' \sin(\beta_0'' - \beta' t) + \gamma \sin(\varphi + \beta t + \beta_0) + \gamma' \sin(\varphi + \beta' t + \beta_0')$$
$$+ \nu \{\Sigma_1 \cos 2\varphi + \Sigma_2 \sin 2\varphi\}$$
$$- i \sin(\varphi + I) \cos(\Theta - A).$$

$$\sin\theta\Delta\Psi = N_\psi + \gamma'' \cos(\beta_0'' - \beta' t) + \gamma \cos(\varphi + \beta t + \beta_0) + \gamma' \cos(\varphi + \beta' t + \beta_0')$$
$$+ \nu [-\Sigma_1 \sin 2\varphi + \Sigma_2 \cos 2\varphi]$$
$$- i \cos(\varphi + I) \cos(\Theta - A).$$

N_θ et N_ψ désignent les termes connus de la nutation générale;
γ, γ', γ'', β_0, β_0', β_0'' sont des constantes arbitraires;

Les termes en γ représentent la nutation eulérienne, d'une période de 300 jours environ, qui est commune à l'écorce et au noyau.

Ceux en γ' et en γ'' la nutation chandlérienne, d'une période de 430 jours environ, qui est propre à l'écorce seule.

Les termes en ν représentent la nutation que nous avons appelée *nutation diurne*. Nous avons trouvé

$\Sigma_1 = - 1{,}155 - 0{,}135 \cos ☊ + 0{,}36 \cos 2\Theta + 0{,}84 \cos 2 ☾;$

$\Sigma_2 = - 0{,}18 \sin ☊ + 0{,}39 \sin 2\Theta + 0{,}88 \sin 2 ☾;$

$\nu = 0'',067;$

$\varphi = \lambda + \tau$, τ désignant l'heure sidérale de l'observation (*);

$\lambda = 2^h,15^m + l$, l étant la longitude de l'Observatoire à l'ouest de Greenwich.

Le terme en i, provenant du déplacement du pôle d'inertie de l'écorce terrestre dû aux circonstances météorologiques (**) indique, à proprement parler, une variation *réelle* de la latitude. Pour l'uniformité des formules, nous l'avons considéré comme

(*) Voir mes déterminations de ces constantes dans la *Revision des constantes de l'astronomie stellaire*, pp. 38-61.
(**) *Essai sur les variations de latitude*, 1893.

une nutation du pôle géographique (variable) autour de sa position moyenne.

Une autre cause occasionnera également des variations *réelles* de la latitude géographique : c'est l'élasticité de l'écorce terrestre, dont il devra être tenu compte (*).

Une dernière influence enfin doit également être étudiée : celle des déviations périodiques de la verticale, qui proviennent de la non coïncidence des centres de gravité de l'écorce et du noyau, et dont les termes auront pour argument $(-\varphi + \Theta + B)$ (**).

Quand on possédera les formules relatives à ces deux derniers points, on pourra, au moyen des observations tant en AR qu'en déclinaison, déterminer les nombreuses constantes qui interviennent dans les termes complémentaires des formules usuelles, et l'on aura l'explication intégrale du phénomène connu sous le nom de variation des latitudes.

A l'inspection seule des formules précédentes, on voit immédiatement que le procédé qui permet d'arriver le plus commodément au but consiste dans l'observation des circompolaires à leurs passages supérieur et inférieur consécutifs.

Au passage supérieur on a en effet

$$\varphi = \lambda + \alpha$$

au passage inférieur

$$\varphi = \lambda + \alpha \pm \pi.$$

En sorte que dans $\Delta_s\theta + \Delta_i\theta$, de même que dans $\Delta_s\Psi + \Delta_i\Psi$, $\Delta_s\delta + \Delta_i\delta$, $\Delta_s\alpha + \Delta_i\alpha$, tous les termes diurnes (en γ, γ', i) disparaissent; tandis que dans $\Delta_s\delta - \Delta_i\delta$, $\Delta_s\alpha - \Delta_i\alpha$ tous les autres disparaissent, et les termes diurnes sont doublés.

On reviendra à ce mode d'observation, un peu trop abandonné aujourd'hui, quand on aura médité les formules précé-

---

(*) Voir sur ce sujet. *G. Darwin : On bodily tides on viscons and semielastic speroïds.*

(**) *Quelques grandes phases dans l'histoire de l'astronomie.* Bruxelles, 1898.

dentes, qui, tout incomplètes qu'elles sont encore, rendront cependant déjà de très grands services à l'astronomie sphérique de précision (*).

(*) Dans notre *Vérification pratique des mouvements de l'écorce terrestre*, nous avons déduit les périodes eulérienne et chandlérienne de la comparaison des observations en AR de Struve (1823) tant avec celles en AR de Lindhagen, qu'avec celles de Peters en déclinaison (1843), et nous avons déduit de ces dernières l'existence de notre chandlérien rétrograde en γ''.

La première de ces recherches démontre *pratiquement* l'incorrection des formules d'Oppolzer, qui nient l'influence de la nutation eulérienne (ou de la chandlérienne) en AR; l'une et l'autre, les progrès qu'on peut attendre de l'emploi de nos formules.

Voir également notre *Vérification de l'existence de la nutation eulérienne dans les latitudes observées à Greenwich pendant les années 1880-1891* et *Sur les nutations eulérienne et chandlérienne d'après les latitudes déterminées à Poulkovo* (Bulletin de l'Académie r. de Belgique, 1898 et 1900).

L'ETHNOGRAPHIE

PAR

J. VAN DEN GHEYN, S. J.

De toutes les études qui, si nombreuses et si diverses, sollicitent l'activité de l'esprit humain, une des plus attrayantes est, sans contredit, l'ethnographie, ou la science des peuples.

Mais, d'autre part, il n'y en a peut-être pas de plus ardue, surtout à cause de la variété et de la complexité des problèmes à résoudre.

Aussi les ethnologistes ressentent-ils impérieusement la nécessité de donner à leurs recherches des règles fixes et de s'inspirer de principes de critique nettement définis et, autant que possible, universellement admis.

Cette préoccupation se fait jour partout. Les travaux de méthodologie surgissent de tous côtés, les essais de synthèse se multiplient; en un mot, il y a un visible effort d'orientation pour tracer aux ethnographes la voie la plus courte et la plus sûre à suivre dans leurs investigations.

Comme bien on pense, ce n'est pas sans controverses ni discussions que s'opérera la fixation définitive des principes d'ethnographie. Précisément, parce qu'elle est tributaire d'un grand nombre d'autres disciplines, où règnent des tendances d'écoles souvent opposées, elle se verra, quelque temps encore, obligée d'attendre que l'accord se soit établi entre les auxiliaires qui doivent lui fournir léur appoint.

Le premier point à éclaircir et à délimiter, c'est l'objet même de la science ethnologique. Il y a, en effet, une façon de comprendre l'ethnographie qui n'a rien de scientifique, et il s'agit précisément de savoir comment l'ethnologie se distingue de l'anthropologie, de la préhistoire, de l'histoire des institutions, de la psychologie des peuples *(Völkerpsychologie)*, de l'étude des civilisations *(Kulturgeschichte)*, du folk-lore, de l'histoire des religions, et de bien d'autres sciences similaires.

Je viens de parler d'une ethnographie qui ne serait pas scientifique; c'est celle qui est purement descriptive, qui se borne à rassembler des faits, sans en rechercher les lois, sans remonter aux origines, sans établir les rapports. C'est de celle-là que M. Keane a pu dire que l'ethnographie ressortit davantage à la littérature qu'à la science.

Quant à circonscrire le champ d'observations et de recherches de l'ethnologiste, cela semble moins aisé qu'on pourrait le croire à première vue. En effet, si l'on interroge les principaux maîtres de l'ethnographie, on demeure surpris du nombre des théories aussi variées que divergentes qu'ils énoncent.

Ainsi ni Waitz en 1859, dans son *Anthropologie der Naturvölker*, ni Oscar Peschel, dans sa *Völkerkunde* (Leipzig, 1875), ne se rendent exactement compte de la différence, pourtant essentielle, de l'anthropologie et de l'ethnographie. La même confusion subsiste encore dans les travaux de deux écrivains anglais plus récents, Edward B. Taylor et A. H. Keane. Le premier a publié en 1881 un ouvrage intitulé *Anthropology*, avec le sous-titre : *An introduction to the study of Man and Civilisation*, et du second, nous avons un livre fort intéressant appelé *Ethnology*. Eh bien, le traité d'anthropologie de M. Taylor est plutôt un manuel d'ethnographie, tandis que l'*Ethnology* de M. Keane s'occupe avant tout d'anthropologie et de science préhistorique.

G. Gerland, le continuateur de Waitz, dans ses *Anthropologische Beiträge* (Halle, 1875) et surtout Frédéric Müller (*Allgemeine Ethnographie,* Wien 1879), établissent nettement la distinction à faire entre l'anthropologie et l'ethnographie. La première étudie l'homme pris en lui-même, surtout dans ses caractères somatologiques, l'ethnographie s'occupe de l'homme vivant en société, constituant des nations et des peuples.

Toutefois, il ne suffit pas, pour l'ethnologiste, d'une étude quelconque des peuples, ni même de tous les peuples. Et sur ce point surtout, quelques auteurs ont singulièrement rétréci le rôle de l'ethnographie. Un très grand nombre, et non des moins illustres, veulent que les recherches de l'ethnographie portent principalement sur les peuples primitifs, ceux que les Allemands appellent *Naturvölker*.

C'est Bastian, le Nestor des ethnographes allemands, qui a le plus carrément affirmé cette théorie. " Nous n'avons pas, dit-il, à nous occuper des peuples historiques, Égyptiens, Assyriens, Babyloniens, Grecs, Romains, Germains, Hindous et Chinois. L'effort spécial de l'ethnographie doit porter sur les peuples primitifs, sur ceux qui n'ont pas laissé de documents écrits et pour lesquels les musées fournissent les textes. Tout au plus les peuples historiques peuvent-ils entrer en ligne de compte pour leur résidu archaïque qui fournit matière à des comparaisons avec les races primitives (*) ".

Une opinion toute semblable était déjà défendue par H. Steinthal en 1864 (**). Pour lui la philologie et l'histoire ont à s'occuper des peuples historiques, tandis que l'ethnologie est la science qui étudie les peuples primitifs.

Frédéric Ratzel, qui a écrit en ces derniers temps des pages curieuses sur l'*Anthropogéographie* (***), est aussi l'auteur de trois volumes de *Völkerkunde* (Leipzig, 1[re] éd. 1885; 2[e] éd. 1894). Pour lui aussi, l'ethnologiste se préoccupera surtout des peuples primitifs. Il en donne deux raisons, la première, c'est que d'autres études ont déjà fait connaître en détail les nations civilisées, et la seconde, c'est que les recherches sur les peuples les moins élevés en civilisation permettent de tracer les étapes diverses par lesquelles l'humanité passe pour arriver à son évolution dernière.

Voici comment M. Deniker (IV) définit l'objet des recherches de l'ethnographie et son domaine propre.

(*) *Allgemeine Grundzüge der Ethnologie*, Berlin, 1884, p. IX.

(**) *Philologie, Geschichte und Psychologie in ihren gegenseitigen Beziehungen*, pp. 28, 32.

(***) *Der Ursprung und das Wandern der Volker geographisch betrachtet.* BER. VERH. DER SACHS. GES. WISS. Philol. hist. Classe, t. I, p. 1-75.

(IV) J. Deniker, *Les Races et les Peuples de la terre*, Paris, 1900, p. 10-13.

On constate dans les groupes ethniques, peuples, nations ou tribus :

1° Des différences de langage, de mœurs et de genre de vie.

2° Des ressemblances de type physique dans deux, trois ou plusieurs groupes ethniques parfois assez éloignés l'un de l'autre par l'habitat.

3° Au sein d'un même groupe, des variations de type physique si notables qu'on admet pour en expliquer la formation le mélange de plusieurs unités somatologiques distinctes.

Ces unités sont ce que les ethnologistes appellent les *races*, caractérisées par un ensemble de traits somatologiques qui jadis s'est trouvé dans une réunion réelle d'un certain nombre d'individus, mais qui aujourd'hui s'est éparpillé par fragments, à doses variables, dans divers groupes ethniques, dont on ne peut plus le dégager que par une analyse délicate.

Les différences entre les races résultent de la lutte continuelle dans l'individu de deux facteurs, la variabilité et l'hérédité. Ces différences affectent les formes extérieures, structure anatomique ou fonctions physiologiques; elles se manifestent dans les *individus*.

L'ethnographie étudie ces deux catégories de caractères, soit en général, soit dans leur ensemble, soit en décrivant successivement les différents peuples pour essayer de délimiter les races constituant les groupes ethniques et pour esquisser les relations réciproques et les rapports des groupes entre eux.

L'ethnologie devrait s'occuper des sociétés humaines sous tous les rapports, mais comme l'histoire, l'économie politique, etc., se sont déjà emparées de l'étude des peuples civilisés, il ne lui reste que les peuples sans histoire ou ceux que les historiens n'ont pas suffisamment étudiés.

M. Steinmetz, l'ethnologiste hollandais, a, dans l'introduction de son grand ouvrage sur l'évolution de la peine (Leyde et Leipzig, 1894, t. I, p. xi sqq.), défini l'objet de l'ethnographie et ses rapports avec d'autres sciences. « L'ethnologie, dit-il, est l'étude comparée de toutes les manifestations de la vie sociale des peuples primitifs, dans le but de fixer les lois de l'évolution et de l'apparition de ces phénomènes et arriver ainsi à leur exacte conception. »

On le voit, c'est toujours la théorie de Bastian qui domine, et

nous la retrouvons encore dans l'ouvrage d'Achelis *(Moderne Völkerkunde, deren Entwickelung und Aufgeben,* p. 300 sqq. Stuttgart, 1896). " Le vaste domaine des peuples civilisés, écrit-il, échappe à l'ethnographe; il doit se tourner vers les peuples à l'état de nature et chercher à dégager de leur étude les rapports organiques qui les unissent aux races les plus élevées et fournissent l'explication de notre propre civilisation. "

Que faut-il penser de cette thèse qui restreint les travaux ethnologiques aux peuples non civilisés? Le poids de noms scientifiques, comme ceux de MM. Bastian, Steinthal, Deniker, Ratzel, Steinmetz et Achelis, doit-il suffire à faire pleine et entière autorité, et l'ethnographe est-il obligé, sous peine de manquer à sa vraie mission, de se rallier à la manière de voir de ces maîtres éminents?

Nous ne le croyons pas, et à notre humble avis, la thèse que nous venons de signaler ne s'imposera pas sans conteste; nous dirons tout à l'heure qu'elle est rudement battue en brèche, et sans vouloir escompter l'avenir, nous pensons que le domaine de l'ethnographie gardera toute son étendue et aura, sans qu'on lui dispute ce droit, à s'occuper de tous les peuples, historiques ou primitifs, civilisés ou sauvages.

On peut en effet formuler contre la théorie que nous examinons une double objection préalable, dont la solution ne sera pas aisée à trouver.

Et d'abord, la distinction entre peuples historiques et primitifs apparaît bien arbitraire. Il est peu aisé, quand on entre dans le détail, d'appliquer la définition de peuple historique. Pour ne citer qu'un exemple, que faire des Hindous et des Chinois? Ces nations n'ont pas d'histoire proprement dite, et pourtant on ne saurait leur appliquer l'épithète de peuples primitifs. De plus, pour tous les peuples, il y a, à l'aube de leur existence, une période plus ou moins longue de siècles, où ils ont vécu ce que l'on peut bien appeler une vie et une civilisation très primitives. Dès lors et Romains et Grecs, Égyptiens et Assyriens, Germains et Gaulois seraient donc, du moins pour les premières époques, pour celles qui ont précédé l'histoire, tributaires de l'ethnographie, en vertu même de la théorie qui veut les exclure.

Aussi n'est-il pas surprenant de voir M. Ratzel contredire, en

pratique, les principes de la théorie. Presque immédiatement après avoir établi, au point de vue des études ethnographiques, la distinction des peuples historiques et de ceux qui sont en dehors de l'histoire, il écrit (*) : « Le temps n'est pas éloigné où l'on ne pourra plus écrire d'histoire universelle, sans s'occuper des peuples que l'on considérait jusqu'à ce jour comme n'ayant pas d'histoire, parce qu'ils n'ont laissé ni textes écrits ni documents gravés sur la pierre. L'histoire est dans les faits. Qu'importe après tout qu'ils soient décrits ou non, et combien est secondaire auprès de la réalité du fait et de l'action la parole qui les expose ! »

En d'autres termes, M. Ratzel efface, pour l'historien, la distinction entre peuples cultivés et races primitives, qu'il veut maintenir pour les ethnographes.

La seconde objection qu'on peut opposer à la règle d'exclusion des nations historiques du domaine des études d'ethnologie est celle-ci. Personne ne nie que l'ethnologie tend surtout à rechercher les lois qui, chez divers peuples, ont présidé au développement des mœurs, des institutions, des rites, des usages.

Eh bien, au point de vue de ces lois, pourquoi exclure les nations cultivées? Les lois en question partent du fonds même de l'humanité, il faut donc la considérer tout entière. D'ailleurs, la distinction dont nous nous occupons, semble procéder de l'idée que les lois du développement en question pourraient être différentes chez les peuples dits historiques et ceux qui se présentent à nous sans annales. Or ce principe n'est nullement démontré, et ne saurait l'être.

Nous avons dit que la méthode d'ethnographie patronnée surtout par des savants allemands Bastian, Steinthal, Ratzel, Steinmetz, Achelis, auxquels s'est rallié naguère M. Deniker, n'était pas cependant universellement admise, malgré la grande vogue dont elle jouit.

Il y a neuf ans, en 1892, l'anthropologiste américain, Daniel S. Brinton, dans sa classification des sciences anthropologiques, assigne à l'ethnologie (**), qu'il appelle *anthropologie historique et*

(*) *Völkerkunde*, 2e éd. 1894, t. I, p. 5.
(**) Voir *Globus*, t. LXIII, 1893, p. 359.

analytique, le vaste champ de recherches ainsi défini : 1. Sociologie, 2. Technologie, 3. Religion, 4. Linguistique, 5. Folk-lore, sans distinction ni exclusion d'aucune sorte de peuple.

Un autre américain, M. W. Z. Ripley, dans sa Bibliographie de l'anthropologie et de l'ethnologie de l'Europe (*), donne place parmi les ouvrages ethnographiques, aux travaux sur les Aryens, les Celtes, les Ligures et autres peuples historiques.

Une critique très vive du système que nous examinons a été faite par M. F. S. Krauss (**). Il combat spécialement les vues de M. Steinmetz, et voici comment il s'exprime : " Si nous nous en tenons à ce que dit M. Steinmetz des peuples non historiques, il faut renoncer à toute ethnographie scientifique. En effet, où vivent, dans le vaste univers, des peuples non historiques? Qui les a visités? Qui donc s'est entretenu avec des membres d'un pareil peuple? Même les peuples les moins civilisés que l'on a découverts possèdent un langage, et dès lors qu'une race a sa langue propre, elle a son histoire. C'est une conception étroite, une idée préconçue que les peuples, pour posséder une littérature et des annales historiques, ne sont plus susceptibles d'être soumis à des recherches ethnologiques. Comme si l'existence accidentelle de trente histoires littéraires et d'une encyclopédie en 2000 volumes, comme les Chinois se vantent d'en avoir, pouvait arrêter tout à coup en certaines régions les lois du développement qui régissent l'humanité tout entière. Le livre a-t-il donc la force mystérieuse qui détermine les nations à se former de telle ou telle façon? C'est exagérer à plaisir l'influence des livres et des bibliothèques que de distinguer au point de vue ethnographique les peuples en historiques et non historiques, alors que la nature des choses est muette à cet égard. "

Dans un article récent (***), M. le Dr M. Winternitz, de Prague, a clairement fait voir que les recherches de l'ethnographie doivent

(*) Boston, 1899, p. VII.

(**) VOLLMÖLLERS KRITISCHE JAHRESBERICHT ÜBER DIE FORTSCHRITTE DER ROMANISCHE PHILOLOGIE, t. IV, 1899, III, p. 34 sqq.

(***) *Völkerkunde, Volkskunde und Philologie,* dans GLOBUS, t. LXXVIII, 15 et 22 décembre 1900, pp. 345-50, 370-77. Voir, pour le point spécial que nous discutons ici, p. 373.

porter sur tous les peuples sans exception et que tous peuvent lui fournir des données pour l'objet propre de ses études.

Celles qu'apportent les peuples primitifs ou à demi civilisés sont évidemment très importantes, puisqu'elles permettent souvent de saisir à sa naissance ou au premier stade de son développement une institution, une coutume, une croyance.

Quant aux peuples civilisés d'aujourd'hui, l'ethnographie doit interroger avec soin leurs légendes, leurs superstitions, leurs usages, leurs chants populaires, proverbes, contes et dictons, qui contiennent bon nombre de souvenirs du passé, et ce que l'on a appelé le *folk-lore* doit faire partie intégrante de l'ethnographie.

Les peuples civilisés de l'antiquité doivent aussi être mis à contribution, et les ressources dont disposent, dans cet ordre de recherches, la philologie et la science de l'antiquité classique et orientale, ne peuvent être négligées par l'ethnologue.

En un mot, M. Winternitz demande qu'aux études complètes de l'ethnologie concourent simultanément, et dans la mesure qui leur est propre :

1. L'ethnographie qui recueille et décrit les conditions sociales des peuples primitifs ou a demi civilisés, qui existent encore aujourd'hui ;

2. La *Volkskunde,* qui dans les usages et les institutions des nations cultivées d'aujourd'hui recherche les restes de la civilisation du passé.

3. La philologie et la science de l'antiquité qui nous initient à la civilisation des peuples anciens.

Nous croyons qu'il faut se rallier à ces vues si justes, et avec MM. Brinton, Ripley et Winternitz, nous estimons que l'ethnologie, si elle veut atteindre le résultat complet de ses recherches, n'a pas, comme le prétend certaine théorie, à se restreindre aux seuls peuples encore à l'état sauvage.

Il est un autre point de méthode ethnologique sur lequel il importe que les idées soient nettement fixées, c'est celui de la part qu'il convient de faire en ethnologie à une science surtout cultivée en Allemagne et qui s'appelle la psychologie sociale, *Völkerpsychologie.*

En 1860, M. Lazarus et H. Steinthal fondaient la Revue Zeit-

SCHRIFT FÜR VÖLKERPSYCHOLOGIE, qui est continuée depuis 1891 par Karl Weinhold sous un nouveau titre : ZEITSCHRIFT DES (BERLINER) VEREINS FÜR VÖLKSKUNDE. Plus récemment, M. Wundt a publié un grand travail sur la psychologie des peuples : *Völkerpsychologie,* avec le sous-titre : *Eine Untersuchung der Entwickelungsgeschichte von Sprache, Mythen und Sitte.* Recherches sur les lois de l'évolution du langage, des mythes et des usages.

L'accueil fait à la nouvelle science fut plutôt froid. Hermann Paul combattit fortement le concept même de la psychologie des peuples (*) et M. Steinmetz alla jusqu'à dire que la *Völkerpsychologie* était un pitoyable avortement (**).

Il est sûr que Lazarus et Steinthal donnèrent à la psychologie des peuples une extension trop considérable, et bien des articles de leur revue ne rentrent d'aucune façon dans le titre qu'elle porte. De plus, ils n'ont jamais défini avec netteté ce qu'il fallait entendre par psychologie des peuples. Dans le premier numéro de la revue de M. Weinhold, qui allait continuer son œuvre, Steinthal consacre encore un article à la *Völkerpsychologie.* Là même, après trente années de travaux sur la matière, il n'aboutit qu'à établir l'identité passablement obscure de la psychologie sociale avec la connaissance scientifique des peuples (***).

M. Wundt a, lui, nettement établi l'objet de la psychologie sociale. C'est l'étude des phénomènes psychiques sur lesquels repose le développement général des sociétés humaines. Ces phénomènes résultant de l'existence des sociétés présentent des caractères propres d'une haute importance; le plus essentiel est leur continuité.

Ainsi entendue, la psychologie sociale nous paraît devoir être prise en considération pour les recherches d'ethnologie. Comme le dit fort justement M. Winternitz, toutes les manifestations de la vie des peuples réclament de la part de l'ethnographe une explication psychologique, et voilà pourquoi les résultats de la psychologie sociale sont à la base de la science ethnologique, comme les mathématiques servent de fondement aux sciences naturelles.

(*) *Principien der Sprachgeschichte,* Halle, 1880, p. 9 sqq.
(**) *Ethnologische Studien zur ersten Entwickelung der Strafe,* p. XXIV sqq.
(***) GLOBUS, tom. cit., p. 377.

Loin de nous la pensée de contredire à cette conclusion, à une condition pourtant, c'est que nous nous trouvions, en ce qui concerne la psychologie sociale, devant des résultats incontestables ou du moins assez généralement acceptés.

Malheureusement, pour bon nombre de questions même fondamentales, les résultats de la psychologie sociale sont loin d'être dans ce cas, et il nous suffira de rappeler une controverse récente, pour faire voir dans quel vague d'idées flottent encore certaines conceptions que l'on peut cependant considérer comme importantes et primordiales.

Les 1er, 8 et 15 juin 1900, à l'Académie des Inscriptions et Belles-Lettres de France (*), M. S. Reinach donnait lecture d'un mémoire sur les survivances du totémisme chez les anciens Celtes. Il cherchait à y démontrer que la religion des Celtes, tant sur le continent que dans les îles Britanniques, a passé par une phase de totémisme, dont il subsiste des vestiges à l'époque historique. Pour M. Reinach, ce phénomène religieux très ancien, antérieur à la naissance des mythologies, n'est pas autre chose qu'une sorte de pacte d'alliance entre tels clans d'hommes et telles espèces d'animaux ou de végétaux, que l'homme s'abstient de tuer et de manger, parce qu'il les croit doués d'une vie semblable à la sienne. Suivant M. Reinach, la source du totémisme doit être trouvée dans une hypertrophie d'un instinct social qui caractérise l'espèce humaine, et c'est pour cela qu'on en retrouve des traces chez presque tous les peuples. Voilà l'explication des interdictions alimentaires, comme la défense de manger du lièvre ou du porc chez certains peuples sémitiques, celle d'user de fèves chez les Pythagoriciens et les disciples d'Orphée. Si l'on a donné plus tard de ces prohibitions des motifs hygiéniques, ce fut seulement pour en assurer la continuité; mais ces raisons n'ont rien de primitif. C'est aussi le totémisme qui rend compte de la domestication des animaux et de la culture des céréales, car c'est sous l'empire d'idées religieuses, que l'homme a pratiqué l'élevage et l'agriculture pour épargner certains animaux et certaines plantes. Ainsi

(*) Comptes rendus de l'Académie des Inscriptions et Belles-Lettres, 1900, pp. 320, 332, 343-44.

les oies, les lièvres et les poules qu'élèvent les Celtes de la Grande-Bretagne, sont simplement des animaux totémiques, et en Gaule, les monuments figurés et l'analyse des noms propres permettent de considérer comme totémiques le sanglier, le taureau, l'ours, le cheval, le chien, le corbeau, le serpent, le chêne. M. Reinach constate aussi que si, à l'origine, certains animaux sont considérés comme sacrés, ils finissent par être regardés comme impurs, à preuve ce qui se passe chez les musulmans et les juifs.

M. Michel Bréal a élevé des objections contre cette théorie et sa généralisation qui ne tient pas suffisamment compte de la différence des âges et des milieux (*).

M. Oppert a montré par certains exemples que la thèse de M. Reinach est trop absolue et que si dans les faits de prohibition qu'il a cités, la préoccupation d'hygiène n'explique pas toutes les prohibitions, il y en a cependant quelques-uns où le rôle de la préservation hygiénique n'est pas contestable (**).

Telle est aussi la conclusion d'un certain nombre d'observations présentées par M. Dieulafoy, qui, en particulier, n'a pu voir ni *tabou,* ni *totem* dans les exemples cités par M. Reinach des oies et des coqs, et il a fourni du fait que l'on vendait les oies le même jour dans certains pays et que l'on mangeait un coq à la même date en d'autres contrées, des explications différentes de celles données par M. Reinach (***).

M. Bouché-Leclercq s'est aussi élevé contre la thèse de M. Reinach, et a protesté que le totémisme ne saurait donner une explication intégrale et suffisante d'une religion quelconque, même de la religion des tribus chez lesquelles il a été constaté. Bien plus, il ne peut pas rendre compte de son point de départ, c'est-à-dire du choix des totems et des tabous, sans recourir au symbolisme. Or il ne veut plus entendre parler de cette explication, qu'il regarde comme surannée. De plus, le totémisme correspond à un état d'esprit si particulier et si raffiné dans son incohérence qu'il n'a aucun titre à représenter une des phases intellectuelles

(*) Comptes rendus de l'Académie des Inscriptions et Belles-Lettres, 1900, p. 344.
(**) *Ibid.*, p. 346-48.
(***) *Loc. cit.*, p. 382-88.

par lesquelles aurait passé l'humanité tout entière. En conséquence, M. Bouché-Leclercq pense que l'on a eu tort de vouloir généraliser le totémisme et que la critique doit, jusqu'à plus ample informé, l'éliminer.

Je sais bien que M. Reinach, distinguant la religion de la mythologie, a accordé que, si l'explication des légendes mythologiques peut être multiple et dépendre de divers principes d'exégèse, la religion par contre n'a qu'une seule et unique source d'interprétation, puisée à l'étude de la psychologie des peuples qui, de nos jours, sont restés à un stade primitif de civilisation. Et M. Reinach prétend que cette étude démontre l'antériorité du totémisme sur l'anthropomorphisme et les mythologies proprement dites. Il en résulte que si l'on veut expliquer les faits religieux les plus anciens que nous ont conservés les rituels des peuples classiques, Grecs, Romains, Étrusques, c'est au totémisme qu'il faut avoir recours (*).

Malgré les efforts de M. Reinach pour faire prévaloir sa théorie, puisqu'après l'avoir exposée en trois séances consécutives de l'Académie il y est revenu encore dans les séances des 27 juillet, 3 août et 10 août 1900, M. Bouché-Leclercq a carrément rejeté la théorie de M. Reinach sur le totémisme (**). Il ne saurait admettre que cette croyance constitue une interprétation générale de la religion. Le totémisme est le contre-pied de la logique humaine; il suffit d'un seul détail pour s'en convaincre : dans ce système, le sacrifice animal aurait précédé le sacrifice humain. Or l'histoire des faits montre, avec une certitude absolue, les sacrifices humains chez les primitifs et les sacrifices des animaux chez les civilisés. C'est le progrès moral qui a opéré la substitution de l'homme par l'animal; le contraire n'est pas admissible.

Nous avons rappelé cette discussion qui a occupé, sans aboutir à une conclusion indiscutée, plusieurs séances de l'Académie des Inscriptions et Belles-Lettres, pour montrer avec quelle prudence il faut manier, au point de vue des études d'ethnologie, l'instrument de la psychologie sociale. Il est peut-être excellent, mais encore faut-il qu'il soit manié par une main expérimentée, et en tout cas que les principes de son application soient nettement définis.

(*) *Loc. cit.*, pp. 419, 422.

(**) *Ibid.*, p. 425-28.

Cette courte note sur quelques récents travaux ethnographiques ne vise nullement, malgré son caractère négatif, à déprécier les recherches qui se font sur ce domaine scientifique. Notre but a été seulement d'appeler l'attention sur la rigueur de la méthode à suivre dans les investigations. Nous appelons de tous nos vœux le jour où l'ethnographie armée, comme d'autres sciences, de principes fermes et incontestés, arrivera à des conclusions qui devront s'imposer à tous les esprits.

CONTRIBUTION A LA FAUNE

DES

MYMARIDAE "OU ATOMES AILÉS" DE L'AMBRE

PAR

Fernand MEUNIER

D'après les types inédits de v. Duisburg qui m'ont été communiqués par M. le Dr Schellwien, du Musée Provincial de Koenigsberg, il m'est possible de donner les diagnoses de quelques nouveaux " atomes ailés " du succin.

La rareté apparente de ces hyménoptères est due, comme l'a laissé entrevoir Menge (*) et v. Duisburg (**), à leur extrême petitesse échappant ordinairement à nos recherches microscopiques. La découverte de plusieurs individus provenant d'une petite collection d'inclusions du Copal m'a montré que pour obtenir de riches matériaux d'études, il est indispensable de voir les diverses couches des fragments d'ambre ou d'autres résines à des grossissements de 100 à 500 diamètres.

(*) *Lebenszeichen vorweltl. im Bernstein eingeschloss. Thiere. Progr. Petrischule,* Dantzig, 1850, S. 25.

(**) *Zur Bernsteinfauna,* Schrift. Phys. Oeconom. Gesell., Koenigsberg, 1868.

Avec Foerster (*), je suis persuadé que les plus minimes variations morphologiques pouvant se montrer aux organes de ces bestioles ont une réelle valeur systématique. C'est pourquoi, j'ai comparé avec soin les caractères des antennes, des ailes et des articles tarsaux de ces pygmées. L'étude des espèces vivantes n'a fait que peu de progrès depuis 1847, époque à laquelle H. Loew (**), se basant sur l'examen de quelques Anaphes, signalait déjà que les classificateurs avaient souvent décrit trop superficiellement la fine morphologie des Mymaridae.

Afin de permettre aux paléoentomologistes de poursuivre l'étude des " atomes ailés ", j'ai résumé, en un tableau d'ensemble, l'état actuel de nos connaissances sur les Mymaridae et les autres Proctotrypidae fossiles.

Il n'est pas inutile de redire que l'ambre de l'Oligocène inférieur de la Baltique ne se trouve dans ce gisement que par transport (Geschiebe), sa véritable formation remontant à l'éocène (***). A en juger d'après leurs caractères morphologiques, déjà si perfectionnés, il est permis de croire que des Mymaridae, peut-être voisins de ceux de notre faune, habitaient vraisemblablement les herbes des prairies et des bois, pendant la durée des temps éocènes.

(*) *Ueber die Familie der Mymariden*, Linn. Ent., Berlin, Posen, u. Bromberg. 1847, t. II.

(**) *Verwandlungsgeschichte der Mymariden*, Stett, Ent. Zeitschr., 1847, S. 342.

(***) *Jentzsch. A. Führer durch die geolog. Sammlungen d. Provincial-Museums u. s. w.*, Koenigsberg, 1892, S.S. 53-54, Tab. I.

Voici ce que dit le Prof. Dr A. Jentzsch à propos de l'origine de l'ambre.

" Dem Eocän wird man bis auf weiteres den Bernstein und die ihn begleitenden Harze und Hölzer, welche in den unteroligocänen Meereschichten liegen, zuweisen dürfen. Mussten sie doch auf dem Lande fertig gebildet sein, als das Unteroligocänmeer mit seinen Austern und Seeigeln sie hier ablagerte. Das eocäne (bezw. paleocäne) Meer reichte von Paris und London ostwärts bis Kopenhagen und Istadt in Schweden. Weiter östlich kennen wir in der Gegend der heutigen Ostsee keine Spuren dieses Meeres; ebensowenig aus Norddeutschland und den angrenzenden Teilen Russlands. Hier war damals ein Festland welches unmittelbar mit Skandinavien zusammenhing, hier grünte der Bernsteinwald. "

Description de quelques espèces de Mymaridae fossiles.

I. *Genre Anaphes,* Hal.

1. *Splendens*, sp. nov. (*) ♀.

Tête aussi large que le thorax. Vertex et dessous de la face garnis de quelques cils raides. Partie buccale invisible. Antennes de 9 articles, fortement ciliés de chaque côté; les deux premiers saillants et presque d'égale longueur, les articles 3 et 4 plus petits, les 5e, 6e, 7e et 8e articles plus gros et égaux entre eux; le bouton apical cilié de chaque côté et aussi long que les trois articles précédents pris ensemble.

Thorax deux fois aussi long que l'abdomen avec ses diverses parties peu visibles. Ce dernier organe ovoïde, sessile est terminé par quelques cils bien appréciables. Oviscape (Bohrer) dépassant sensiblement l'apex abdominal. Tarses tétramères, très densément ciliés. Ailes antérieures spatuliformes et rétrécies à peu de distance de la base. " Nervus ulnerus „ aboutissant d'abord aux deux tiers du bord costal alaire et formant ensuite une crosse bien distincte. Cils antérieurs plus courts que les postérieurs et émergeant du bord périphérique de ces organes. Ailes postérieures linéaires, longuement ciliées, plus courtes que les antérieures avec le " nervus ulnerus „ très saillant et punctiforme à son apex.

Long. 3/4 mm.

2. *Schellwieniens,* sp. nov. ♂.

Tête très forte et plus large que le thorax. Partie buccale invisible. Antennes de 12 articles distinctement ciliés et paraissant égaux entre eux; le bouton apical ou 12e article un peu plus long que le précédent.

Thorax plus long que l'abdomen, pro, méso et métathorax peu visibles.

Abdomen ovoïde, subsessile, à apex pourvu de chaque côté de quelques poils.

(*) C'est uniquement pour faciliter la tâche aux chercheurs que, contrairement à ma première manière de voir, j'ai donné des noms spécifiques aux beaux types de Mymaridae de v. Duisburg.

Pattes robustes. Tarses rendus indistincts par le retirement de ces organes sous l'abdomen.

Ailes antérieures altérées, leur surface et la périphérie ciliées comme chez *A. splendens.*

Ailes postérieures linéaires, pétiolées à la base avec le bord costal plus courtement cilié que le bord postérieur.

Long. 1/2 mm.

II. *Aff. genres Anaphes et Alaptus*, Hal.

3. Sp! ♂.

Tête plus large que le thorax. Yeux très proéminents, à facettes en relief. Partie buccale invisible. Vertex plan, large. Antennes insérées au milieu de la face et composées de 10 articles distinctement ciliés : le 1er article long et cylindrique, le 2e godiforme vers son apex, mais moins long et plus gros que le précédent, le 3e cupuliforme et moins de moitié aussi long que le 2e, les articles 4 à 9 cylindres et égaux entre eux; le bouton apical finement cilié de chaque côté et sensiblement aussi long que le 9e article. Thorax plus long que l'abdomen, pro, méso et métathorax peu distincts (358 d.).

Abdomen ovoïde, sessile, à apex quelque peu pointu. Organe copulateur se présentant sous la forme de deux stylets naissants un peu après le milieu du dessous de l'abdomen. Tibias et articles tarsaux ciliés. Tarses tétramères, ciliés et presque égaux entre eux. Tibias postérieurs plus longs que les antérieurs et les médians. Crochets tarsaux vigoureux (358 d.). Une trace de " nervus ulnerus „ est seulement visible aux ailes antérieures.

Observation : Par les ailes et les articles tarsaux ce Mymaridae a une grande affinité avec les espèces du genre *Anaphes.* D'après le nombre de ses articles antennaires, il se range avec les *Alaptus* ♂. Long. 2/3 mm.

III. *Genre Litus,* Hal.

4. *Elegans,* sp. nov. ♀.

Tête plus large que le thorax, aplatie. Vertex assez large. Yeux à facettes en relief. Partie buccale invisible. Antennes de 9 articles

insérées au-dessus du milieu de la face : les deux premiers articles plus gros que les suivants, les articles 3 à 6 sensiblement égaux entre eux, le 6e plus grand, les articles 7 et 8 semblables mais plus gros que les articles précédents ; le bouton apical de longueur égale à celle des articles 5 à 8 pris ensemble.

Thorax aussi long mais plus large que l'abdomen (il est plus nettement ovoïde que chez les *Anaphes* décrits ci-dessus). Oviscape se présentant sous la forme de 2 stylets partant à peu de distance du milieu du dessous de l'abdomen.

Pattes robustes, fémurs (surtout les antérieurs) assez dilatés ; tarses pentamères, presque égaux entre eux, ciliés. Crochets tarsaux paraissant vigoureux (358 d.).

Ailes antérieures ayant la forme d'une spatule peu rétrécie à la base. " Nervus ulnerus " se terminant à peu de distance du thorax. Les cils antérieurs et postérieurs des ailes émergent respectivement près du bord et au bord périphérique de ces organes. Ailes postérieures très linéaires, légèrement ciliées. Long. 1/4 mm.

IV. *Genre Limacis,* Hal.

5. *Baltica,* sp. nov. ♀.

Tête plus large que le thorax. Yeux assez proéminents et à facettes en relief. Partie buccale avancée et extrémité des palpes se montrant sous la forme de deux moignons. Front large, plan. Antennes insérées au milieu de la face et composées de 8 articles : le 1er gros et allongé, le 2e article de moitié aussi long que le précédent, godiforme, le 3e le plus petit, le 4e article presque aussi long mais de moindre diamètre que le premier, le 5e moins long que le 6e et le 7e ; le bouton apical de longueur égale aux deux articles précédents réunis.

Articles tarsaux visiblement pentamères ; ailes antérieures spatuliformes, rétrécies à la base, à contour périphérique longuement et à surface alaire courtement ciliés. Le " nervus ulnerus " en s'anastomosant au bord costal, au delà du milieu du champ de l'aile, y forme une crosse bien distincte.

Par les caractères indiqués ci-dessus ce fossile est différent du Limacis décrit dans ma 2e note sur les Mymaridae fossiles. (Bull. Soc. Ent. de France, No 18, pp. 66-67, Paris 1800.) Long. 1/2 mm.

V. *Genre Malfattia,* gen. nov.

6. Parmi les types de v. Duisburg, j'ai observé un Oxyura qui a beaucoup de ressemblance avec le *Mymaridae* décrit par Malfatti (*). Il se distingue de l'espèce trouvée dans le Simétite et des genres actuellement connus par les caractères suivants :

Tête plus large que le thorax et concave à la partie inférieure. Facettes des yeux indistinctes. Partie buccale proéminente. Antennes insérées au milieu de la face et composées de 9 articles (**) : le 1er aussi long que la tête, cylindrique, le 2e article de même diamètre, mais moins long que le premier, le 3e le plus petit de tous, les articles 4 à 8 cylindriques et égaux entre eux ; le bouton apical aussi long que les articles 7 et 8 pris ensemble.

Thorax très allongé, fort aplati à l'extrémité, mésothorax deux fois aussi long que le prothorax, scutellum semi-lunaire, métathorax incliné, bien visible (358 d.).

Abdomen de longueur sensiblement égale à celle du thorax. D'après la profonde échancrure (assez altérée) du dessous abdominal les organes génitaux de cette ♀ ont dû être très vigoureux.

La fossilisation ne permet pas de décrire complètement la fine morphologie de ces organes. A 358 d. on ne distingue qu'une sorte de longue tige émergeant un peu au delà du milieu ventral et se prolongeant après le dernier segment.

Hanches longues, trochanters petits, fémurs un peu dilatés, tibias assez grêles et de longueur égale aux fémurs. Articles tarsaux très visibles, tétramères, invaginés et presque égaux entre eux ; crochets indistincts (358 d.).

Ailes antérieures spatuliformes, rétrécies à la base. « Nervus ulnerus » bien visible et s'anastomosant près du tiers de la lon-

---

(*) *Due piccoli Imenotteri fossili dell' ambra siciliana,* Att. Accad. dei Lincei, Roma, 1880-1881, t. V, 3e série, pp. 80-81, fig. 1.

(**) C'est probablement par l'emploi d'un grossissement insuffisant que Malfatti signale que le Mymaridae ♂ ? du Miocène sicilien avait des antennes de 10 articles. J'ajouterai que par les caractères de ces organes et les tarses tétramères le pygmée de l'auteur italien ne peut être classé dans aucun genre de Mymaridae. Complément de la note infra-paginale de ma 2e communication sur les *Mymaridae de l'ambre et du copal.* Bull. Soc. Ent. de France, n° 18, p. 365, Paris, 1900).

gueur du bord costal alaire. Périphérie antérieure de ces organes plus longuement ciliée que la postérieure.

Seconde paire d'ailes linéaires, pétiolées, longuement ciliées au bord postérieur et garnies antérieurement d'une frange de poils très courts. „ Nervus ulnerus „ très distinct. Long. 1mm.

L'insecte étudié par Malfatti a les ailes postérieures presqu'aussi larges (*) que les antérieures.

Je propose de nommer ce curieux *Mymaridae* **Malfattia Molitorae,** nov. sp. en l'honneur de l'intelligente et dévouée collaboratrice de mes travaux paléoentomologiques.

Observation : Ce *Pupivora Oxyura* de la faune éocène est voisin de celui trouvé par Malfatti dans la résine miocène (Simétite). L'avenir nous apprendra si ces deux hyménoptères fossiles doivent être réunis aux *Chalcididae* ou conservés parmi les *Proctotripydae.*

VI. *Sur des Mymaridae voisins des Mymar,* Hal.

Après un minutieux examen microscopique, j'ai pu constater que 5 types „ d'atomes ailés „ de v. Duisburg ne peuvent être identifiés avec les vrais *Mymar.* Hal., ces fossiles ayant des tarses pentamères distinctement ciliés et des tibias antérieurs, médians et postérieurs dilatés à leur apex. De plus, leurs tibias antérieurs sont moins longs que les médians et ces derniers visiblement plus courts que les postérieurs. Leurs antennes sont composées de 13 articles nettement bi-verticillés : le scape large, dilaté, le 2e article plus court et aussi gros que le premier, le 3e article rudimentaire, les articles 4 et 5 presque égaux entre eux, les 6e, 7e, 8e et 9e articles plus gros que les précédents, de même longueur; la massue de l'antenne est formée par les articles 11 à 12 qui sont égaux entre eux et par le 13e article qui est plus petit que les précédents. Par les caractères de l'abdomen ces pygmées ont de l'affinité avec les vrais Mymar car, comme le dit Brullé (*Hyménoptères,* t. IV), „ cet organe est pourvu d'un pédicule aussi long

(*) Par ce caractère cet hyménoptère s'éloigne de l'espèce du succin et ne peut être rapproché d'aucun autre genre de Mymaridae. N'ayant pas vu le type de l'auteur italien (le dessin qu'il en donne paraît peu précis) je ne puis contrôler l'exactitude de son observation.

que lui „. A cause de l'embrunissement des ailes antérieures, je n'ai pu constater l'aspect morphologique de leur " nervus ulnerus „. Avec v. Duisburg j'ai remarqué qu'il y a ordinairement de 30 à 40 cils à la périphérie de chaque aile et que leur nombre varie suivant l'époque pendant laquelle ces hyménoptères ont été englués dans l'ambre. La fossilisation qui a détruit les ailes postérieures des cinq types de v. Duisburg ne permet pas de constater si ces *Proctotrypides* ont des caractères morphologiques voisins du *Mymar pulchellus*, Hal.

Pour prendre date, je propose de donner à ces pygmées le nom de *Palaeomymar succini,* gen. nov. sp. nov. ♂. Long. 1/3mm.

VII. *Genre Eustochus,* Hal.

Duisburgi, Stein. (Meunier) ♀.

Mymar Duisburgi, Stein.

On ne peut que féliciter v. Duisburg d'avoir fait connaître le premier un Mymar du succin en laissant entrevoir, dès 1868, la haute importance phylogénique des recherches micro-paléoentomologiques.

Les *Eustochus* se distinguent des *Mymar.* par les caractères suivants :

Mymar., Hal.	*Eustochus,* Hal.
♀. Antennes de 9 articles.	♀. Antennes de 10 articles.
♂. „ 13 „	Tarses tétramères.
♂ et ♀. Tarses pentamères.	Abdomen pétiolé.
Abdomen pétiolé.	♂. (non encore décrit).

DESCRIPTION DU TYPE DE V. DUISBURG.

♀. Tête plus large que le thorax, front très large, incliné. Facettes des yeux composées en relief. Partie buccale invisible. Antennes de 10 articles : le 1er long et cylindrique, le 2e de longueur moindre que le précédent, ovalaire; les articles 4 à 6 presque égaux entre eux; les 7e, 8e et 9e articles aussi égaux entre eux

mais plus longs et plus dilatés que les précédents; le bouton apical gros, ovoïde, allongé, de longueur égale à celle des articles 5 à 8 pris ensemble.

Prothorax plus large que le mésothorax, scutellum semi-luniforme, métathorax rendu indistinct par la fossilisation. Abdomen piriforme, pétiolé. à tarière invisible. Les caractères des pattes sont peu visibles. A 358 diamètres ces organes paraissent être composés de 4 articles sensiblement égaux entre eux.

Ailes antérieures pétiolées à la base, spatuliformes, fortement disciformes à l'apex (scheibenrund) et ornées de cils naissant à quelque distance du bord périphérique " Nervus ulnerus " indistinct. Long. 1/3 mm.

Conclusions.

1. Les espèces de *Anaphes, aff. Anaphes et Alaptus, Litus,* Hal.; *Limacis,* Först.; *Malfattia et Palaeomymar.,* Meun. décrites dans ce travail semblent être propres à la faune éocène de l'oligocène inférieur (ambre) du Samland.

2. Le *Mymaridae* décrit sommairement et figuré par v. Duisburg, comme étant un *Mymar.,* Hal., se classe, d'après ses antennes, dans le genre *Eustochus,* Hal. Les vrais *Mymar.,* Hal. n'ont pas encore été trouvés à l'état fossile. C'est en me basant sur les travaux de Duisburg et de Stein que j'avais mentionné, avant le visu du type du premier de ces auteurs, que ce genre de *Mymaridae* avait été observé dans le succin (Bull. Soc. Ent. de France, n° 18, p. 365, Paris 1900).

TABLEAU DES PROCTOTRYPIDAE FOSSILES

Copal	Récent (faune non encore observée).	
	QUATERNAIRE MODERNE (*). (faune sub-fossile)	*Mymaridae* : *aff. Rachistus et Litus*, Meun.; *aff. Ooctonus et Cosmocoma, Litus, Limacis, Prestwichia* (**), Meun.
		Bethylidae : *Bethylus* (Dalman.).
		Belytidae : *Belytha ?* (Dalman.).
		Diapridae : *Diapria* (Dalman.).
		Scelionidae : *Scelio ?* (Dalman.).

TERRAINS TERTIAIRES

Simétite (nommée improprement ambre sicilien)	MIOCÈNE DE SICILE	*Mymaridae* décrit par Malfatti et paraissant voisin de *Malfattia Molitorae*, gen. nov. sp. nov.
Ambre.	OLIGOCÈNE INFÉRIEUR DU SAMLAND. (faune éocène)	*Mymaridae* (***), *Anaphes splendens*, sp. nov.; *Schellwieniens*; *aff. Anaphes* et *Alaptus*, Hal.; *Litus elegans*, nov. sp.; *Limacis punctiformis*, nov. sp.; *Malfattia Molitorae*, nov. sp.; *Palaeomymar succini*, nov. sp.; *Eustochus Duisburgi*, Stein. (Meun.).

TERRAINS SECONDAIRES

Origine probable des premiers types de Proctotrypidae.

(*) Il serait intéressant de constater si la faune de cette même résine (de production actuelle) est semblable à celle du copal du quaternaire moderne. L'assise précise du Copal sub-fossile n'a pas encore été rigoureusement déterminée par les stratigraphes s'occupant spécialement des terrains quaternaires.

(**) Le *Calotelea aurantia* et le *Calyoza staphylinoïdes* Hope ont aussi été trouvés dans le Copal. (*Succinic insects* TRANS. ENT. SOC., London, 1837-40, pp. 55-56).

(***) Les *Proctotrypides* cités au N° 2 ont également été rencontrés dans le succin de la Baltique (Brullé, *Histoire des Insectes. Hyménoptères*, t. IV, pp. 617 et 621).

Bibliographie

Marshall, T. A. *A Catalogue of British Hymenoptera Oxyura*, London, 1873, pp. 22 à 25.

Meunier, F. *Sur les Mymaridae du Copal fossile,* Bull. Soc. Ent. de France, n° IX, pp. 192 à 195 et 6 fig., Paris, 1900.

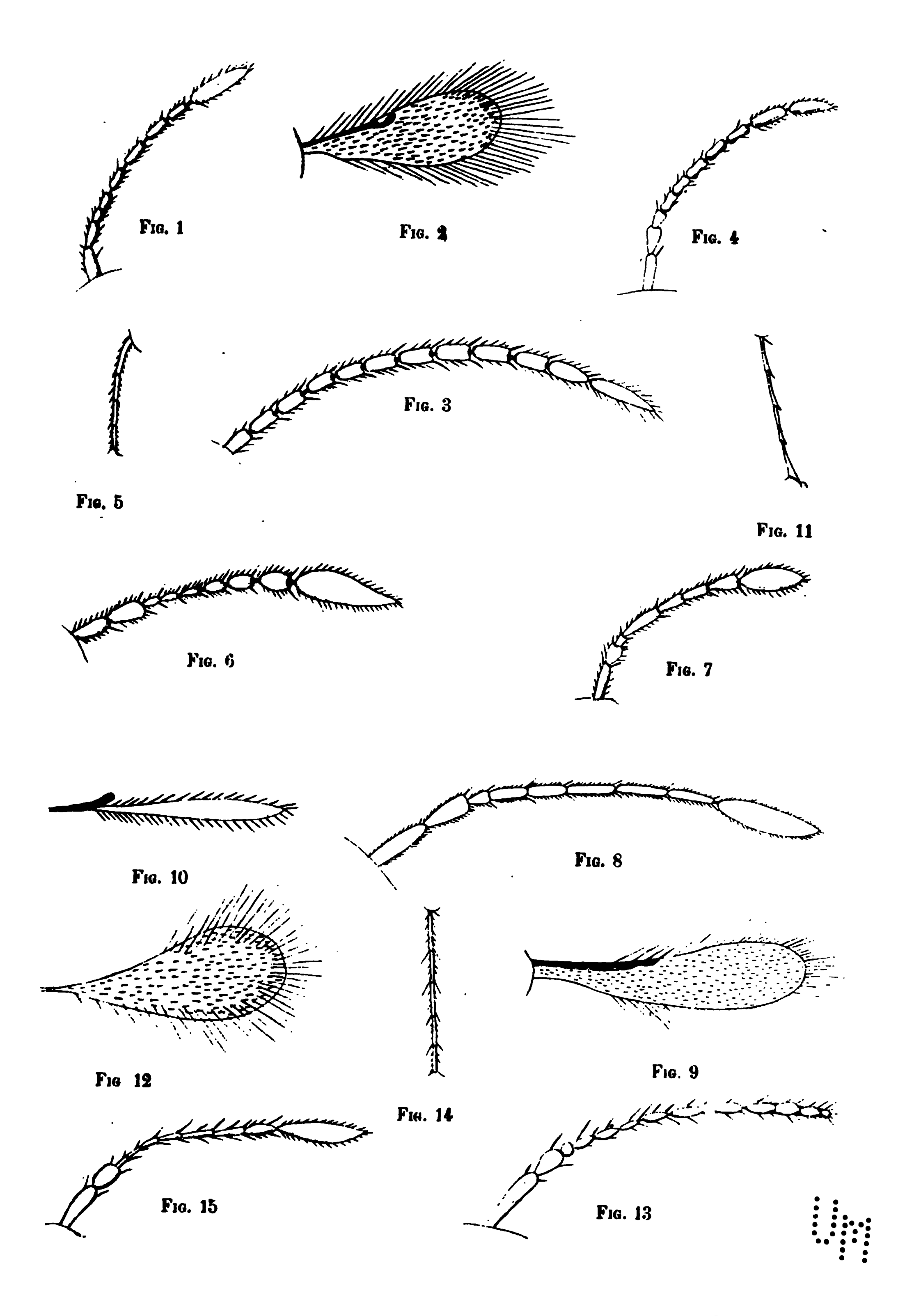
Meunier, F. *Sur les Mymaridae de l'ambre et du Copal,* Bull. Soc. Ent. de France, n° XVIII, pp. 364 à 367 et 2 fig., Paris, 1900.

Scudder, S. H. *A classed and annotated Bibliography of fossil insects,* Bull. U. S. Geol. Survey, n° 69, p. 71 (Menge), p. 77 (Stein), p. 97 (Duisburg et Malfatti).

Explication des figures

Fig. 1. Antenne de Anaphes splendens. sp. nov. ♀ (137 d.) (*).
„ 2. Aile antérieure du même insecte (66 d.).
„ 3. Antenne de Anaphes Schellwieniens sp. nov. ♂ (137 d.).
„ 4. Antenne de aff. Anaphes et Alaptus. sp.? ♂ (137 d.).
„ 5. Tarse du même Mymaridae (137 d.).
„ 6. Antenne de Litus elegans. sp. nov. ♀ (137 d.).
„ 7. „ de Limacis baltica. sp. nov. ♀ (137 d.).
„ 8. Antenne de Malfattia Molitorae sp. ♂ (137 d.).
„ 9. Aile antérieure du même insecte (66 d.).
„ 10. „ postérieure „ „ (66 d.).
„ 11. Tarse de ce Mymaridae (66 d.).
„ 12. Aile de Palaeomymar succini nov. gen. sp. nov. ♂ (137 d.)
„ 13. Antenne du même insecte (358 d.).
„ 14. Tarse „ „ (137 d.).
„ 15. Antenne de Eustochus (Mymar) Duisburgi, Stein (Meunier) ♀ (137 d.).

(*) Tous les dessins ont été faits à la chambre claire d'Abbe.



Louise Meunier del.

Proctotrypidae (Mymaridae) de l'ambre.

LES THÉORIES ÉLECTRIQUES

DE

J. CLERK MAXWELL (*)

ÉTUDE HISTORIQUE ET CRITIQUE

PAR

M. P. DUHEM
Professeur de physique théorique
à la Faculté des Sciences de l'Université de Bordeaux

DEUXIÈME PARTIE

L'ÉLECTRODYNAMIQUE DE MAXWELL

CHAPITRE PREMIER

Flux de conduction et flux de déplacement

§ 1. *Du flux de conduction*

Le théoricien cherche à donner des lois physiques une représentation construite au moyen de symboles mathématiques; cette représentation doit être aussi simple que possible; les grandeurs distinctes qui servent à signifier les qualités regardées comme

(*) Voir Annales de la Société scientifique, t. XXIV, pp. 239-253; t. XXV, pp. 1-90.

premières et irréductibles doivent donc être aussi peu nombreuses que possible. Lors donc que des faits nouveaux sont découverts, que l'expérience en a déterminé les lois, le physicien doit s'efforcer d'exprimer ces lois au moyen des signes déjà en usage dans la théorie, de les formuler au moyen de grandeurs déjà définies. C'est seulement lorsqu'il a reconnu la vanité d'une semblable tentative, l'impossibilité de faire rentrer les lois nouvelles dans les anciennes théories, qu'il se décide à introduire dans la physique des grandeurs inusitées jusqu'alors, à fixer les propriétés de ces grandeurs par des hypothèses qui n'avaient pas encore été énoncées.

Ainsi, lorsque Œrstedt, puis Ampère, eurent découvert et étudié les actions électrodynamiques et électromagnétiques, les physiciens s'efforcèrent d'en formuler les lois sans introduire dans la science d'autres grandeurs que celles qui avaient suffi jusque-là à représenter tous les phénomènes électriques et magnétiques, savoir : la *densité électrique* et l'*intensité d'aimantation;* l'exacte connaissance de la distribution qu'affecte, à un instant donné, l'électricité répandue sur un conducteur, devait, pensaient-ils, suffire à déterminer les actions que ce conducteur exerce à cet instant. Ampère ne crut pas ces tentatives indignes de son génie; mais ayant enfin reconnu qu'elles étaient condamnées à l'impuissance, il imagina de définir les propriétés d'un fil conducteur à un instant donné en indiquant non seulement quelle est, à cet instant et en chaque point du fil, la valeur de la densité électrique, mais encore quelle est la valeur d'une grandeur nouvelle, l'*intensité du courant* qui traverse le fil.

Si l'on se place au point de vue de la logique pure, l'opération qui consiste à introduire, dans une théorie physique, de nouvelles grandeurs pour représenter des propriétés nouvelles est une opération entièrement arbitraire; en fait, le théoricien se laisse guider, dans cette opération, par une foule de considérations étrangères au domaine propre de la physique. en particulier par les suppositions que lui suggèrent, touchant la nature des phénomènes étudiés, les doctrines philosophiques dont il se réclame, les explications que l'on prise en son temps et en son pays. Ainsi, pour définir les grandeurs propres à réduire en théorie les lois des attractions et des répulsions électriques, les physiciens s'étaient inspirés de l'opinion qui attribuait ces actions à un fluide ou à deux fluides.

De même, pour définir des grandeurs propres à représenter les phénomènes électrodynamiques, ils se sont laissé guider par l'idée qu'un *courant* de fluide électrique parcourait le conducteur interpolaire et ils ont imité les formules qui, depuis Euler, servaient à étudier l'écoulement d'un fluide.

L'analogie hydrodynamique avait déjà fourni à Fourier le système de symboles mathématiques par lequel il est parvenu à représenter la propagation de la chaleur par conductibilité; elle a fourni à G. S. Ohm, à Smaasen, à G. Kirchhoff le moyen de compléter, dans le sens indiqué par Ampère, la représentation mathématique des phénomènes électriques.

A l'imitation de la *vitesse* qu'offre, en chaque point, un fluide qui s'écoule, on imagine, en chaque point du corps conducteur et à chaque instant, une grandeur dirigée, le *flux électrique*.

Entre les composantes de la vitesse d'un fluide en mouvement et la densité de ce fluide, existe une relation, la *relation de continuité;* à l'imitation de cette relation, on admet, entre les composantes u, v, w du flux électrique qui se rapporte au point (x, y, z) du conducteur et à l'instant t, et la densité électrique solide σ au même point et au même instant, l'existence de l'égalité

$$(1) \qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial \sigma}{\partial t} = 0.$$

A cette relation, on en joint une qui concerne la densité superficielle Σ en un point de la surface de contact de deux milieux distincts 1 et 2 :

$$(2) \qquad \begin{aligned} & u_1 \cos(N_1, x) + v_1 \cos(N_1, y) + w_1 \cos(N_1, z) \\ & + u_2 \cos(N_2, x) + v_2 \cos(N_2, y) + w_2 \cos(N_2, z) + \frac{\partial \Sigma}{\partial t} = 0. \end{aligned}$$

Dans l'esprit des premiers physiciens qui les ont considérées, les quantités u, v, w représentaient, en chaque point et à chaque instant, les composantes de la vitesse avec laquelle se meut le fluide électrique; nous ne devons pas hésiter, aujourd'hui, à laisser de côté toute supposition de ce genre et à regarder simplement u, v, w, comme trois certaines grandeurs, variables avec les coordonnées et avec le temps et vérifiant les égalités (1) et (2).

Pour connaître complètement les propriétés d'un conducteur à un *instant isolé t*, il faut connaître, en tout point du conducteur, les valeurs des variables u, v, w, σ, et, en outre, en tout point des surfaces de discontinuité, la valeur de la variable Σ. Lorsqu'on se propose de fixer les propriétés d'un conducteur à *tous les instants d'un certain laps de temps*, c'est seulement à l'instant initial qu'il faut donner les valeurs des cinq grandeurs σ, Σ, u, v, w; aux autres instants, il suffit de donner les valeurs des variables u, v, w; σ, Σ s'en déduisent en intégrant les équations (1) et (2).

§ 2. *Du flux de déplacement*

Pour représenter les lois connues qui régissent les actions des corps diélectriques, Faraday, Mossotti et leurs successeurs se contentaient de considérer une seule grandeur dirigée, variable d'un point à l'autre et d'un instant à l'autre, l'*intensité de polarisation*, de composantes A, B, C.

Bien qu'aucune expérience, à l'époque où il écrivait, ne justifiât ni ne suggérât même une semblable hypothèse, Maxwell admit que la connaissance, à un *instant isolé t* de la durée, des trois composantes A, B, C de la polarisation ne déterminait pas complètement les propriétés du diélectrique à cet instant; que ce corps possédait des propriétés, encore inconnues, qui, à l'instant t, dépendaient non seulement de l'intensité de polarisation ou *déplacement*, mais encore du *flux de déplacement*, grandeur dirigée de composantes

$$(3) \qquad \bar{u} = \frac{\partial A}{\partial t}, \qquad \bar{v} = \frac{\partial B}{\partial t}, \qquad \bar{w} = \frac{\partial C}{\partial t}.$$

Les six variables A, B, C, $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ ont des valeurs qui peuvent être choisies arbitrairement pour un *instant isolé;* mais il n'en est pas de même pour tous les instants d'un certain laps de temps; si, pour tous ces instants, on connaît les valeurs de A, B, C, on connaît par le fait même les valeurs de $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$.

Si on la présente, ainsi que nous venons de le faire, comme l'introduction purement arbitraire d'une grandeur nouvelle dont aucune expérience n'exigeait l'emploi, la définition, donnée par

Maxwell, du flux de déplacement apparaît comme une étrangeté. Elle devient, au contraire, très naturelle et, pour ainsi dire, forcée si l'on tient compte des circonstances historiques et psychologiques.

Au cours de ses recherches sur les diélectriques, Maxwell, nous l'avons vu, ne cesse de s'inspirer des hypothèses de Faraday et de Mossotti. A l'imitation de ce que Coulomb et Poisson avaient supposé pour les aimants, Faraday et Mossotti avaient imaginé un diélectrique comme un amas de petits grains conducteurs noyés dans un ciment isolant, chaque petit grain conducteur portant autant d'électricité positive que d'électricité négative; assurément Maxwell, dans tous ses écrits, regarde cette image sinon comme une représentation fidèle de la réalité, du moins comme un *modèle* suggérant des propositions toujours vérifiées.

Si, avec Faraday et Mossotti, on regarde un diélectrique polarisé comme un ensemble de molécules conductrices sur lesquelles l'électricité est distribuée d'une certaine manière, tout changement dans l'état de polarisation du diélectrique consiste en une modification de la distribution électrique sur les molécules conductrices; ce changement de polarisation est donc accompagné de véritables courants électriques, dont chacun est localisé en un très petit espace. D'ailleurs, on voit sans peine que ces courants correspondent, en chaque point du diélectrique, à un *flux moyen* dont les composantes sont précisément données par les égalités (3). Ce flux moyen n'est donc autre chose que le flux de déplacement.

Dans son mémoire : *On physical Lines of Force*, Maxwell écrit (*), en invitant son lecteur à se reporter aux travaux de Mossotti : „ Une force électromotrice, agissant sur un diélectrique, produit un état de polarisation de ses parties semblable à la distribution de la polarité sur les particules du fer que l'on soumet à l'influence de l'aimant; tout comme la polarisation magnétique, cette polarisation diélectrique peut être représentée comme un état en lequel les deux pôles de chaque particule sont dans des conditions opposées. „

„ Dans un diélectrique soumis à l'induction, nous pouvons concevoir que l'électricité est déplacée en chaque molécule de telle

(*) J. Clerk Maxwell, Scientific Papers, vol. I, p. 491.

manière que l'une de ses extrémités est rendue positive et l'autre négative; mais l'électricité demeure entièrement confinée en chaque molécule et ne peut passer d'une molécule à l'autre. „

“ L'effet de cette action sur l'ensemble de la masse diélectrique est de produire un déplacement général de l'électricité dans une certaine direction. Le déplacement ne peut donner naissance à un courant, car, aussitôt qu'il a atteint une certaine valeur, il demeure constant; mais il constitue un commencement de courant, et ses variations constituent des courants dirigés dans le sens positif ou dans le sens négatif, selon que le déplacement augmente ou diminue. La grandeur du déplacement dépend de la nature du corps et de la grandeur de la force électromotrice; en sorte que si h est le déplacement, R la force électromotrice et E un coefficient qui dépend de la nature du diélectrique, on a

$$R = -4\pi E^2 h \text{ (*)}.$$

“ Si r est la valeur du courant électrique dû au déplacement, on a

$$r = \frac{dh}{dt}. \text{ „}$$

Ce passage, le premier où Maxwell ait mentionné le courant de déplacement, porte la marque indiscutable des idées de Mossotti qui ont conduit le physicien écossais à imaginer ce courant.

Il exprime si exactement, d'ailleurs, la conception que Maxwell s'est formée de ce courant, que nous le trouvons reproduit presque textuellement dans le mémoire : *A dynamical Theory of the electromagnetic Field* (**); dans le *Traité d'Électricité et de Magnétisme* (***), nous lisons ce passage plus bref : “ Les variations du déplacement électrique produisent évidemment des courants électriques. Mais ces courants ne peuvent exister que pendant que le déplacement varie, et, par suite, le déplacement ne pouvant

(*) Nous avons insisté [1re Partie, Chapitre III] sur la faute de signe qui affecte cette égalité.

(**) J. Clerk Maxwell, SCIENTIFIC PAPERS, vol. I, p. 531.

(***) J. Clerk Maxwell, *Traité d'Électricité et de Magnétisme*, trad. française, t. I, p. 69.

dépasser une certaine valeur sans produire une décharge disruptive, ils ne peuvent continuer indéfiniment dans la même direction, comme font les courants dans les conducteurs. „

“ Quelle que soit la nature de l'électricité, et quoi que nous entendions par mouvement d'électricité, ajoute Maxwell (*), le phénomène que nous avons appelé *déplacement électrique* est un mouvement d'électricité dans le même sens que le transport d'une quantité déterminée d'électricité à travers un fil est un mouvement d'électricité. „

Un flux de déplacement est donc essentiellement, et au même titre qu'un flux de conduction, un flux électrique; en tout corps conducteur, diélectrique ou magnétique, il produit la même induction, la même aimantation, les mêmes forces électrodynamiques ou électromagnétiques qu'un flux de conduction de même grandeur et de même direction. Un courant ou un aimant exerce les mêmes forces sur un diélectrique parcouru par des flux de déplacement que sur un conducteur qui occuperait la place de ce diélectrique et dont la masse serait parcourue par des flux de conduction égaux à ces flux de déplacement.

On ne devra donc jamais, dans les calculs électrodynamiques, faire figurer isolément le flux de conduction dont u, v, w sont les composantes; toujours, on devra considérer le *flux total*, somme géométrique du flux de conduction et du flux de déplacement, dont $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ sont les composantes. Ce principe est appliqué par Maxwell en ses divers écrits sur l'électricité (**); il constitue l'un des fondements de sa doctrine électrodynamique, l'une de ses innovations les plus audacieuses et les plus fécondes, ainsi qu'il le marque lui-même en ce passage (***) : “ Une des particularités les plus importantes de ce Traité consiste dans cette théorie que le

(*) J. Clerk Maxwell, *Traité d'Électricité et de Magnétisme*, trad. française, t. I, p. 73.

(**) J. Clerk Maxwell, *On physical Lines of Force* (Scientific Papers, vol. I, p. 496). — *A dynamical Theory of the electromagnetic Field* (Scientific Papers, vol. I, p. 554). — *Traité d'Électricité et de Magnétisme*, trad. française, t. II, p. 288.

(***) J. Clerk Maxwell, *Traité d'Électricité et de Magnétisme*, trad. française, t. II, p. 288.

courant électrique vrai duquel dépendent les phénomènes électromagnétiques n'est pas identique au courant de conduction, et que, pour évaluer le mouvement total d'électricité, on doit tenir compte de la variation dans le temps du déplacement électrique. „

§ 3. *Dans la théorie de Maxwell, le flux total est-il un flux uniforme ?*

Supposons qu'en chaque point pris à l'intérieur d'un domaine continu on ait l'égalité

$$\frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta v}{\delta y} + \frac{\delta w}{\delta z} = 0 \tag{4}$$

et, en chaque point d'une surface de discontinuité, que l'on ait l'égalité

$$\begin{aligned} u_1 \cos(N_1, x) + v_1 \cos(N_1, y) + w_1 \cos(N_1, z) \\ + u_2 \cos(N_2, x) + v_2 \cos(N_2, y) + w_2 \cos(N_2, z) = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Alors, on aura, au premier point, en vertu de l'égalité (1),

$$\frac{\delta \sigma}{\delta t} = 0$$

et, au second point, en vertu de l'égalité (2),

$$\frac{\delta \Sigma}{\delta t} = 0.$$

La distribution de l'électricité réelle sur le système demeurera invariable.

On donne le nom de *flux de conduction uniformes* à des flux de conduction qui vérifient les égalités (4) et (5).

Des *flux de déplacement uniformes* sont des flux de déplacement qui vérifient l'égalité

$$\frac{\delta \overline{u}}{\delta x} + \frac{\delta \overline{v}}{\delta y} + \frac{\delta \overline{w}}{\delta z} = 0 \tag{6}$$

en tout point d'un milieu continu et l'égalité

$$(7)\qquad \begin{aligned}&\bar{u}_1 \cos(N_1, x) + \bar{v}_1 \cos(N_1, y) + \bar{w}_1 \cos(N_1, z)\\ &+ \bar{u}_2 \cos(N_2, x) + \bar{v}_2 \cos(N_2, y) + \bar{w}_2 \cos(N_2, z) = 0\end{aligned}$$

en tout point d'une surface de discontinuité.

Si l'on admet la définition des densités électriques fictives e, E, *donnée par les égalités* (13) *et* (14) *de la première partie :*

$$(8)\qquad e = -\left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right),$$

$$(9)\qquad \begin{aligned}E = -\,[&A_1 \cos(n_1, x) + B_1 \cos(n_1, y) + C_1 \cos(n_1, z)\\ &+ A_2 \cos(n_2, x) + B_2 \cos(n_2, y) + C_2 \cos(n_2, z)],\end{aligned}$$

on peut écrire, en général, en vertu des égalités (3),

$$(10)\qquad \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} + \frac{\partial e}{\partial t} = 0,$$

$$(11)\qquad \begin{aligned}&\bar{u}_1 \cos(N_1, x) + \bar{v}_1 \cos(N_1, y) + \bar{w}_1 \cos(N_1, z)\\ &+ \bar{u}_2 \cos(N_2, x) + \bar{v}_2 \cos(N_2, y) + \bar{w}_2 \cos(N_2, z) + \frac{\partial E}{\partial t} = 0.\end{aligned}$$

Les flux de déplacement uniformes vérifient donc les égalités

$$\frac{\partial e}{\partial t} = 0, \qquad \frac{\partial E}{\partial t} = 0,$$

d'où résulte, en tout le système, l'invariabilité de la distribution électrique fictive équivalente à la polarisation diélectrique.

Il peut arriver que ni les flux de conduction, ni les flux de déplacement ne soient séparément uniformes, mais que *le flux total,* dont les composantes sont $(u + \bar{u})$, $(v + \bar{v})$, $(w + \bar{w})$, *soit uniforme;* il vérifiera, en tout point d'un milieu continu, l'égalité

$$(12)\qquad \frac{\partial}{\partial x}(u + \bar{u}) + \frac{\partial}{\partial y}(v + \bar{v}) + \frac{\partial}{\partial z}(w + \bar{w}) = 0$$

et, en tout point d'une surface de discontinuité, l'égalité

$$(13)\quad (u_1+\overline{u}_1)\cos(N_1,x)+(v_1+\overline{v}_1)\cos(N_1,y)+(w_1+\overline{w}_1)\cos(N_1,z)$$
$$+(u_2+\overline{u}_2)\cos(N_2,x)+(v_2+\overline{v}_2)\cos(N_2,y)+(w_2+\overline{w}_2)\cos(N_2,z)=0.$$

De ces égalités (12) et (13) découlent, en vertu des égalités (1), (2), (10) et (11), les égalités

$$(14)\qquad \frac{\delta}{\delta t}(\sigma+e)=0,$$

$$(15)\qquad \frac{\delta}{\delta t}(\Sigma+E)=0.$$

La distribution électrique réelle peut varier d'un instant à l'autre; il en est de même de la distribution fictive équivalente à la polarisation diélectrique; mais en chaque point soit d'un milieu continu, soit d'une surface de discontinuité, la somme de la densité électrique réelle et de la densité électrique fictive garde une valeur indépendante du temps, en sorte que les actions électrostatiques qui s'exercent dans le système restent les mêmes d'un instant à l'instant suivant.

Admettre que le flux total est toujours uniforme ce serait, pour celui qui reconnaîtrait en même temps la légitimité de toutes les équations précédentes, nier les phénomènes électrostatiques les mieux constatés; ce serait, par exemple, nier qu'un condensateur puisse se décharger au travers d'un conducteur immobile jeté entre les deux armatures.

L'hypothèse qu'en tout système, en toutes circonstances, le flux total est toujours uniforme est, de l'aveu de tous les commentateurs de Maxwell, l'un des principes essentiels sur lesquels repose la doctrine du physicien écossais. Suivons, au cours de ses écrits, la formation de cette hypothèse.

Dans le mémoire : *On Faraday's Lines of Force,* le premier que Maxwell ait consacré aux théories de l'électricité, il n'est point encore question de courant de déplacement; le courant de conduction est seul considéré; ce qui en est dit s'accorde sans peine avec les considérations générales que nous avons

exposées au § 1 ; en particulier, Maxwell admet (*) que la somme $\left(\frac{\delta u}{\delta x}+\frac{\delta v}{\delta y}+\frac{\delta w}{\delta z}\right)$ a une valeur, généralement différente de 0, qu'il désigne par $-4\pi\rho$; il ajoute seulement ces mots : „ Dans une large classe de phénomènes, qui comprend tous les cas où les courants sont uniformes, la quantité ρ disparaît. „

A la page suivante, en se fondant sur les propriétés électromagnétiques bien connues d'un courant fermé (**), Maxwell montre que les trois composantes u, v, w du flux de conduction peuvent se mettre sous la forme

$$(16)\qquad \left\{\begin{aligned} -u &= \frac{\delta\gamma}{\delta y}-\frac{\delta\beta}{\delta z},\\ -v &= \frac{\delta\alpha}{\delta z}-\frac{\delta\gamma}{\delta x},\\ -w &= \frac{\delta\beta}{\delta x}-\frac{\delta\alpha}{\delta y},\end{aligned}\right.$$

α, β, γ étant trois fonctions d'x, y, z qu'il nomme les composantes de l'*intensité magnétique ;* de ces égalités découle visiblement la relation (4) ; elles ne s'appliquent donc qu'aux flux uniformes ; cette conclusion ne doit point étonner, l'uniformité du courant étant postulée dans les prémisses mêmes du raisonnement qui donne les égalités (16).

Maxwell remarque cette conclusion, mais il n'a garde d'en déduire l'impossibilité de courants non uniformes : „ On peut observer, dit-il (***), que les équations précédentes donnent, par différentiation,

$$\frac{\delta u}{\delta x}+\frac{\delta v}{\delta y}+\frac{\delta w}{\delta z}=0,$$

ce qui est l'équation de continuité des courants uniformes. Par conséquent, nos recherches seront, pour le moment, limitées aux courants uniformes; d'ailleurs, nous savons peu de chose des

(*) J. Clerk Maxwell, SCIENTIFIC PAPERS, vol. I, p. 192.
(**) Nous reviendrons sur cette démonstration au Chapitre II. § 1.
(***) J. Clerk Maxwell, *loc. cit.*, p. 195.

effets magnétiques produits par des courants qui ne sont pas uniformes. »

C'est à partir du mémoire : *On physical Lines of Force* que s'introduit, dans l'œuvre de Maxwell, la distinction entre les courants de conduction et les courants de déplacement.

Au point (x, y, z), la vitesse instantanée moyenne de rotation de l'éther a pour composantes α, β, γ; cette vitesse représente (*), dans la théorie cinétique que Maxwell développe en ce mémoire, l'*intensité du champ magnétique;* posant alors

$$(17) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\delta\gamma}{\delta y} - \frac{\delta\beta}{\delta z} &= -\ 4\pi u, \\ \frac{\delta\alpha}{\delta z} - \frac{\delta\gamma}{\delta x} &= -\ 4\pi v, \\ \frac{\delta\beta}{\delta x} - \frac{\delta\alpha}{\delta y} &= -\ 4\pi w, \end{aligned} \right.$$

Maxwell admet (**) que u, v, w représentent, au point (x, y, z), les composantes du flux de conduction; *le flux de conduction est donc uniforme par définition.* Cette proposition n'a d'ailleurs rien qui puisse surprendre dans un écrit où, implicitement, la densité électrique vraie σ est toujours supposée égale à 0 et où, seule, est introduite la densité électrique fictive e, équivalente à la polarisation diélectrique.

Celle-ci est liée (***) aux composantes du flux total par l'équation de continuité :

$$(18) \quad \frac{\delta}{\delta x}(u + \bar{u}) + \frac{\delta}{\delta y}(v + \bar{v}) + \frac{\delta}{\delta z}(w + \bar{w}) + \frac{\delta e}{\delta t} = 0,$$

qui peut aussi bien s'écrire, à cause des égalités (17),

$$\frac{\delta \bar{u}}{\delta x} + \frac{\delta \bar{v}}{\delta y} + \frac{\delta \bar{w}}{\delta z} + \frac{\delta e}{\delta t} = 0.$$

Si donc, en ce mémoire, Maxwell définit les flux de conduction

(*) J. Clerk Maxwell, Scientific Papers, vol. I, p. 460.
(**) J. Clerk Maxwell, *loc. cit.*, vol. I, p. 462.
(***) J. Clerk Maxwell, *loc. cit.*, égalité (113), vol. I, p. 496.

comme étant essentiellement uniformes, il n'a garde de poser le même postulat touchant les flux de déplacement.

Il en est de même dans le mémoire : *A dynamical Theory of the electromagnetic Field;* à l'aide des lois connues de l'électromagnétisme, lois qui supposent essentiellement les courants fermés et uniformes, Maxwell établit (*) les équations (17), qu'il regarde comme s'appliquant à tous les courants de conduction; il admet donc par là que ces courants sont toujours uniformes. Mais il se garde bien d'étendre cette proposition au flux total; celui-ci vérifie (**) l'égalité (18), ce qui entraîne, pour le flux de déplacement, l'égalité (19).

Lorsque, dans ce même mémoire, Maxwell développe la théorie de la propagation, dans un milieu diélectrique, des flux de déplacement, il se garde bien de prétendre que ces flux soient toujours et nécessairement des flux transversaux, soumis à la condition

$$\frac{\delta \bar{u}}{\delta x} + \frac{\delta \bar{v}}{\delta y} + \frac{\delta \bar{w}}{\delta z} = 0.$$

Il admet, au contraire, qu'en chaque point la densité apparente e peut varier d'un instant à l'autre et il établit (***) la loi qui régit cette variation; toutefois, pour se débarrasser des flux longitudinaux qui se trouveraient ainsi introduits et qui entraveraient la théorie électromagnétique de la lumière, il ajoute ces mots : „ Si la substance est un isolant parfait, la densité e de l'électricité libre est indépendante du temps „. Rien dans les idées émises par Maxwell au cours de ce mémoire ou de ses écrits précédents ne justifie cette conclusion; la densité e, liée aux variations du déplacement électrique, n'y dépend en aucune façon du courant de conduction.

La théorie électromagnétique de la lumière, cependant, exige que les flux de déplacement dans un diélectrique non conducteur se propagent suivant les mêmes lois que les petits mouvements dans un solide élastique et non compressible; les principes posés par Maxwell dans ses divers mémoires ne satisfont pas à cette

(*) J. Clerk Maxwell, Scientific Papers, vol. I, p. 557.
(**) Ibid., p. 561, égalité (H).
(***) J. Clerk Maxwell, *loc. cit.*, vol. I, p. 582.

exigence ; il n'en est pas de même de la singulière théorie que Maxwell développe en son *Traité d'Électricité et de Magnétisme*, et que nous avons nommée sa *troisième Électrostatique.*

Il n'existe nulle part d'autre charge électrique que la charge fictive due à la polarisation diélectrique, d'autre densité que les densités e, E ; c'est à ces densités que les composantes du flux de conduction seront reliées par les relations de continuité prises sous leur forme habituelle. En tout point d'un milieu continu, on aura (*)

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial e}{\partial t} = 0. \tag{19}$$

En tout point d'une surface de discontinuité, on aura (**)

$$\begin{aligned} u_1 \cos(N_1, x) + v_1 \cos(N_1, y) + w_1 \cos(N_1, z) \\ + u_2 \cos(N_2, x) + v_2 \cos(N_2, y) + w_2 \cos(N_2, z) + \frac{\partial E}{\partial t} = 0. \end{aligned} \tag{20}$$

Mais, d'autre part, les densités e, E sont liées aux composantes A, B, C, de l'intensité de polarisation diélectrique, que Maxwell désigne par f, g, h et nomme composantes du *déplacement;* la relation entre ces quantités est donnée par les égalités suivantes, que nous avons commentées dans la première partie de cet écrit (***) et que Maxwell a soin de rappeler (IV) auprès des égalités que nous venons d'écrire :

$$e = \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}, \tag{21}$$

$$\begin{aligned} E = A_1 \cos(N_1, x) + B_1 \cos(N_1, y) + C_1 \cos(N_1, z) \\ + A_2 \cos(N_2, x) + B_2 \cos(N_2, y) + C_2 \cos(N_2, z). \end{aligned} \tag{22}$$

(*) J. Clerk Maxwell, *Traité d'Électricité et de Magnétisme*, trad. française, t. I, p. 506, égalité (2). On observera que ce passage contredit ce que donne Maxwell à la p. 470, où il semble admettre que tout courant de conduction est uniforme, conformément à ses anciennes idées.

(**) J. Clerk Maxwell, *loc. cit.*, t. I, p. 510, égalité (5).

(***) 1re partie, égalités (91) et (92).

(IV) J. Clerk Maxwell, *Traité d'Électricité et de Magnétisme*, trad. française, t. I, p. 506, égalité (1) et p. 510, égalité (4).

Différentions ces égalités par rapport à t, en tenant compte des égalités (3) qui définissent les flux de déplacement, et nous trouvons

$$(23) \qquad \frac{\delta \bar{u}}{\delta x} + \frac{\delta \bar{v}}{\delta y} + \frac{\delta \bar{w}}{\delta z} - \frac{\delta e}{\delta t} = 0,$$

$$(24) \qquad \bar{u}_1 \cos(N_1, x) + \bar{v}_1 \cos(N_1, y) + \bar{w}_1 \cos(N_1, z) + \bar{u}_2 \cos(N_2, x) + \bar{v}_2 \cos(N_2, y) + \bar{w}_2 \cos(N_2, z) - \frac{\delta E}{\delta t} = 0.$$

Comme on devait s'y attendre, ces égalités diffèrent par le signe des termes en $\frac{\delta e}{\delta t}$, $\frac{\delta E}{\delta t}$, des égalités (10) et (11), qui découlent de la théorie habituelle de la polarisation diélectrique et que Maxwell admettait, avant d'avoir conçu l'électrostatique particulière qui est développée en son *Traité*.

Ajoutons membre à membre les égalités (19) et (23) d'une part, les égalités (20) et (24) d'autre part; nous trouvons en tout point d'un milieu continu, l'égalité

$$(25) \qquad \frac{\delta}{\delta x}(u + \bar{u}) + \frac{\delta}{\delta y}(v + \bar{v}) + \frac{\delta}{zQ}(w + \bar{w}) = 0$$

et, en tout point d'une surface de discontinuité, l'égalité

$$(26) \qquad (u_1 + \bar{u}_1)\cos(N_1, x) + (v_1 + \bar{v}_1)\cos(N_1, y) + (w_1 + \bar{w}_1)\cos(N_1, z) + (u_2 + \bar{u}_2)\cos(N_2, x) + (v_2 + \bar{v}_2)\cos(N_2, y) + (w_2 + \bar{w}_2)\cos(N_2, z) = 0.$$

Ainsi donc, la dernière théorie électrostatique adoptée par Maxwell entraîne les conséquences suivantes :

Non seulement, au sein d'un milieu continu, les composantes du flux total vérifient la même relation que les composantes du flux au sein d'un liquide incompressible, mais encore, à la surface de séparation de deux milieux différents, le flux total n'éprouve aucun changement brusque ni de grandeur, ni de direction. Le flux total, en tout système, correspond à un courant fermé et uniforme.

Dès l'instant où Maxwell conçut sa troisième électrostatique, il entrevit cette conséquence, si favorable à ses idées sur la théorie

électromagnétique de la lumière. Dans une note (*), où il fait remarquer que la polarisation d'une lame diélectrique placée entre deux conducteurs se dirige du conducteur A, électrisé positivement, au conducteur B, électrisé négativement, remarque qui le conduisait forcément à sa troisième électrostatique, puisqu'il n'admettait d'autre électrisation que l'électrisation fictive, il ajoutait : « Si les deux conducteurs en question sont réunis par un fil, un courant parcourra ce fil de A vers B. En même temps, il se produira dans le diélectrique une diminution du déplacement; cette diminution sera équivalente, au point de vue électromagnétique, à un courant qui traverserait le diélectrique de B vers A. Selon cette manière de voir, le courant que l'on obtient en déchargeant un condensateur parcourt un circuit fermé. »

Plus tard, dans son *Traité d'Électricité et de Magnétisme,* Maxwell reprend (**) les mêmes considérations avec plus de développements :

« Considérons, dit-il, un condensateur formé de deux plateaux conducteurs A et B, séparés par une couche de diélectrique C. Soit W un fil conducteur joignant A et B, et supposons que, par l'action d'une force électromotrice, une quantité Q d'électricité positive soit transportée de B vers A... En même temps qu'une quantité d'électricité Q est transportée par la force électromotrice le long du fil de B en A, en traversant toutes les sections du fil, une quantité égale d'électricité traverse toutes les sections du diélectrique de A vers B, en vertu du déplacement électrique. »

« Un mouvement inverse de l'électricité se produira pendant la décharge du condensateur. Dans le fil, la décharge est Q de A vers B; dans le diélectrique, le déplacement disparaît, et une quantité Q traverse toutes les sections de B vers A. »

« Tous les cas d'électrisation et de décharge peuvent donc être considérés comme des mouvements s'exécutant dans un circuit

(*) J. Clerk Maxwell, *On a method of making a direct comparison of electrostatic with electromagnetic force; with a note on the electromagnetic theory of light,* lu à la Société Royale de Londres le 18 juin 1868 (Philosophical Transactions, vol. CLVIII. — Scientific Papers, vol. II, p. 139).

(**) J. Clerk Maxwell, *Traité d'Électricité et de Magnétisme,* trad. française, t. I, p. 71.

fermé tel qu'au même instant, il passe dans chaque section la même quantité d'électricité; il en est ainsi, non seulement dans le circuit voltaïque, pour lequel la chose avait toujours été reconnue, mais aussi dans les cas où l'on supposait généralement que l'électricité s'accumulait en certains points. „

" Nous sommes ainsi conduits à une conséquence très remarquable de la théorie que nous examinons; à savoir que les mouvements de l'électricité sont semblables à ceux d'un fluide incompressible... „

Ce passage est suivi, dans le *Traité* de Maxwell, de la phrase que voici : " ... C'est-à-dire qu'à chaque instant il doit entrer dans un espace fermé quelconque autant d'électricité qu'il en sort. „

En écrivant cette phrase, Maxwell oublie, pour un instant, le sens très particulier qu'a, dans sa dernière théorie, cette proposition : *le flux total est uniforme,* pour lui restituer le sens qu'elle a dans l'esprit de la plupart des physiciens, qu'elle avait dans ses premiers écrits. Mais c'est là une inadvertance manifeste. Il est bien vrai que les composantes du flux total vérifient les relations (25) et (26), analogues à celles qui caractérisent un écoulement uniforme; mais il n'est pas vrai que la quantité d'électricité contenue dans un espace donné soit toujours invariable, ni que les quantités $\frac{\partial e}{\partial t}$, $\frac{\partial E}{\partial t}$ soient partout égales à 0; c'est un des caractères paradoxaux de la dernière théorie de Maxwell, que l'uniformité du flux total n'entraîne nullement l'invariabilité de la distribution électrique ni des actions électrostatiques.

Toutefois, s'il n'est pas vrai que la quantité d'électricité contenue dans une surface fermée demeure toujours invariable, cette proposition devient vraie lorsque la surface fermée ne contient que des flux de déplacement, sans trace de flux de conduction — ou bien encore que des flux de conduction, sans trace de flux de déplacement; il suffit, pour s'en convaincre, de jeter les yeux soit sur les égalités (19) et (20), soit sur les égalités (21) et (22). Donc lorsque Maxwell, développant, en son *Traité,* la théorie électromagnétique de la lumière, écrit (*) : " Si le milieu n'est pas conducteur... la

(*) J. Clerk Maxwell, *Traité d'Électricité et de Magnétisme,* trad. française, t. II, p. 488.

densité en volume de l'électricité libre est indépendante de *t* „, il affirme une conséquence nécessaire de la doctrine développée en ce *Traité*; tandis que la même phrase, écrite par lui, à la même occasion, en son mémoire : *A dynamical Theory of the electromagnetic Field,* y constituait un paralogisme, en contradiction avec les idées admises au cours de ce mémoire.

Mais si la distribution électrique ne peut varier au sein d'un corps conducteur non diélectrique, non plus qu'au sein d'un diélectrique non conducteur, cette distribution peut varier d'un instant à l'autre à la surface par laquelle un milieu conducteur confine à un milieu diélectrique; ces variatious donnent lieu aux phénomènes de charge et de décharge que l'on étudie en électrostatique.

§ 4. *Retour à la troisième électrostatique de Maxwell. Jusqu'à quel point on peut la mettre d'accord avec l'électrostatique classique.*

Maxwell, nous l'avons vu [Ire Partie, Chapitre IV, § 3] évite, en sa troisième électrostatique, d'établir entre la fonction Ψ et les densités *e*, E, aucune relation autre que les égalités (103) et (105) ; dès lors, on serait porté à croire qu'il est permis de répéter ici tout ce que nous avons dit en la Ire Partie, Chapitre III, § 4 ; de dénoncer comme illusoire la troisième électrostatique de Maxwell ; de déclarer qu'elle ne renferme pas les éléments nécessaires pour mettre en équation le moindre problème de distribution électrique.

On serait d'autant plus tenté de formuler semblable jugement que, dans son *Traité d'Électricité et de Magnétisme,* Maxwell ne fait aucun usage de cette électrostatique ; il ne reprend même pas la solution des deux problèmes que, dans ses mémoires : *On physical Lines of Force* et *A dynamical Theory of the electromagnetic Field,* il avait tenté de résoudre ; il ne traite ni la théorie du condensateur, ni la théorie des forces qui s'exercent entre des corps électrisés.

Sans doute, en son *Traité,* se lisent bien des chapitres ou des parties de chapitre qui traitent de la distribution électrique ou des forces électrostatiques. Mais les raisonnements qu'on y développe, les formules qu'on y emploie, ne découlent en aucune façon de l'électrostatique particulière dont nous avons analysé les prin-

cipes; les uns et les autres dépendent de l'électrostatique fondée sur les lois de Coulomb, de l'électrostatique classique créée par Poisson.

Cependant, le jugement que nous venons d'esquisser serait injuste; on peut, dans le système de Maxwell, obtenir une mise en équation du problème électrostatique; il suffit d'introduire des suppositions convenables qui remplaceront l'expression analytique de la fonction potentielle déduite, dans la théorie ordinaire, des lois de Coulomb.

Et d'abord, à l'intérieur d'un corps conducteur, les composantes du flux de conduction sont proportionnelles aux composantes de la force électromotrice; pour qu'il y ait équilibre, il faut que les premières s'annulent et, partant les secondes, ce qu'expriment les égalités

$$\frac{\delta \Psi}{\delta x} = 0, \qquad \frac{\delta \Psi}{\delta y} = 0, \qquad \frac{\delta \Psi}{\delta z} = 0.$$

Sur une même masse conductrice, la fonction Ψ aura, en tout point, la même valeur.

A l'intérieur d'un corps non conducteur, le flux de conduction est partout nul. Dès lors, les égalités (25) et (26) deviennent

$$\frac{\delta \bar{u}}{\delta x} + \frac{\delta \bar{v}}{\delta y} + \frac{\delta \bar{w}}{\delta z} = 0,$$

$$\begin{aligned} &\bar{u}_1 \cos(N_1, x) + \bar{v}_1 \cos(N_1, y) + \bar{w}_1 \cos(N_1, z) \\ + &\bar{u}_2 \cos(N_2, x) + \bar{v}_2 \cos(N_2, y) + \bar{w}_2 \cos(N_2, z) = 0 \end{aligned}$$

ou bien, en vertu des égalités (23) et (24),

$$\frac{\delta e}{\delta t} = 0, \qquad \frac{\delta E}{\delta t} = 0.$$

A l'intérieur d'un corps isolant continu ou à la surface de contact de deux corps isolants différents, la distribution électrique est invariable. On postulera alors, en général, que les deux densités sont égales à 0 :

$$e = 0, \qquad E = 0.$$

A la vérité, ce postulat ne se trouve pas explicitement énoncé dans les écrits de Maxwell, mais on peut dire qu'il s'y trouve implicitement ; à chaque instant, Maxwell, nous l'avons vu, répète que la charge électrique, effet résiduel de la polarisation, ne se fait pas sentir à l'extérieur du diélectrique, mais seulement à la surface de contact du conducteur et du diélectrique; d'ailleurs nous avons cité des passages de Faraday et de Mossotti où ces auteurs exprimaient une opinion semblable. On interprétera donc la pensée de Maxwell sans la fausser en exprimant que les deux densités électriques sont nulles en tout milieu isolant.

Dans la théorie classique, il convient de le remarquer, on est obligé d'introduire un postulat qui a des analogies avec le précédent; là, à côté de la polarisation diélectrique et de la charge électrique *fictive* qui lui est équivalente, on considère une charge électrique *vraie;* sur un corps non conducteur, cette dernière affecte une distribution invariable que, dans chaque problème, on doit regarder comme donnée ; et, dans la plupart des cas, on suppose que la charge électrique vraie est nulle en tout point des corps isolants que l'on considère; mais cette hypothèse ne préjuge rien sur l'électrisation fictive et sur la polarisation à laquelle elle équivaut.

Dans le système de Maxwell, on ne rencontre plus de charge électrique vraie à côté de la charge électrique apparente qui équivaut à la polarisation diélectrique ; cette dernière seule existe. C'est à elle qu'appartient, sur les corps mauvais conducteurs, le caractère d'invariabilité, attribué par la théorie classique, à la charge électrique vraie ; c'est elle qui doit être regardée comme une donnée.

Si l'on égale à 0 les densités e, E, les égalités (103) et (104) de la première partie se transforment en l'égalité

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(K\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(K\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right)=0,$$

vérifiée en tout point d'un milieu isolant continu, et en l'égalité

$$K_1\frac{\partial \Psi}{\partial N_1}+K_2\frac{\partial \Psi}{\partial N_2}=0,$$

vérifiée à la surface de séparation de deux milieux isolants distincts.

On obtient ainsi des équations propres à déterminer la fonction Ψ; et qui plus est, ces équations sont celles qui serviraient à déterminer la fonction potentielle électrostatique, selon la théorie classique, dans un système où chaque diélectrique aurait un pouvoir inducteur spécifique proportionnel à K.

L'analogie entre la théorie de Maxwell et la théorie classique est complète, dans le cas où des conducteurs sont plongés dans *un seul diélectrique homogène.* Dans ce cas, la fonction Ψ, constante à l'intérieur de chaque conducteur, doit vérifier dans l'espace interposé l'égalité $\Delta\Psi = 0$; une fois déterminée par ces conditions, la fonction Ψ détermine à son tour la densité superficielle à la surface de chaque conducteur par l'égalité (104) de la première Partie, qui devient

$$\frac{\delta\Psi}{\delta N_e} = -\frac{4\pi}{K} E.$$

Il est clair, dès lors, que l'on peut écrire

$$\Psi = \frac{1}{K} \int \frac{E}{r} dS,$$

l'intégrale s'étendant à toutes les surfaces électrisées. L'énergie électrostatique a alors pour valeur

$$U = \frac{1}{2} \int \Psi E dS$$

ou bien

$$U = \frac{1}{2K} \int\int \frac{EE'}{r} dS\, dS'.$$

Comparons ces formules avec celles que donneraient les théories classiques, dont les principes sont rappelés au Chapitre Ier de la première Partie.

Supposons que, dans un milieu impolarisable, deux charges électriques q et q', séparées par la distance r, se repoussent avec une force $\epsilon \frac{qq'}{r^2}$. Désignons par F le coefficient de polarisation du

milieu diélectrique et par V la fonction potentielle électrostatique totale que désigne, au Chapitre indiqué, la somme $(V + \overline{V})$. Soit Σ la densité superficielle réelle de l'électricité; elle correspond à une densité tótale, tant réelle que fictive,

$$\Delta = \frac{\Sigma}{1 + 4\pi\epsilon F}.$$

La fonction V, constante sur chaque corps conducteur, est harmonique au sein du diélectrique; il en est évidemment de même de la fonction $\frac{\epsilon V}{1 + 4\pi\epsilon F}$.

On a d'ailleurs, à la surface de contact d'un conducteur et du diélectrique,

$$\frac{\partial V}{\partial N_e} = - 4\pi\Delta,$$

ce qui peut s'écrire

$$\frac{\partial}{\partial N_e} \frac{\epsilon V}{1 + 4\pi\epsilon F} = - \frac{4\pi\epsilon}{(1 + 4\pi\epsilon F)^2} \Sigma.$$

Enfin, l'énergie électrostatique a pour valeur

$$U = \frac{\epsilon}{2} \int\int \frac{\Delta\Delta'}{r} dS\, dS',$$

ce qui peut s'écrire

$$U = \frac{\epsilon}{2(1 + 4\pi\epsilon F)^2} \int\int \frac{\Sigma\Sigma'}{r} dS\, dS'.$$

On voit que l'on passera des formules de Maxwell à celles-ci si l'on remplace

E	par	Σ,
Ψ	"	$\frac{\epsilon V}{1 + 4\pi\epsilon F}$,
Ψ	"	$\frac{(1 + 4\pi\epsilon F)^2}{\epsilon}$.

L'analogie des deux théories est alors complète.

L'analogie entre la théorie de Maxwell et la théorie classique n'est plus aussi complète dans le cas où le système renferme un diélectrique hétérogène ou plusieurs diélectriques distincts.

Supposons que des conducteurs 1 soient plongés dans un milieu diélectrique homogène et indéfini 0, et que, dans ce milieu, se trouve un autre corps diélectrique, également homogène, 2; aux diélectriques 0 et 2 correspondent des valeurs K_0, K_2 du coefficient K.

La fonction Ψ, qui est continue dans tout l'espace et constante à l'intérieur de chacun des conducteurs, vérifie l'équation $\Delta\Psi = 0$ aussi bien à l'intérieur du diélectrique 0 que du diélectrique 2.

A la surface de séparation du diélectrique 0 et du diélectrique 2, elle vérifie la relation

$$(a) \qquad K_0 \frac{\partial \Psi}{\partial N_0} + K_1 \frac{\partial \Psi}{\partial N_1} = 0.$$

A la surface de contact du corps 1 et du diélectrique 0 se trouve une densité superficielle E_{10} donnée par l'égalité

$$(b) \qquad E_{10} = -\frac{K_0}{4\pi} \frac{\partial \Psi}{\partial N_0}.$$

Enfin, l'énergie électrostatique a pour valeur

$$(c) \qquad U = \frac{1}{2} \int \Psi E_{10}\, dS_{10}.$$

Comparons ces relations avec celles que donne la théorie classique.

La fonction V, continue dans tout l'espace, constante à l'intérieur des conducteurs, est harmonique au sein des diélectriques.

A la surface de contact des diélectriques 0 et 2, on a

$$(\alpha) \qquad (1 + 4\pi\epsilon F_0) \frac{\partial V}{\partial N_0} + (1 + 4\pi\epsilon F_2) \frac{\partial V}{\partial N_2} = 0.$$

A la surface de contact du conducteur 1 et du diélectrique 0 se trouve une densité superficielle réelle

$$(\beta) \qquad \Sigma_{10} = -\frac{1 + 4\pi\epsilon F_0}{4\pi}\frac{\delta V}{\delta N_0}.$$

A la surface de contact des deux diélectriques se trouve une densité superficielle, purement fictive,

$$(\beta') \qquad \Delta_{20} = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\delta V}{\delta N_0} + \frac{\delta V}{\delta N_2}\right)$$

$$= -\frac{\epsilon(F_2 - F_0)}{1 + 4\pi\epsilon F_2}\frac{\delta V}{\delta N_0},$$

et cette densité n'est pas nulle, en général, si F_2 n'est pas égal à F_0.

Enfin, l'énergie électrostatique a pour valeur

$$U = \frac{\epsilon}{2}\int V\Delta_{10}\,dS_{10} + \frac{\epsilon}{2}\int V\Delta_{20}\,dS_{20}$$

ou

$$(\gamma) \qquad U = \frac{\epsilon}{2(1 + 4\pi\epsilon F_0)}\int V\Sigma_{10}\,dS_{10} + \frac{\epsilon}{2}\int V\Delta_{20}\,dS_{20}.$$

Peut-on passer du premier groupe de formules au second en remplaçant E_{10} par Σ_{10} et Ψ par λV, λ étant une constante convenablement choisie ?

La comparaison des égalités (*b*) et (β) donnerait

$$(1 + 4\pi\epsilon F_0) = K_0\lambda.$$

Celle des égalités (*a*) et (α) donnerait

$$\frac{1 + 4\pi\epsilon F_2}{1 + 4\pi\epsilon F_0} = \frac{K_2}{K_0}.$$

On aurait donc, d'une manière générale,

$$K\lambda = (1 + 4\pi\epsilon F).$$



L'égalité (c) deviendrait

$$U = \frac{\lambda}{2} \int V\Sigma_{10}\, dS_{10}.$$

Si nous posions

$$\lambda = \frac{\epsilon}{1 + 4\pi\epsilon F_0},$$

nous retrouverions le premier terme de l'expression (γ), mais point le second.

Nous arrivons donc à la conclusion suivante :

Si 0 désigne le milieu polarisable éthéré où tous les corps sont censés plongés ; si F_0 est le coefficient de polarisation diélectrique de ce milieu ; si F_2 est le coefficient de polarisation diélectrique du corps plongé dans ce milieu ; si, enfin, dans les équations de la troisième électrostatique de Maxwell on remplace :

La densité électrique E à la surface des conducteurs	par la densité électrique réelle Σ,
La fonction Ψ	par la fonction $\frac{\epsilon V}{1 + 4\pi\epsilon F_0}$, où V est la fonction potentielle électrostatique,
Le coefficient K_0	par $\frac{(1 + 4\pi\epsilon F_0)^2}{\epsilon}$,
Le coefficient K_2	par $\frac{(1 + 4\pi\epsilon F_0)(1 + 4\pi\epsilon F_2)}{\epsilon}$,
Partant, le rapport $\frac{K_2}{K_0}$	par $\frac{1 + 4\pi\epsilon F_2}{1 + 4\pi\epsilon F_0}$,

on retrouve les formules par lesquelles l'électrostatique classique détermine la valeur de la fonction potentielle en tout le système et la distribution réelle de l'électricité sur les conducteurs, en sorte que, pour ces problèmes, les deux électrostatiques fournissent des solutions équivalentes.

L'équivalence se poursuit si l'on veut étudier les forces pondéromotrices produites entre conducteurs électrisés dans un système qui ne renferme pas d'autre diélectrique que le milieu 0.

Mais s'il existe un autre diélectrique 2, la transformation précédente, appliquée à l'énergie électrostatique de Maxwell, ne donne pas l'énergie électrostatique classique; il y manque le terme

$$\frac{\epsilon}{2}\int V\Delta_{20}\, dS_{20} = -\frac{\epsilon}{8\pi}\int V\left(\frac{\delta V}{\delta N_0}+\frac{\delta V}{\delta N_2}\right)dS_{20}$$
$$= -\frac{\epsilon\,(F_2-F_0)}{1+4\pi\epsilon F_2}\int V\frac{\delta V}{\delta N_0}\,dS_{20}$$

qui s'écrirait aussi, en vertu des équivalences que nous venons d'indiquer,

$$-\frac{\epsilon}{8\pi\lambda^2}\int \Psi\left(\frac{\delta\Psi}{\delta N_0}+\frac{\delta\Psi}{\delta N_2}\right)dS_{20} = -\frac{(1+4\pi\epsilon F_0)^2}{8\pi\epsilon}\int \Psi\left(\frac{\delta\Psi}{\delta N_0}+\frac{\delta\Psi}{\delta N_2}\right)dS_{20}$$
$$= -\frac{K_0}{8\pi}\int \Psi\left(\frac{\delta\Psi}{\delta N_0}+\frac{\delta\Psi}{\delta N_2}\right)dS_{20}$$
$$= -\frac{K_2-K_0}{8\pi}\int \Psi\frac{\delta\Psi}{\delta N_2}\,dS_{20}$$
$$= \frac{K_2-K_0}{8\pi}\int_2\left[\left(\frac{\delta\Psi}{\delta x}\right)^2+\left(\frac{\delta\Psi}{\delta y}\right)^2+\left(\frac{\delta\Psi}{\delta z}\right)^2\right]d\omega_2.$$

On voit que ce terme ne peut être nul, si le champ électrique n'est pas nul et si le diélectrique 2 diffère du milieu 0.

La présence ou l'absence de ce terme différenciera la loi des forces pondéromotrices qui s'exercent dans le système considéré selon la doctrine classique ou selon la doctrine de Maxwell.

Or, les recherches de M. Gouy (*), qui sont d'ailleurs sur ce point une suite naturelle des nôtres (**), ont montré que la doctrine classique rendait parfaitement compte des actions observées entre conducteurs et diélectriques par divers physiciens, notamment par M. Pellat. Il faut en conclure qu'en général, ces actions ne s'accordent pas avec l'électrostatique de Maxwell.

(*) Gouy, Journal de Physique, 3e série, t. V, p. 154, 1896.

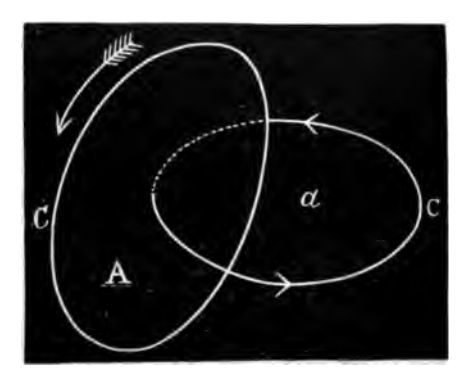
(**) P. Duhem, *Leçons sur l'Électricité et le Magnétisme*, t. II, 1892.

CHAPITRE II

Les six équations de Maxwell et l'énergie électromagnétique

§ 1. *Les trois relations entre les composantes du champ électrique et les composantes du flux*

Supposons qu'un courant électrique uniforme parcoure un fil disposé selon le contour C d'une aire A; regardons cette aire de telle façon que nous voyons le courant circuler en sens contraire des aiguilles d'une montre; nous regarderons la face *positive* de l'aire A (fig. 1).



Si un pôle magnétique, renfermant l'unité de magnétisme austral, est placé en présence de ce courant, il est soumis à une force dont α, β, γ, sont les composantes; cette force est ce que Maxwell nomme la *force magnétique*, ce que, plus justement, on nomme aujourd'hui le *champ magnétique*.

Supposons que ce pôle unité décrive une courbe fermée *c*, que cette courbe perce une et une seule fois l'aire A, et qu'elle la perce

en passant de la face négative à la face positive; la force à laquelle le pôle est soumis effectue un certain travail que représente l'intégrale

$$\int_c (\alpha\, dx + \beta\, dy + \gamma\, dz)$$

étendue à la courbe fermée *c*.

Les lois de l'électromagnétisme, établies par Biot et Savart, par Laplace, par Ampère et par Savary, font connaître les propriétés des grandeurs α, β, γ. Ces lois conduisent à la conséquence suivante :

Le travail dont nous venons de donner l'expression ne dépend ni de la forme de la courbe *c*, ni de la forme de la courbe C; il ne dépend que de l'intensité du courant qui parcourt la courbe C; si cette intensité J est mesurée en unités électromagnétiques, il a pour valeur $4\pi J$:

$$(27) \qquad \int_c (\alpha\, dx + \beta\, dy + \gamma\, dz) = 4\pi J.$$

Cette égalité peut s'interpréter un peu autrement. Supposons que la courbe *c* soit le contour d'une aire *a*. Si nous regardons l'aire *a* de telle sorte que nous voyons le pôle d'aimant tourner en sens inverse des aiguilles d'une montre, nous dirons que nous regardons la *face positive* de l'aire *a*.

Il est clair que le courant qui parcourt le fil C perce l'aire *a* en passant du côté négatif au côté positif; et comme, au travers de chaque section du fil C, il transporte dans le temps *dt*, une quantité $dQ = J dt$ d'électricité positive, on peut dire que l'aire *a* est traversée, pendant le temps *dt*, du côté négatif au côté positif, par une quantité d'électricité positive $dQ = J dt$. L'égalité (27) peut donc s'écrire

$$(28) \qquad dt \int_c (\alpha\, dx + \beta\, dy + \gamma\, dz) = 4\pi dQ.$$

Cette égalité s'étend sans peine au cas où le champ renferme un nombre quelconque de fils parcourus par des courants fermés et uniformes. Si une courbe fermée *c*, parcourue dans un sens déter-

miné, est le contour d'une aire a et si dQ est la quantité d'électricité positive qui, dans le temps dt, perce l'aire a du côté négatif au côté positif, l'égalité (28) demeure exacte.

La démonstration suppose que la courbe c n'a aucun point commun avec les fils conducteurs qui transportent l'électricité; pour affranchir l'égalité (28) de cette restriction, certaines précautions seraient nécessaires; sans s'y attarder, Maxwell admet que l'égalité (28) s'étend même au cas où la courbe fermée c est tracée au sein d'un corps que des flux électriques parcourent d'une manière continue.

Dans ce dernier cas, la quantité dQ se relie simplement à ces flux.

Soient $d\sigma$ un élément de l'aire a; u, v, w les composantes du flux électrique en ce point; N la normale à cet élément, menée dans un sens tel qu'elle perce l'aire a du côté négatif au côté positif; dans le même sens, et pendant le temps dt, l'aire $d\sigma$ livre passage à une quantité d'électricité

$$[u \cos (N, x) + v \cos (N, y) + w \cos (N, z)]\, d\sigma\, dt$$

et l'aire a tout entière à une quantité d'électricité

$$dt \int_a [u \cos (N, x) + v \cos (N, y) + w \cos (N, z)]\, d\sigma = dQ.$$

L'égalité (28) devient donc

$$(29) \quad \int (\alpha dx + \beta dy + \gamma dz) - 4\pi \int_a [u \cos (N,x) + v \cos (N,y) + w \cos (N,z)]\, d\sigma = 0.$$

Or, une formule souvent employée par Ampère et dont la forme générale est due à Stokes permet d'écrire

$$\int_c (\alpha\, dx + \beta\, dy + \gamma\, dz) = - \int_a \Big[\left(\frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z}\right) \cos (N, x) + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial x}\right) \cos (N, y) + \left(\frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y}\right) \cos (N, z) \Big]\, d\sigma.$$

L'égalité (29) peut donc s'écrire

$$\int_a \left[\left(\frac{\delta\gamma}{\delta y} - \frac{\delta\beta}{\delta z} + 4\pi u\right)\cos(N, x) + \left(\frac{\delta\alpha}{\delta z} - \frac{\delta\gamma}{\delta x} + 4\pi v\right)\cos(N, y) + \left(\frac{\delta\beta}{\delta x} - \frac{\delta\alpha}{\delta y} + 4\pi w\right)\cos(N, z)\right] d\sigma = 0.$$

Cette égalité doit être vraie pour toute aire a tracée à l'intérieur du corps que parcourent les flux électriques. Pour cela, on le voit sans peine, il faut et il suffit que l'on ait, en tout point de ce corps, les trois égalités

$$(30) \quad \left\{\begin{array}{l} \frac{\delta\gamma}{\delta y} - \frac{\delta\beta}{\delta z} = -4\pi u, \\ \frac{\delta\alpha}{\delta z} - \frac{\delta\gamma}{\delta x} = -4\pi v, \\ \frac{\delta\beta}{\delta x} - \frac{\delta\alpha}{\delta y} = -4\pi w. \end{array}\right.$$

Ces trois équations, auxquelles Maxwell attribue un rôle essentiel, se trouvent établies, dans son plus ancien mémoire (*) sur l'électricité, par une démonstration que de simples nuances distinguent de la précédente; cette démonstration il la reproduit (**) ou l'esquisse (***) dans tous ses écrits ultérieurs.

Dans son mémoire : *On Faraday's Lines of Force,* Maxwell fait suivre les équations (30) de la remarque que voici : « Nous pouvons observer que les équations précédentes donnent par différentiation

$$\frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta v}{\delta y} + \frac{\delta w}{\delta z} = 0,$$

(*) J. Clerck Maxwell, *On Faraday's Lines of Force* (Scientific Papers, vol. I, p. 194). En réalité, dans ce mémoire, Maxwell omet le facteur 4π; en outre les signes des seconds membres sont changés par suite d'une orientation différente des axes des coordonnées.

(**) J. Clerk Maxwell, *On physical Lines of Force* (Scientific Papers, vol. I, p. 462). — *Traité d'Électricité et de Magnétisme,* trad. française, t. II, p. 285.

(***) J. Clerk Maxwell, *A dynamical Theory of the electromagnetic Field* (Scientific Papers, vol. I, p. 557).

ce qui est l'équation de continuité pour les courants fermés. Toutes nos investigations se borneront donc, à partir de ce moment, aux courants fermés; et nous connaissons peu de chose des effets magnétiques des courants qui ne seraient pas fermés. „

La condition d'uniformité, imposée aux courants dans les prémisses du raisonnement, se retrouve dans les conséquences; Maxwell qui, à l'époque où il écrivait les lignes précédentes, professait sur les courants électriques les mêmes idées que tous les physiciens, se garde bien d'en conclure que tous les courants soient nécessairement uniformes, mais seulement que l'application des équations (30) se doit limiter aux courants uniformes.

La même observation se retrouve dans le *Traité d'Électricité et de Magnétisme;* mais, selon la doctrine exposée dans ce Traité, si le flux de conduction et le flux de déplacement peuvent être séparément non uniformes, le flux total, obtenu par la composition des deux précédents, est toujours uniforme; les équations (30) seront donc exemptes de toute exception " si nous considérons u, v, w comme les composantes du flux électrique total comprenant la variation de déplacement électrique, aussi bien que la conduction proprement dite „. En d'autres termes, on pourra, en tout état de cause, écrire les relations

$$(31) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z} &= -4\pi (u + \bar{u}), \\ \frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial x} &= -4\pi (v + \bar{v}), \\ \frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y} &= -4\pi (w + \bar{w}). \end{aligned} \right.$$

§ 2. *L'état électrotonique et le potentiel magnétique dans le mémoire :* On Faraday's Lines of Force

Le groupe de trois équations que nous venons d'étudier ne constitue pas, à lui seul, tout l'électromagnétisme de Maxwell. Il est complété par une série de propositions essentielles. La forme de ces propositions, la suite de déductions et d'inductions qui les

fournit, varient d'un écrit à l'autre; nous devrons donc analyser successivement chacun des mémoires composés sur l'électricité par le physicien écossais; selon l'ordre chronologique, nous commencerons par le mémoire intitulé : *On Faraday's Lines of Force.*

Dans ce mémoire, comme dans ses autres écrits antérieurs au *Traité d'Électricité et de Magnétisme,* Maxwell ne tient jamais compte des surfaces de discontinuité que peut présenter le système; il faut donc, pour suivre sa pensée, supposer que deux milieux distincts sont toujours reliés par une *couche de passage* très mince, mais continue; il suffit que la remarque en ait été faite pour que toute difficulté soit écartée de ce côté.

Il n'en est pas de même des difficultés causées par les erreurs matérielles de calcul et, particulièrement, par les fautes de signe; elles sont incessantes dans le passage que nous nous proposons d'analyser et jettent quelque incertitude sur la pensée de l'auteur.

Aux composantes α, β, γ du *champ magnétique* qu'il nomme tantôt *force magnétique,* tantôt *intensité magnétique* et tantôt *force magnétisante effective,* Maxwell adjoint une autre grandeur, de composantes A, B, C (*), qu'il nomme *induction magnétique;* ce mot qui, dans des écrits plus récents, prendra un autre sens, désigne assurément ici la grandeur que l'on considère habituellement, dans la théorie du magnétisme, sous le nom d'*intensité d'aimantation;* conformément aux idées de Poisson, on doit avoir [1re Partie, égalité (2)]

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = -\rho, \qquad (32)$$

ρ étant la densité du fluide magnétique fictif, que Maxwell nomme la *matière magnétique réelle* (**).

(*) Nous ne conservons pas ici les notations de Maxwell.

(**) J. Clerk Maxwell, *On Faraday's Lines of Force* (Scientific Papers, vol. I, p. 192). En réalité, au lieu de ρ, Maxwell écrit $4\pi\rho$; en outre, dans le passage indiqué, le signe du second membre de l'égalité (32) est changé; mais il se trouve rétabli à la p. 201.

Entre les grandeurs A, B, C et les composantes α, β, γ du champ existent les relations

$$(33) \qquad A = \frac{\alpha}{K}, \qquad B = \frac{\beta}{K}, \qquad C = \frac{\gamma}{K},$$

où K désigne la *résistance à l'induction magnétique* (*); si l'on continue à rapprocher la théorie de Maxwell de la théorie de Poisson, on reconnaît que cette résistance est l'inverse du coefficient d'aimantation.

Soit V la fonction continue, nulle à l'infini, que définit l'équation

$$(34) \qquad \Delta V + 4\pi\rho = 0.$$

Cette fonction ne sera autre chose que la *fonction potentielle magnétique* introduite en physique par Poisson.

Considérons les différences

$$(35) \qquad \left\{ \begin{aligned} a &= A - \frac{1}{4\pi}\frac{\partial V}{\partial x}, \\ b &= B - \frac{1}{4\pi}\frac{\partial V}{\partial y}, \\ c &= C - \frac{1}{4\pi}\frac{\partial V}{\partial z}. \end{aligned} \right.$$

Selon les égalités (32) et (34), ces différences vérifieront la relation

$$(36) \qquad \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z} = 0.$$

Or un théorème d'analyse, souvent employé par Stokes, par Helmholtz, par W. Thomson, enseigne qu'à trois fonctions a, b, c,

(*) J. Clerk Maxwell, *loc. cit.*, p. 192.

liées par la relation (36), on peut toujours associer trois autres fonctions F, G, H, telles que l'on ait

$$(37)\quad \left\{\begin{aligned} a &= -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z}\right), \\ b &= -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x}\right), \\ c &= -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}\right) \end{aligned}\right.$$

et

$$(38)\quad \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = 0.$$

Dès lors, les égalités (35) peuvent s'écrire

$$(39)\quad \left\{\begin{aligned} 4\pi A &= \frac{\partial V}{\partial x} - \left(\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z}\right), \\ 4\pi B &= \frac{\partial V}{\partial y} - \left(\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x}\right), \\ 4\pi C &= \frac{\partial V}{\partial z} - \left(\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}\right). \end{aligned}\right.$$

Empruntant une dénomination par laquelle Faraday désignait une conception assez vague, Maxwell (*) donne aux quantités F, G, H le nom de *composantes de l'état électrotonique* au point (x, y, z).

Quel sera le rôle physique attribué à ces grandeurs ? L'étude du potentiel électromagnétique d'un système va nous l'apprendre.

Revenons aux équations (30).

Dans un système qui ne renferme pas de courant, où, par conséquent, u, v, w sont partout égaux à 0, ces équations nous enseignent que les composantes α, β, γ du champ magnétique sont les trois dérivées partielles d'une même fonction ; quelle est cette

(*) J. Clerk Maxwell, *loc. cit.*, p. 203 ; les quantités F, G, H sont désignées par α_0, β_0, γ_0.



fonction ? Guidé par la théorie classique, Maxwell admet (*) que c'est la fonction — V, en sorte que, dans un système qui renferme des aimants et point de courant, on a

$$(40) \qquad \alpha = -\frac{\delta V}{\delta x}, \qquad \beta = -\frac{\delta V}{\delta y}, \qquad \gamma = -\frac{\delta V}{\delta z}.$$

Lorsqu'un système d'aimants se meut, les forces qui s'exercent dans ce système, conformément aux lois classiques que Maxwell admet et que traduisent les égalités précédentes, effectuent un certain travail; selon un théorème bien connu, ce travail est la diminution subie par l'expression

$$\frac{1}{2}\int V\rho\, d\omega,$$

où l'intégrale s'étend à tous les éléments de volume $d\omega$ du système. Pourquoi Maxwell (**) omet-il le facteur $^1/_2$ et écrit-il ces lignes : « Le travail total produit durant un déplacement quelconque d'un système magnétique est égal au décroissement de l'intégrale

$$(41) \qquad \mathrm{E} = \int V\rho\, d\omega$$

étendue à tout le système, intégrale que nous nommerons le *potentiel total du système sur lui-même* » ? On n'y voit point de raison. Toujours est-il qu'il serait impossible de corriger cette erreur et de restituer à E sa véritable valeur sans ruiner, par le fait même, toute la déduction que nous voulons analyser. Passons donc condamnation sur cette erreur et poursuivons.

L'égalité (41) peut encore s'écrire, en vertu de l'égalité (32),

$$\mathrm{E} = -\int V\left(\frac{\delta A}{\delta x} + \frac{\delta B}{\delta y} + \frac{\delta C}{\delta z}\right)d\omega$$

ou

$$\mathrm{E} = \int \left(A\frac{\delta V}{\delta x} + B\frac{\delta V}{\delta y} + C\frac{\delta V}{\delta z}\right)d\omega$$

(*) J. Clerk Maxwell, *loc. cit.*, p. 202. En réalité, en ce passage, Maxwell dit V; mais à la page suivante, il rétablit un signe exact.

(**) J. Clerk Maxwell, *loc. cit.*, p. 203.

ou enfin (*), en vertu des égalités (40),

$$(42)\qquad E = -\int (A\alpha + B\beta + C\gamma)\, d\omega.$$

Maxwell admet (**) que cette expression du potentiel s'étend au cas où le système renferme non seulement des aimants, mais encore des courants. Faisant alors usage des égalités (39), l'égalité (42) peut s'écrire

$$(43)\qquad E = -\frac{1}{4\pi}\int\left(\alpha\frac{\partial V}{\partial x} + \beta\frac{\partial V}{\partial y} + \gamma\frac{\partial V}{\partial z}\right)d\omega$$
$$+\frac{1}{4\pi}\int\left[\left(\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z}\right)\alpha + \left(\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x}\right)\beta + \left(\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}\right)\gamma\right]d\omega.$$

On trouve sans peine, en vertu des égalités (40) et (34),

$$\int\left(\alpha\frac{\partial V}{\partial x} + \beta\frac{\partial V}{\partial y} + \gamma\frac{\partial V}{\partial z}\right)d\omega = -\int\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right]d\omega$$
$$= \int V\Delta V\, d\omega = -4\pi\int V\rho\, d\omega.$$

D'autre part, en tenant compte des égalités (30), on trouve

$$\int\left[\left(\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z}\right)\alpha + \left(\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x}\right)\beta + \left(\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}\right)\gamma\right]d\omega$$
$$= \int\left[\left(\frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z}\right)F + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial x}\right)G + \left(\frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y}\right)H\right]d\omega$$
$$= -4\pi\int (Fu + Gv + Hw)\, d\omega.$$

(*) J. Clerk Maxwell, *loc. cit.*, p. 203, change le signe du second membre.
(**) J. Clerk Maxwell, *loc. cit.*, p. 203.

L'égalité (43) devient donc (*)

$$(44) \qquad E = \int V\rho\, d\omega - \int (Fu + Gv + Hw)\, d\omega.$$

Parvenu à cette formule, Maxwell se propose de tirer du principe de la conservation de l'énergie les lois de l'induction électromagnétique, imitant, comme il le reconnaît (**), le raisonnement bien connu de Helmholtz dans son Mémoire : *Ueber die Erhaltung der Kraft.*

Imaginons, dit-il, que des causes extérieures lancent des courants dans le système. Ces causes *fournissent* du travail sous deux formes.

En premier lieu, elles surmontent la résistance que les conducteurs opposent au passage de l'électricité; si l'on désigne par E_x, E_y, E_z, les composantes du champ électromoteur en un point, le travail fourni dans ce but, pendant le temps dt, est

$$- dt \int (E_x u + E_y v + E_z w)\, d\omega.$$

En second lieu, elles fournissent du travail mécanique qui met le système en mouvement; le travail ainsi fourni pendant le temps dt est, par hypothèse, égal à l'accroissement de la quantité Q pendant le même temps; sans justifier l'omission du terme $\int V\rho\, d\omega$, Maxwell réduit (***) cet accroissement à

$$- dt \frac{d}{dt} \int (Fu + Gv + Hw)\, d\omega$$

ou bien encore, en supposant u, v, w invariables, à

$$- dt \int \left(\frac{dF}{dt} u + \frac{dG}{dt} v + \frac{dH}{dt} w\right) d\omega.$$

(*) J. Clerk Maxwell, *loc. cit.*, p. 203.
(**) J. Clerk Maxwell, *loc. cit.*, p. 204.
(***) J. Clerk Maxwell, *loc. cit.*, p. 204.

Si l'on suppose que les causes extérieures disparaissent, et que les courants soient exclusivement engendrés par l'induction que le système exerce sur lui-même, le travail fourni par ces causes extérieures doit être égal à 0, d'où l'égalité

$$dt \int \left(\frac{dF}{dt} u + \frac{dG}{dt} v + \frac{dH}{dt} w \right) d\omega + dt \int (E_x u + E_y v + E_z w) \, d\omega = 0$$

qui peut encore s'écrire

$$(45) \qquad \int \left[\left(\frac{dF}{dt} + E_x \right) u + \left(\frac{dG}{dt} + E_y \right) v + \left(\frac{dH}{dt} + E_z \right) w \right] d\omega = 0.$$

On vérifie cette égalité (45) si l'on pose

$$(46) \qquad E_x = -\frac{dF}{dt}, \qquad E_y = -\frac{dG}{dt}, \qquad E_z = -\frac{dH}{dt}.$$

Ces égalités, dont Maxwell (*) admet l'exactitude, relient les composantes du champ électromoteur d'induction aux composantes de l'état électrotonique.

§ 3. *Examen de la théorie précédente*

Ces égalités s'accordent-elles avec les lois connues de l'induction?

Maxwell n'a point donné l'expression analytique des fonctions F, G, H, non plus que de la fonction V et, partant, n'a pas développé les égalités (46) ; mais il est aisé de suppléer à son silence.

La fonction V étant, selon son sentiment maintes fois répété, la fonction potentielle magnétique, est donnée par l'égalité

$$(47) \qquad V(x, y, z) = \int \left(A_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_1} + B_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y_1} + C_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z_1} \right) d\omega_1.$$

(*) J. Clerk Maxwell, *loc. cit.*, p. 204.



Dès lors, les conditions attribuées aux fonctions F, G, H, les déterminent sans ambiguïté et donnent :

$$
(48) \quad \begin{cases}
F(x, y, z) = \int \left(C_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y_1} - B_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z_1} \right) d\omega_1, \\
G(x, y, z) = \int \left(A_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z_1} - C_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_1} \right) d\omega_1, \\
H(x, y, z) = \int \left(B_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_1} - A_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y_1} \right) d\omega_1.
\end{cases}
$$

Si, dans les équations (46), on reporte ces expressions des fonctions F, G, H, on trouve, pour les composantes du champ électromoteur d'induction, des expressions qui s'accordent fort exactement avec les lois connues, dans le cas où l'induction est produite par un changement d'aimantation sans que le système éprouve aucun mouvement. L'accord est moins parfait lorsque les aimants et les conducteurs se déplacent ; un terme manque, que d'ailleurs on rétablirait sans peine en cessant de traiter u, v, w comme invariables et en laissant constant seulement le flux électrique dont ces trois quantités sont les composantes. Mais une objection plus grave se dresse contre la théorie de Maxwell.

Si cette théorie, appliquée à un système en mouvement, y dénote l'existence de forces électromotrices d'induction, ces forces électromotrices présentent toutes ce caractère de s'annuler lorsque le système ne contient pas d'aimant; le mouvement de conducteurs traversés par des courants serait donc incapable d'engendrer aucun phénomène d'induction.

Cette seule conséquence suffit à condamner la théorie exposée par Maxwell dans son écrit : *On Faraday's Lines of Force.*

Ajoutons une remarque faute de laquelle le lecteur éprouverait quelque embarras en comparant les formules précédentes à celles de Maxwell.

En premier lieu, Maxwell, en écrivant les égalités (30), omet, au second membre le facteur 4π; ce facteur 4π, il l'introduit au contraire au second membre de l'égalité (32) et il nous faut indiquer brièvement combien est illogique cette introduction.

Elle a pour point de départ ce que, dans le mémoire en question, Maxwell dit des flux électriques (*).

Si u, v, w sont les composantes du flux en un point d'une surface fermée S, la quantité d'électricité qui pénètre dans cette surface pendant le temps dt est

$$dt \int]u \cos (N_i, x) + v \cos (N_i, y) + w \cos (N_i, z)] \, dS.$$

Une intégration par parties transforme cette expression en

$$(49) \qquad - dt \int \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) d\omega,$$

l'intégrale s'étendant au volume que limite la surface close; par une faute de signe évidente, Maxwell écrit

$$(49^{bis}) \qquad + dt \int \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) d\omega.$$

Si e désigne la densité électrique en un point intérieur à la surface S, l'intégrale (49) doit être égale à

$$dt \int \frac{\partial e}{\partial t} d\omega,$$

ce qui donne de suite l'équation de continuité

$$(50) \qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial e}{\partial t} = 0.$$

Maxwell n'écrit pas cette égalité; mais il écrit l'égalité (**)

$$(51) \qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 4\pi\rho,$$

sans y joindre aucune explication, sinon que ρ s'annule dans le cas des courants uniformes.

(*) J. Clerk Maxwell, *loc. cit.*, pp. 191-192.
(**) J. Clerk Maxwell, *loc. cit.*, p. 192, égalité (C).



Il est évidemment loisible de considérer une quantité ρ définie par cette égalité ; cette quantité ρ se trouvera être égale à $-\frac{1}{4\pi}\frac{\delta e}{\delta t}$; malheureusement, Maxwell semble supposer que la quantité ρ est précisément égale à $\frac{\delta e}{\delta t}$ et raisonner en conséquence ; il est probable que cette supposition le guide au cours de l'assimilation qu'il établit (*) entre la conductibilité électrique et l'aimantation et le conduit à relier les composantes de l'induction magnétique à la densité magnétique par l'égalité

$$(52) \qquad \frac{\delta A}{\delta x} + \frac{\delta B}{\delta y} + \frac{\delta C}{\delta z} = 4\pi\rho,$$

qu'il remplace d'ailleurs, quelques pages plus loin (**), par

$$(53) \qquad \frac{\delta A}{\delta x} + \frac{\delta B}{\delta y} + \frac{\delta C}{\delta z} = -4\pi\rho.$$

Nous aurons occasion plus loin de revenir sur cette égalité (52). Pour le moment, contentons-nous de remarquer que l'emploi des égalités (30) et (32) sous la forme que nous avons donnée fournit des formules qui, parfois, diffèrent de celles de Maxwell par l'introduction ou par la suppression d'un facteur 4π; mais cette modification n'altère pas, croyons-nous, l'esprit même de la théorie.

Il est, cependant, une dernière objection que l'on pourrait adresser à l'interprétation que nous avons donnée de cette théorie. Nous avons admis sans discussion que l'*induction magnétique* dont parle Maxwell devait être identifiée ici avec l'*intensité d'aimantation* telle qu'elle a été définie au début de cet écrit; que, par conséquent, la *résistance magnétique* K était l'inverse du *coefficient d'aimantation k* considéré par Poisson. Cette assimilation demande à être discutée.

A la surface qui sépare un aimant d'un milieu non magnétique,

(*) J. Clerk Maxwell, *loc. cit.*, p. 180.
(**) J. Clerk Maxwell, *loc. cit.*, p. 201.

la fonction potentielle magnétique V vérifie la relation [I° Partie, Chapitre I, égalité (5)]

$$\frac{\delta V}{\delta N_i} + \frac{\delta V}{\delta N_e} = 4\pi \left[A \cos(N_i, x) + B \cos(N_i, y) + C \cos(N_i, z)\right],$$

N_i et N_e étant les directions de la normale vers l'intérieur et vers l'extérieur de l'aimant. Si les lois de l'aimantation sont celles que Poisson a données [*Ibid.*, égalités (6)], le second membre de l'égalité précédente devient $-4\pi k \frac{\delta V}{\delta N_i}$, en sorte que l'égalité précédente devient

$$\frac{\delta V}{\delta N_e} + (1 + 4\pi k)\frac{\delta V}{\delta N_i} = 0. \tag{54}$$

Or, Maxwell indique nettement (*) que la résistance màgnétique K est égale au rapport

$$-\frac{\frac{\delta V}{\delta N_i}}{\frac{\delta V}{\delta N_e}}.$$

On doit donc poser

$$K = \frac{1}{1 + 4\pi k}. \tag{55}$$

La quantité

$$\mu = 1 + 4\pi k \tag{56}$$

est ce que W. Thomson (**) a nommé la *perméabilité magnétique.*

La résistance électrique considérée par Maxwell doit donc être prise égale à l'inverse non du coefficient d'aimantation de Poisson, mais de la perméabilité magnétique de W. Thomson.

Les composantes de l'*induction magnétique* s'obtiennent en divi-

(*) J. Clerk Maxwell, *loc. cit.*, p. 179.

(**) W. Thomson, PAPERS ON ELECTROSTATICS AND MAGNETISM, art. 629; 1872.

sant les composantes α, β, γ du champ par la résistance magnétique ou, ce qui revient au même, en les multipliant par la perméabilité magnétique ; ces grandeurs ont donc pour expressions

$$(57) \quad \mathrm{A} = (1 + 4\pi k)\,\alpha, \quad \mathrm{B} = (1 + 4\pi k)\,\beta, \quad \mathrm{C} = (1 + 4\pi k)\,\gamma,$$

tandis que les composantes $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ de l'*aimantation* ont pour valeurs

$$(58) \qquad \mathcal{A} = k\alpha, \qquad \mathcal{B} = k\beta, \qquad \mathcal{C} = k\gamma.$$

L'induction magnétique et l'aimantation ne sont pas identiques; leurs composantes sont liées par les égalités

$$(59) \quad \mathrm{A} = \frac{1 + 4\pi k}{k}\,\mathcal{A}, \quad \mathrm{B} = \frac{1 + 4\pi k}{k}\,\mathcal{B}, \quad \mathrm{C} = \frac{1 + 4\pi k}{k}\,\mathcal{C}.$$

Lors donc que nous avons identifié l'*induction magnétique* de Maxwell avec l'*intensité d'aimantation* nous avons commis une grave confusion.

Si nous l'avons commise, c'est qu'elle nous a semblé conforme à la pensée de Maxwell, et que la théorie développée nous a paru intimement liée à cette confusion.

Certainement, dans le mémoire que nous analysons, Maxwell n'a nullement aperçu la distinction sur laquelle nous venons d'insister; il proclame (*) la complète identité mathématique des formules auxquelles conduit la théorie classique de la polarité magnétique et des formules fournies par sa théorie de la propagation par conductibilité des lignes de force magnétiques; maintes fois, au cours de ses raisonnements, il transporte à l'*induction magnétique* les propriétés connues de l'*aimantation*. En particulier, le point que voici semble très clair :

La confusion entre la notion d'*induction magnétique* et la notion d'*intensité d'aimantation* que l'on considère dans la théorie classique du magnétisme a seule conduit Maxwell lorsqu'il a établi une relation entre les variations que l'induction magnétique

(*) J. Clerk Maxwell, *On Faraday's Lines of Force* (Scientific Papers, vol. I, p. 179).

éprouve d'un point à l'autre et la densité de la *matière magnétique;* lorsque, dans son *Traité d'Électricité et de Magnétisme,* Maxwell parviendra à distinguer les deux notions d'intensité d'aimantation et d'induction magnétique, il n'établira plus aucune relation entre les dérivées des composantes de cette dernière et la densité magnétique.

§ 4. *L'état électrotonique et l'énergie électromagnétique dans le mémoire :* ON PHYSICAL LINES OF FORCE

Notre intention n'est pas de discuter ici les problèmes de mécanique que soulève la théorie exposée dans le mémoire : *On physical Lines of Force;* acceptant comme démontrées toutes les lois dynamiques que Maxwell énonce au sujet du milieu qu'il a imaginé, nous examinerons seulement de quelle manière Maxwell transporte ces lois du domaine de la mécanique au domaine de l'électricité.

Le fluide que renferment les cellules est animé d'un mouvement tourbillonnaire; soient, au point (x, y, z) et à l'instant t, α, β, γ les projections sur les axes d'un segment égal à la vitesse angulaire de rotation et porté sur l'axe instantané de rotation de l'élément $d\omega$; soit, en outre, μ une grandeur proportionnelle à la densité du fluide qu'animent ces mouvements tourbillonnaires. Selon Maxwell, un élément de volume $d\omega$ du fluide est soumis à une force dont $Xd\omega$, $Yd\omega$, $Zd\omega$ sont les composantes; X a la forme que voici (*) :

$$(60)\quad X = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial}{\partial x}\mu\alpha + \frac{\partial}{\partial y}\mu\beta + \frac{\partial}{\partial z}\mu\gamma\right)\alpha + \frac{\mu}{8\pi}\frac{\partial(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)}{\partial x}$$
$$+ \frac{\mu\gamma}{4\pi}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial x} - \frac{\partial\alpha}{\partial z}\right) - \frac{\mu\beta}{4\pi}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial y} - \frac{\partial\beta}{\partial x}\right) - \frac{\partial\Pi}{\partial x}.$$

Y et Z ont des expressions analogues.

Laissant de côté le terme $-\frac{\partial\Pi}{\partial x}$, où Π représente une certaine pression, Maxwell s'efforce de donner une interprétation élec-

(*) J. Clerk Maxwell, *On physical Lines of Force,* SCIENTIFIC PAPERS, vol. I, p. 458.

tromagnétique des autres termes qui forment le second membre de l'égalité (60).

Le point de départ de cette interprétation est le suivant :

Les grandeurs α, β, γ, composantes de la rotation, figurent, en chaque point, les composantes du champ magnétique.

Dès lors, si l'élément $d\omega$ renferme une masse m de fluide magnétique, il doit être soumis à une force ayant pour composantes αm, βm, γm ; parmi les termes qui forment X, on doit en premier lieu, selon Maxwell, trouver le terme $\alpha\rho$, $\rho = \frac{m}{d\omega}$ étant la densité du fluide magnétique au point considéré, et ce terme ne peut être que le premier ; Maxwell est conduit ainsi à admettre que la densité du fluide magnétique en un point est donnée par l'égalité

$$\frac{\delta}{\delta x}\mu\alpha + \frac{\delta}{\delta y}\mu\beta + \frac{\delta}{\delta z}\mu\gamma = 4\pi\rho. \tag{61}$$

Maxwell, qui donne de nouveau le nom de *composantes de l'induction magnétique* aux quantités $\mu\alpha$, $\mu\beta$, $\mu\gamma$, est ainsi amené à reprendre l'égalité (52) qu'il avait proposée, puis abandonnée, dans son précédent mémoire.

Cette relation, Maxwell cherche-t-il à la justifier autrement que par le besoin de retrouver un certain terme au second membre de l'égalité (60) ? Il n'écrit dans ce sens que ces quelques lignes (*) :

« De la sorte,

$$\left(\frac{\delta}{\delta x}\mu\alpha + \frac{\delta}{\delta y}\mu\beta + \frac{\delta}{\delta z}\mu\gamma\right)d\omega = 4\pi\rho\, d\omega,$$

qui représente la quantité totale d'induction traversant la surface de l'élément $d\omega$ de dedans en dehors, représente la quantité contenue en cet élément de la matière magnétique imaginaire australe. »

Mais ces lignes vont à l'encontre de l'objet poursuivi par Maxwell, car elles conduiraient à écrire au second membre $\rho d\omega$, et non point $4\pi\rho\, d\omega$.

(*) J. Clerk Maxwell, *loc. cit.*, p. 459.

L'influence exercée sur l'esprit de Maxwell par l'étrange égalité (51), écrite en son précédent mémoire, est ici bien palpable.

Si α, β, γ, représentent les composantes du champ magnétique, les composantes u, v, w du flux électrique doivent vérifier les égalités (30). Au second membre de X, on aura

$$(62)\qquad \frac{\mu\gamma}{4\pi}\left(\frac{\delta\gamma}{\delta x} - \frac{\delta\alpha}{\delta z}\right) - \frac{\mu\beta}{4\pi}\left(\frac{\delta\alpha}{\delta y} - \frac{\delta\beta}{\delta x}\right) = \mu\,(\gamma v - \beta w),$$

ce qui représentera la composante parallèle à Ox de l'action électromagnétique.

Reste à interpréter le terme

$$(63)\qquad \frac{\mu}{8\pi}\frac{\delta}{\delta x}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2).$$

Il représente la composante parallèle à Ox d'une force qui tend à entraîner l'élément $d\omega$ vers la région de l'espace où le champ a la plus grande valeur absolue. Faraday (*) avait déjà montré que l'on pouvait regarder un petit corps diamagnétique, c'est-à-dire un corps pour lequel μ a une moindre valeur que dans le milieu ambiant, comme se dirigeant vers la région de l'espace où le champ a la moindre valeur absolue; et W. Thomson avait montré (**) qu'un petit corps parfaitement doux était, en quelque sorte, attiré par le point de l'espace où $(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)$ a la plus grande valeur. Maxwell n'hésite pas à voir dans le terme (63) la composante parallèle à Ox de cette attraction.

Mais une objection grave peut être faite à cette interprétation.

Lorsqu'un corps parfaitement doux est soumis à l'induction magnétique, l'aimantation qu'il prend peut être figurée par une certaine distribution de fluide magnétique; les actions qu'il subit peuvent être décomposées en forces qui solliciteraient les diverses masses élémentaires de ce fluide magnétique; l'attraction apparente exercée sur le corps parfaitement doux par le point où le

(*) Faraday, Experimental Researches, § 2418 (Philosophical Transactions, 1846, p. 21).

(**) W. Thomson, Philosophical Magazine, octobre 1850. — Papers on Electrostatics and Magnetism, n° 647.

champ atteint sa plus grande valeur absolue n'est pas une action distincte des précédentes et superposée aux précédentes; elle n'en est que la résultante. L'interprétation de Maxwell lui fait donc trouver deux fois, au second membre de l'égalité (60), une action que les lois reconnues du magnétisme n'admettent qu'une seule fois.

Cette difficulté n'est pas la seule à laquelle se heurte la théorie dont nous poursuivons l'exposé.

Supposons (*) que le système ne renferme aucun courant électrique; les égalités, alors vérifiées,

$$u = 0, \qquad v = 0, \qquad w = 0$$

se transformeront, selon les égalités (30), en

$$\frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y} = 0;$$

les composantes α, β, γ du champ magnétique seront les trois dérivées partielles d'une même fonction :

$$(64) \qquad \alpha = -\frac{\partial V}{\partial x}, \qquad \beta = -\frac{\partial V}{\partial y}, \qquad \gamma = -\frac{\partial V}{\partial z}.$$

L'égalité (61) deviendra

$$(65) \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu \frac{\partial V}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial V}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu \frac{\partial V}{\partial z}\right) = -4\pi\rho$$

et, dans une région où μ ne change pas de valeur lorsque l'on passe d'un point au point voisin,

$$(66) \qquad \Delta V = -4\pi \frac{\rho}{\mu}.$$

Imaginons que μ ait, dans tout l'espace la même valeur; supposons qu'une région 1 de cet espace renferme de la « matière

(*) J. Clerk Maxwell, *loc. cit.*, p. 464.

magnétique imaginaire „ en sorte que ρ y diffère de 0, tandis que ρ est nul en tout le reste de l'espace ; nous aurons

$$(67) \qquad V = \frac{1}{\mu} \int_1 \frac{\rho_1}{r} \, d\omega_1.$$

Le champ magnétique se calculera donc comme si deux masses m, m', situées à la distance r, se repoussaient avec une force

$$\frac{1}{\mu} \frac{mm'}{r^2}.$$

Dans le vide où, par définition, $\mu = 1$, cette force a l'expression $\frac{mm'}{r^2}$ donnée par Coulomb, dont il semble ainsi que l'on ait retrouvé la loi; conclusion cependant qu'il ne faut point se hâter d'affirmer, car la déduction précédente est subordonnée à l'hypothèse que μ a la même valeur au sein des masses aimantées et du milieu interposé, hypothèse inadmissible lorsqu'il s'agit de masses de fer placées dans l'air.

Ajoutons cette remarque, bien capable de jeter quelque discrédit sur la théorie du magnétisme donnée par Maxwell. Selon la théorie classique, un aimant quelconque renferme toujours autant de fluide magnétique boréal que de fluide magnétique austral; en sorte que la charge magnétique totale qu'il renferme est toujours égale à 0. Cette conclusion n'a plus rien de forcé dans la théorie de Maxwell; en sorte que, selon cette théorie, il semble possible d'isoler un aimant qui renfermerait uniquement du fluide boréal ou uniquement du fluide austral.

Les considérations précédentes jouent un grand rôle dans la détermination de la forme qu'il convient d'attribuer à l'énergie magnétique (*).

Le fluide, animé de mouvements tourbillonnaires qui représentent le champ magnétique, possède une certaine force vive; cette force vive a pour valeur

$$(68) \qquad \mathrm{E} = \mathrm{C} \int \mu \, (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \, d\omega,$$

(*) J. Clerk Maxwell, *loc. cit.*, p. 472.



l'intégrale s'étendant au système entier et C étant un coefficient constant dont il s'agit de déterminer la valeur.

Pour y parvenir, Maxwell suppose que le système ne renferme aucun courant, cas auquel les égalités (64) sont applicables. L'égalité (68) devient alors

$$E = C \int \mu \left[\left(\frac{\delta V}{\delta x} \right)^2 + \left(\frac{\delta V}{\delta y} \right)^2 + \left(\frac{\delta V}{\delta z} \right)^2 \right] d\omega.$$

Il suppose ensuite que μ a la même valeur dans tout l'espace, ce qui permet de transformer l'égalité précédente en

$$(69) \qquad E = - C \int \mu V \Delta V d\omega.$$

Il suppose enfin que la fonction V est la somme de deux fonctions.

$$V = V_1 + V_2 .$$

La première, V_1, vérifie, en tout point du volume ω_1, l'égalité

$$\Delta V_1 = - \frac{4\pi\rho_1}{\mu}$$

et, en tout autre point, l'égalité $\Delta V_1 = 0$. La seconde, V_2, vérifie en tout point d'un volume ω_2 n'ayant avec ω_1 aucun point commun, l'égalité

$$\Delta V_2 = - \frac{4\pi\rho_2}{\mu}$$

et, en tout autre point, l'égalité $\Delta V_2 = 0$. Dès lors, l'égalité (69) peut s'écrire

$$(70) \quad E = 4\pi C \int_{\omega_1} (V_1 + V_2) \rho_1 d\omega_1 + 4\pi C \int_{\omega_2} (V + V_2) \rho_2 d\omega_2.$$

D'ailleurs le théorème de Green donne l'égalité

$$\int V_1 \Delta V_2 d\omega = \int V_2 \Delta V_1 d\omega,$$

où les intégrales s'étendent à l'espace entier; cette égalité se transforme sans peine en la suivante,

$$\int_{\omega_2} V_1 \rho_2 \, d\omega_2 = \int_{\omega_1} V_2 \rho_1 \, d\omega_1,$$

qui transforme l'égalité (70) en

$$(71) \quad \mathrm{E} = 4\pi\mathrm{C} \int_{\omega_1} V_1 \rho_1 \, d\omega_1 + 4\pi\mathrm{C} \int_{\omega_2} V_2 \rho_2 \, d\omega_2 + 8\pi\mathrm{C} \int_{\omega_2} V_1 \rho_2 \, d\omega_2.$$

Supposons que le volume ω_1 demeure invariable ainsi que la valeur de ρ_1 qui correspond à chacun de ses points; supposons que le volume ω_2 se déplace comme un solide rigide, chacun de ses points entraînant la valeur de ρ_2 qui lui correspond; nous reconnaîtrons sans peine que $\int_{\omega_1} V_1 \rho_1 \, d\omega_1$, $\int V_2 \rho_2 \, d\omega_2$ garderont des valeurs invariables, tandis que si nous désignons par δx_2, δy_2, δz_2, les composantes du déplacement d'un point de l'élément $d\omega_2$, nous aurons

$$\delta \int_{\omega_2} V_1 \rho_2 \, d\omega_2 = \int_{\omega_2} \rho_2 \left(\frac{\delta V_1}{\delta x_2} \delta x_2 + \frac{\delta V_1}{\delta y_2} \delta y_2 + \frac{\delta V_1}{\delta z_2} \delta z_2 \right) d\omega_2$$

et

$$(72) \qquad \delta \mathrm{E} = 8\pi\mathrm{C} \int_{\omega_2} \rho_2 \left(\frac{\delta V_1}{\delta x_2} \delta x_2 + \frac{\delta V_1}{\delta y_2} \delta y_2 + \frac{\delta V_1}{\delta z_2} \delta z_2 \right) d\omega_2.$$

Cette variation de l'énergie doit être égale et de signe contraire au travail des forces *apparentes* que l'aimant ω_1 exerce sur l'aimant ω_2.

Tenant compte du premier terme de l'expression (60) de X et de l'interprétation qu'il en a donnée, mais oubliant entièrement le second terme, Maxwell admet que ce travail a pour valeur

$$dT = \int_{\omega_2} \rho_2 (\alpha_1 \delta x_2 + \beta_1 \delta y_2 + \gamma_1 \delta z_2) \, d\omega_2$$

ou bien, en vertu des égalités (64),

$$dT = -\int_{\omega_2} \rho_2 \left(\frac{\delta V_1}{\delta x_2}\delta x_2 + \frac{\delta V_1}{\delta y_2}\delta y_2 + \frac{\delta V_1}{\delta z_2}\delta z_2\right) d\omega_2.$$

En identifiant l'expression de — dT à l'expression de δE donnée par l'égalité (72), on trouve

$$8\pi C = 1,$$

en sorte que l'égalité (68) devient

$$(73) \qquad E = \frac{1}{8\pi}\int \mu\,(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)\, d\omega.$$

Ainsi est obtenue l'expression de la force vive ou énergie cinétique électromagnétique; cette expression va jouer dans les travaux de Maxwell un rôle considérable.

En voici une importante application (*).

Imaginons un système immobile où α, β, γ varient d'un instant à l'autre. Le système va être traversé par des flux électriques engendrés par induction. La production de ces flux correspond à un certain accroissement d'énergie du système ; et Maxwell admet que si E_x, E_y, E_z sont les composantes du champ électromoteur, l'accroissement d'énergie, au sein du système, dans le temps dt, correspondant à la création des courants électriques, a pour valeur

$$dt \int (E_x u + E_y v + E_z w)\, d\omega.$$

L'énergie totale du système, que l'on suppose soustrait à toute action extérieure, devant rester invariable, l'accroissement dont nous venons de donner l'expression devra être compensé par une égale diminution de la force vive électromagnétique. Cette diminution a, d'ailleurs, pour valeur

$$-\frac{dt}{4\pi}\int \mu\left(\alpha\frac{\delta\alpha}{\delta t} + \beta\frac{\delta\beta}{\delta t} + \gamma\frac{\delta\gamma}{\delta t}\right) d\omega.$$

(*) J. Clerk Maxwell, Scientific Papers, vol. I, p. 475.

On aura donc l'égalité

$$(74)\qquad (E_x u + E_y v + E_z w)\, d\omega + \frac{1}{4\pi}\int \mu\left(\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial t} + \beta\frac{\partial\beta}{\partial t} + \gamma\frac{\partial\gamma}{\partial t}\right) d\omega = 0.$$

Mais, en vertu des égalités (30),

$$\begin{aligned}\int (E_x u + E_y v + E_z w)\, d\omega \\ = -\frac{1}{4\pi}\int\left[\left(\frac{\partial\gamma}{\partial y} - \frac{\partial\beta}{\partial z}\right)E_x + \left(\frac{\partial\alpha}{\partial z} - \frac{\partial\gamma}{\partial x}\right)E_y + \left(\frac{\partial\beta}{\partial x} - \frac{\partial\alpha}{\partial y}\right)E_z\right] d\omega \\ = -\frac{1}{4\pi}\int\left[\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\alpha + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right)\beta + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\gamma\right] d\omega.\end{aligned}$$

L'égalité (74) devient alors

$$\begin{aligned}\int\Bigg[\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} - \mu\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)\alpha + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} - \mu\frac{\partial\beta}{\partial t}\right)\beta \\ + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} - \mu\frac{\partial\gamma}{\partial t}\right)\gamma\Bigg] d\omega = 0.\end{aligned}$$

Elle sera évidemment vérifiée si l'on a, en chaque point,

$$(75)\qquad \left\{\begin{aligned}\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} &= \mu\frac{\partial\alpha}{\partial t},\\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} &= \mu\frac{\partial\beta}{\partial t},\\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} &= \mu\frac{\partial\gamma}{\partial t}.\end{aligned}\right.$$

Les trois équations que nous venons d'écrire ont une grande importance; jointes aux trois équations (30), elles forment ce que l'on est convenu de nommer avec Heaviside, Hertz et Cohn, les *six équations de Maxwell.*

Soit $\Psi(x, y, z, t)$ la fonction, définie à une fonction près de t, qui vérifie dans tout l'espace la relation

$$(76)\qquad \Delta\Psi + \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0.$$

Posons

$$(77)\quad \begin{cases} E_x = -\dfrac{\partial\Psi}{\partial x} + E'_x, \\ E_y = -\dfrac{\partial\Psi}{\partial y} + E'_y, \\ E_z = -\dfrac{\partial\Psi}{\partial z} + E'_z. \end{cases}$$

Les égalités (75) et (76) deviendront

$$(78)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial E'_z}{\partial y} - \dfrac{\partial E'_y}{\partial z} = \mu\dfrac{\partial\alpha}{\partial t}, \\ \dfrac{\partial E'_x}{\partial z} - \dfrac{\partial E'_z}{\partial x} = \mu\dfrac{\partial\beta}{\partial t}, \\ \dfrac{\partial E'_y}{\partial x} - \dfrac{\partial E'_x}{\partial y} = \mu\dfrac{\partial\gamma}{\partial t}. \end{cases}$$

$$(79)\quad \frac{\partial E'_x}{\partial x} + \frac{\partial E'_y}{\partial y} + \frac{\partial E'_z}{\partial z} = 0.$$

Ces équations, vérifiées dans tout l'espace, sont traitées par Maxwell de la manière suivante (*) :

Soient F, G, H, trois fonctions qui vérifient dans tout l'espace les relations

$$(80)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial y} - \dfrac{\partial G}{\partial z} = -\mu\alpha, \\ \dfrac{\partial F}{\partial z} - \dfrac{\partial H}{\partial x} = -\mu\beta, \\ \dfrac{\partial G}{\partial x} - \dfrac{\partial F}{\partial y} = -\mu\gamma, \end{cases}$$

$$(81)\quad \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = 0.$$

(*) En réalité, dans le passage analysé ici, Maxwell désigne par − F, − G, − H, les quantités que nous désignons ici par F, G, H ; le changement de signe que nous avons introduit rétablit la concordance entre les divers écrits de Maxwell.

Nous aurons

$$E'_x = -\frac{\delta F}{\delta t}, \quad E'_y = -\frac{\delta G}{\delta t}, \quad E'_z = -\frac{\delta H}{\delta t}$$

et les égalités (77) deviendront

$$(82) \quad \begin{cases} E_x = -\dfrac{\delta \Psi}{\delta x} - \dfrac{\delta F}{\delta t}, \\ E_y = -\dfrac{\delta \Psi}{\delta y} - \dfrac{\delta G}{\delta t}, \\ E_z = -\dfrac{\delta \Psi}{\delta z} - \dfrac{\delta H}{\delta t}. \end{cases}$$

Les fonctions F, G, H, qui figurent dans ces formules, sont les composantes de l'*état électrotonique,* déjà considéré par Maxwell dans son mémoire : *On Faraday's Lines of Force.* Quant à Ψ (*), " c'est une fonction d'x, y, z, t qui est indéterminée en ce qui concerne la solution des équations primitives, mais qui d'ailleurs est déterminée, dans chaque cas particulier, par les circonstances du problème. La fonction Ψ doit être interprétée physiquement comme la *tension électrique* en chaque point de l'espace. "

Dans un système où le régime permanent est établi, F, G, H ne dépendent plus du temps; les égalités (82) se réduisent à

$$(83) \quad E_x = -\frac{\delta \Psi}{\delta x}, \quad E_y = -\frac{\delta \Psi}{\delta y}, \quad E_z = -\frac{\delta \Psi}{\delta z}.$$

Les composantes du champ électromoteur sont respectivement égales aux trois dérivées partielles d'une fonction dont la forme analytique demeure absolument inconnue. C'est l'un des fondements de la deuxième électrostatique de Maxwell (**).

En exposant ce calcul, Maxwell remarque fort justement (***)

(*) Dans l'étude de l'induction en un système immobile, Maxwell a oublié les termes en $-\frac{\delta \Psi}{\delta x}$, $-\frac{\delta \Psi}{\delta y}$, $-\frac{\delta \Psi}{\delta z}$; mais il les a rétablis dans les formules relatives à l'induction au sein d'un système en mouvement.

(**) Voir 1re Partie, Chapitre III.

(***) J. Clerk Maxwell, Scientific Papers, vol. I, p. 476, égalité (57).

que les équations (80) ne peuvent être écrites que si l'on a en tout point

$$(84) \qquad \frac{\delta}{\delta x}\mu\alpha + \frac{\delta}{\delta y}\mu\beta + \frac{\delta}{\delta z}\mu\gamma = 0.$$

Rapprochée de l'égalité (61), cette dernière égalité devient

$$\rho = 0.$$

Les équations (80) ne peuvent donc être écrites que si la *matière fictive magnétique a partout une densité nulle.* La théorie de l'état électrotonique développée ici par Maxwell est incompatible avec l'existence du magnétisme; c'est une restriction que Maxwell va oublier dans son mémoire : *A dynamical theory of the electromagnetic field.*

§ 5. *L'état électrotonique et l'énergie électromagnétique dans le mémoire :* A DYNAMICAL THEORY OF THE ELECTROMAGNETIC FIELD.

Dans l'écrit intitulé : *On physical Lines of Force,* Maxwell s'est efforcé de créer un assemblage mécanique dont les propriétés pussent être regardées comme l'explication des phénomènes électriques. Dans ses écrits ultérieurs, tout en continuant à admettre que les actions électriques et magnétiques sont d'essence mécanique, il ne cherche plus à construire le mécanisme qui les produit; selon le conseil de Pascal, il continue à " dire en gros : cela se fait par figure et mouvement "; mais il ne s'efforce plus " de dire quels et de composer la machine. " Former l'expression de l'énergie électrostatique et de l'énergie électromagnétique ; montrer qu'à ces expressions on peut rattacher les lois des phénomènes électriques, en imitant la méthode de Lagrange, qui tire les équations du mouvement d'un système des expressions de l'énergie potentielle et de l'énergie cinétique du système; tels sont les objets du mémoire : *A dynamical theory of the electromagnetic field* et du *Traité d'Électricité et de Magnétisme.*

La troisième partie du mémoire : *A dynamical theory of the electromagnetic field,* qui nous intéresse particulièrement ici, offre,

sous une forme extrêmement concise, la réunion des principales formules qui régissent les phénomènes électriques.

L'une des grandeurs qu'il introduit tout d'abord est le *moment électromagnétique* (*); ce vecteur dont il désigne par F, G, H les composantes, joue exactement le rôle qu'il attribuait, dans ses précédents mémoires, à l'*état électrotonique;* il admet d'emblée, en effet, que les composantes E'_x, E'_y, E'_z du champ électromoteur d'induction en un système immobile sont données par les égalités

$$E'_x = -\frac{\partial F}{\partial t}, \qquad E'_y = -\frac{\partial G}{\partial t}, \qquad E'_z = -\frac{\partial H}{\partial t}.$$

De ces grandeurs F, G, H, Maxwell ne donne aucune expression analytique; mais il les relie aux composantes α, β, γ du champ magnétique. Désignant par $\mu\alpha$, $\mu\beta$, $\mu\gamma$ les composantes de l'*induction magnétique*, il écrit les trois relations (**)

$$(80^{bis}) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z} &= -\mu\alpha, \\ \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x} &= -\mu\beta, \\ \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y} &= -\mu\gamma. \end{aligned} \right.$$

Ces égalités, vérifiées dans tout l'espace, sont exactement les mêmes que les égalités (80); mais aux égalités (80) se joignait la relation

$$(81) \qquad \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = 0,$$

en sorte que les fonctions F, G, H se trouvaient déterminées; dans le mémoire que nous analysons en ce moment, Maxwell n'admet

(*) J. Clerk Maxwell, Scientific Papers, vol. I, p. 555.
(**) J. Clerk Maxwell, *loc. cit.*, p. 556.

plus l'exactitude de l'égalité (81); bien au contraire, il écrit (*)

$$(81^{\text{bis}}) \qquad \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = J$$

et il traite la quantité J comme une grandeur inconnue, généralement différente de 0.

Dès lors, les grandeurs F, G, H ne sont plus déterminées; on peut leur ajouter respectivement les trois dérivées par rapport à x, y, x d'une fonction arbitraire des variables x, y, z, t.

Lors donc que Maxwell écrit (**) les composantes du champ électromoteur au sein d'un système immobile

$$(82^{\text{bis}}) \qquad \left\{ \begin{aligned} E_x &= -\frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial t}, \\ E_y &= -\frac{\partial \Psi}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial t}, \\ E_z &= -\frac{\partial \Psi}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial t}, \end{aligned} \right.$$

il peut, en toutes circonstances, substituer à Ψ n'importe quelle fonction d'x, y, z, t; la fonction Ψ est absolument indéterminée et l'on ne saurait logiquement souscrire à l'affirmation suivante (***): " La fonction Ψ est une fonction d'x, y, z, t, qui est indéterminée en ce qui concerne la solution des équations précédentes, car les termes qui en dépendent disparaissent dans une intégration étendue à un circuit fermé. Toutefois, la quantité Ψ peut toujours être déterminée, dans chaque cas particulier, lorsqu'on connaît les conditions actuelles de la question. Ψ doit être interprété physiquement comme représentant le *potentiel électrique* en chaque point de l'espace. "

En outre, lorsque Maxwell, dans son mémoire : *On physical Lines of Force,* avait écrit les équations (80), il avait eu soin de remar-

(*) J. Clerk Maxwell, Scientific Papers, vol. I, p. 578.
(**) J. Clerk Maxwell, *loc. cit.*, p. 558 et p. 578.
(***) J. Clerk Maxwell, *loc. cit.*, p. 558.

quer qu'elles seraient absurdes si l'on n'avait pas, dans tout l'espace, l'égalité

$$(84) \qquad \frac{\delta}{\delta x}\mu\alpha + \frac{\delta}{\delta y}\mu\beta + \frac{\delta}{\delta z}\mu\gamma = 0.$$

Dans le présent mémoire, il néglige de faire cette remarque et, qui plus est, il raisonne comme si l'égalité (84) était fausse; nous en verrons tout à l'heure un exemple.

A la suite de considérations (*) que leur extrême brièveté ne permet guère de regarder comme un raisonnement, Maxwell admet (**) que l'énergie électromagnétique est donnée par la formule

$$(85) \qquad E = \frac{1}{2}\int (Fu + Gv + Hw)\, d\omega,$$

où u, v, w représentent les composantes du flux total et où l'intégrale s'étend à tout l'espace.

Cherchons à préciser les considérations qui conduisent Maxwell à cette expression.

Dans le temps dt, le système dégage, selon la loi de Joule, une quantité de chaleur donnée en *unités mécaniques* par l'expression

$$dt \int r\,(u^2 + v^2 + w^2)\, d\omega,$$

où r est la résistance spécifique du milieu; en vertu de la loi de Ohm, cette quantité de chaleur peut encore s'écrire

$$dt \int (E_x u + E_y v + E_z w)\, d\omega.$$

Si le système, isolé et immobile, est soumis exclusivement aux actions électromotrices que produisent, par induction, les variations du flux électrique, cette quantité de chaleur dégagée dans le

(*) J. Clerk Maxwell, SCIENTIFIC PAPERS, vol. I, p. 541.
(**) J. Clerk Maxwell, *loc. cit.*, p. 562.

temps dt est exactement égale à la diminution de l'énergie électromagnétique pendant le même temps ; on a donc l'égalité

$$dE + dt \int (E_x u + E_y v + E_z w)\, d\omega = 0.$$

En même temps, les composantes E_x, E_y, E_z du champ électromoteur sont données par les égalités (82bis), en sorte que l'égalité précédente devient

$$dE - dt \int \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} u + \frac{\partial \Psi}{\partial y} v + \frac{\partial \Psi}{\partial z} w\right) d\omega$$
$$- dt \int \left(\frac{\partial F}{\partial t} u + \frac{\partial G}{\partial t} v + \frac{\partial H}{\partial t} w\right) d\omega = 0.$$

Le terme

$$- \int \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} u + \frac{\partial \Psi}{\partial y} v + \frac{\partial \Psi}{\partial z} w\right) d\omega$$

peut s'écrire

$$\int \Psi \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) d\omega.$$

Il est donc égal à 0 si l'on considère seulement des flux uniformes pour lesquels

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

On a donc

$$(86) \qquad dE = dt \int \left(\frac{\partial F}{\partial t} u + \frac{\partial G}{\partial t} v + \frac{\partial H}{\partial t} w\right) d\omega.$$

Cette égalité est-elle compatible avec l'expression de E que fournit l'égalité (85) ? Celle-ci donne l'égalité

$$dE = \frac{1}{2} dt \int \left(\frac{\partial F}{\partial t} u + \frac{\partial G}{\partial t} v + \frac{\partial H}{\partial t} w\right) d\omega$$
$$+ \frac{1}{2} dt \int \left(F \frac{\partial u}{\partial t} + G \frac{\partial v}{\partial t} + H \frac{\partial w}{\partial t}\right) d\omega.$$

Pour que cette égalité soit compatible avec l'égalité (86), il faut et il suffit que l'on ait l'égalité

$$(87)\qquad \int\left(\frac{\delta F}{\delta t}u + \frac{\delta G}{\delta t}v + \frac{\delta H}{\delta t}w\right)d\omega = \int\left(F\frac{\delta u}{\delta t} + G\frac{\delta v}{\delta t} + H\frac{\delta w}{\delta t}\right)d\omega.$$

Cette égalité est-elle vérifiée? Il est impossible de le décider puisque, dans le mémoire que nous analysons, Maxwell n'attribue aucune expression analytique déterminée aux fonctions F, G, H.

Acceptons l'égalité (85). Les égalités (30) lui donneront la forme

$$E = -\frac{1}{8\pi}\int\left[\left(\frac{\delta\gamma}{\delta y} - \frac{\delta\beta}{\delta z}\right)F + \left(\frac{\delta\alpha}{\delta z} - \frac{\delta\gamma}{\delta x}\right)G + \left(\frac{\delta\beta}{\delta x} - \frac{\delta\alpha}{\delta y}\right)H\right]d\omega$$

qu'une intégration par parties changera en

$$E = -\frac{1}{8\pi}\int\left[\left(\frac{\delta H}{\delta y} - \frac{\delta G}{\delta z}\right)\alpha + \left(\frac{\delta F}{\delta z} - \frac{\delta H}{\delta x}\right)\beta + \left(\frac{\delta G}{\delta x} - \frac{\delta F}{\delta y}\right)\gamma\right]d\omega.$$

Les égalités (80bis) donneront alors

$$(73)\qquad E = \frac{1}{8\pi}\int\mu\,(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)\,d\omega.$$

L'énergie électromagnétique, déterminée, dans le mémoire : *A dynamical theory of the electromagnetic field,* par des considérations électriques reprend ainsi la forme que, dans le mémoire : *On physical Lines of Force,* lui avaient attribuée des hypothèses mécaniques.

L'accord est plus malaisé à établir entre ces formes de l'énergie électromagnétique et celle à laquelle Maxwell a été conduit, en son mémoire : *On Faraday's Lines of Force,* à partir de la théoric du magnétisme.

Cette dernière forme est donnée par l'égalité

$$(44)\qquad E = \int V\rho\, d\omega - \int(Fu + Gv + Hw)\,d\omega.$$



La densité magnétique ρ est liée aux composantes de l'induction magnétique par l'égalité (61)

$$\frac{\partial}{\partial x}\mu\alpha + \frac{\partial}{\partial y}\mu\beta + \frac{\partial}{\partial z}\mu\gamma = 4\pi\rho$$

ou bien, en vertu des égalités (80bis),

$$\rho = 0.$$

L'égalité (44) se réduit donc à

$$(88)\qquad E = -\int (Fu + Gv + Hw)\, d\omega.$$

Cette expression de l'énergie électromagnétique diffère de l'expression (85) de la même quantité à la fois par la présence du signe — et par l'absence du facteur $\frac{1}{2}$. A la vérité, comme nous l'avons remarqué au § 2, l'absence du facteur $\frac{1}{2}$ provient d'une omission, et ce facteur pourrait être aisément rétabli. Mais la contradiction que la nature du signe introduit entre les deux expressions de l'énergie électromagnétique ne peut être évitée.

Elle disparaîtrait, cependant, si, dans la définition de la densité magnétique, donnée par l'égalité (32), on changeait le signe de ρ; ce changement de signe, Maxwell l'a fait accidentellement dans le mémoire : *On Faraday's Lines of Force,* puis normalement dans ses mémoires ultérieurs.

L'expression (73) de l'énergie électromagnétique s'accorde-t-elle avec les lois connues du magnétisme ? Que le système renferme ou non des courants, Maxwell admet qu'il existe une fonction Φ (*) qu'il nomme *potentiel magnétique,* telle que l'on ait

$$(89)\qquad \alpha = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \qquad \beta = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}, \qquad \gamma = -\frac{\partial \Phi}{\partial z}.$$

(*) J. Clerk Maxwell, Scientific Papers, vol. I, p. 566. En réalité, Maxwell nomme *Potentiel magnétique* la fonction — Φ.

L'expression (73) devient alors

$$E = -\frac{1}{8\pi}\int\left(\mu\alpha\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \mu\beta\frac{\partial\Phi}{\partial y} + \mu\gamma\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)d\omega$$

ou, en intégrant par parties,

$$(90) \qquad \frac{1}{8\pi}\int\Phi\left(\frac{\partial}{\partial x}\mu\alpha + \frac{\partial}{\partial y}\mu\beta + \frac{\partial}{\partial z}\mu\gamma\right)d\omega.$$

Sans pousser plus loin le calcul, Maxwell aurait dû remarquer que les égalités (80bis) donnent immédiatement

$$(84) \qquad \frac{\partial}{\partial x}\mu\alpha + \frac{\partial}{\partial y}\mu\beta + \frac{\partial}{\partial z}\mu\gamma = 0,$$

ce qui transforme l'égalité (90) en

$$E = 0.$$

L'énergie électromagnétique serait ainsi identiquement nulle en toutes circonstances; une telle conséquence lui aurait révélé que l'on ne peut accepter en même temps les égalités (80bis) et les égalités (89). D'une telle contradiction, Maxwell ne s'embarrasse pas. Il introduit dans ses calculs la quantité ρ définie par l'égalité

$$(61) \qquad \frac{\partial}{\partial x}\mu\alpha + \frac{\partial}{\partial y}\mu\beta + \frac{\partial}{\partial z}\mu\gamma = 4\pi\rho,$$

il traite cette quantité ρ comme si elle n'était pas identiquement nulle et remplace l'égalité (90) par l'égalité

$$(91) \qquad E = \frac{1}{2}\int\Phi\rho\, d\omega.$$

De cette expression, par un raisonnement dont nous avons déjà vu plusieurs exemples, Maxwell se propose de tirer la loi des actions qui s'exercent entre deux pôles d'aimants.

Pour y parvenir, Maxwell suppose *implicitement* que μ a la même valeur dans tout l'espace; que la fonction Φ est la somme

de deux fonctions V_1, V_2, qui sont respectivement les fonctions potentielles de deux masses aimantées 1 et 2. La fonction V_1 satisfait dans tout l'espace à l'équation

$$\Delta V_1 = 0,$$

sauf à l'intérieur du corps 1 où elle satisfait à l'équation

$$\Delta V_1 = -\frac{4\pi\rho_1}{\mu}.$$

La fonction V_2 satisfait, en tous les points de l'espace, à l'équation

$$\Delta V_2 = 0,$$

sauf à l'intérieur du corps 2 où elle satisfait à l'équation

$$\Delta V_2 = -\frac{4\pi\rho_2}{\mu}.$$

L'énergie magnétique E peut s'écrire

$$E = -\frac{1}{8\pi}\int (V_1 + V_2)(\Delta V_1 + \Delta V_2)\,d\omega.$$

Mais, selon le théorème de Green,

$$\int V_1 \Delta V_2\, d\omega = \int V_2 \Delta V_1\, d\omega.$$

On peut donc écrire :

$$E = -\frac{\mu}{8\pi}\int V_1 \Delta V_1\, d\omega - \frac{\mu}{8\pi}\int V_2 \Delta V_2\, d\omega - \frac{\mu}{4\pi}\int V_1 \Delta V_2\, d\omega$$

ou bien, en vertu des propriétés de la fonction V_2,

$$E = -\frac{\mu}{8\pi}\left(\int V_1 \Delta V_1\, d\omega + \int V_2 \Delta V_2\, d\omega\right) + \int V_1 \rho_2\, d\omega.$$

Supposons que l'aimant 1 demeurant invariable d'aimantation et de position, l'aimant 2 se déplace comme un solide rigide, en

entraînant son aimantation ; on pourra dire également qu'il entraîne avec lui sa fonction potentielle V_2. Les deux intégrales

$$\int V_1 \Delta V_1 \, d\omega, \qquad \int V_2 \Delta V_2 \, d\omega,$$

étendues à tout l'espace, garderont visiblement des valeurs invariables. Si l'on désigne par dx_2, dy_2, dz_2 les composantes du déplacement d'un point de l'élément $d\omega_2$, appartenant au corps 2, on aura

$$dE = \int_2 \rho_2 \left(\frac{\delta V_1}{\delta x_2} dx_2 + \frac{\delta V_1}{\delta y_2} dy_2 + \frac{\delta V_1}{\delta z_2} dz_2 \right) d\omega_2.$$

dE est d'ailleurs égal au travail interne accompli dans la modification considérée, changé de signe. Tout se passe donc comme si sur chaque élément $d\omega_2$ du corps 2, le corps 1 exerçait une force ayant pour composantes

$$X = -\rho_2 \frac{\delta V_1}{\delta x_2} d\omega_2, \quad Y = -\rho_2 \frac{\delta V_1}{\delta y_2} d\omega_2, \quad Z = -\rho_2 \frac{\delta V_1}{\delta z_2} d\omega_2.$$

D'ailleurs, les caractères analytiques attribués à la fonction V_1 exigent que l'on ait

$$V_1 = \frac{1}{\mu} \int_1 \frac{\rho_1}{r} d\omega_1.$$

Les composantes de la force exercée par l'aimant 1 sur un élément $d\omega_2$ de l'aimant 2 sont donc

$$X = -\frac{1}{\mu} \rho_2 \, d\omega_2 \frac{\delta}{\delta x_2} \int_1 \frac{\rho_1}{r} d\omega_1,$$

$$Y = -\frac{1}{\mu} \rho_2 \, d\omega_2 \frac{\delta}{\delta y_2} \int_1 \frac{\rho_1}{r} d\omega_1,$$

$$Z = -\frac{1}{\mu} \rho_2 \, d\omega_2 \frac{\delta}{\delta z_2} \int_1 \frac{\rho_1}{r} d\omega_1.$$

Elles sont les mêmes que si deux masses magnétiques $m_1 = \rho_1 \, d\omega_1$

et $m_2 = \rho_2 \, d\omega_2$, séparées par une distance r, se repoussaient avec une force

$$\frac{1}{\mu} \frac{m_1 m_2}{r^2}.$$

Cette proposition semble s'accorder avec les lois connues du magnétisme; en réalité, il y a lieu de reproduire ici la remarque que nous avons déjà faite : la théorie précédente est intimement liée à une hypothèse inadmissible; elle suppose que le coefficient μ a la même valeur pour tous les corps, aussi bien pour les aimants que pour le milieu tel que l'air au sein duquel on les plonge.

§ 6. *La théorie du Magnétisme dans le* TRAITÉ D'ÉLECTRICITÉ ET DE MAGNÉTISME

« Dans ce traité, dit Maxwell (*), je me propose de décrire les plus importants de ces phénomènes (électriques et magnétiques), de montrer comment on peut les soumettre à la mesure et de rechercher les relations mathématiques qui existent entre les quantités mesurées. Ayant ainsi obtenu les données d'une théorie mathématique de l'électromagnétisme et ayant montré comment cette théorie peut s'appliquer au calcul des phénomènes, je m'efforcerai de mettre en lumière, aussi clairement qu'il me sera possible, les rapports qui existent entre les formes mathématiques de cette théorie et celles de la science fondamentale de la Dynamique; de la sorte, nous serons, dans une certaine mesure, préparés à définir la nature des phénomènes dynamiques parmi lesquels nous devons chercher des analogies ou des explications des phénomènes électromagnétiques. »

L'objet de l'ouvrage étant ainsi nettement déterminé, le problème suivant y doit jouer un rôle essentiel :

Des lois fondamentales de l'électricité et du magnétisme, tirer l'expression de l'énergie électrostatique et de l'énergie électromagnétique; montrer que ces deux énergies sont susceptibles de

(*) J. Clerk Maxwell, *Traité d'Électricité et de Magnétisme*, Préface de la 1re édition; t. I, p. IX de la traduction française.

se mettre sous la forme que le mémoire : *On physical lines of force* a attribuée à l'énergie potentielle et à la force vive du milieu dont les déformations mécaniques imitent ou expliquent les phénomènes électromagnétiques.

Comment est réalisée la partie de ce programme qui concerne l'énergie électrostatique, nous l'avons déjà vu(*). Examinons maintenant la détermination de l'énergie électromagnétique.

Maxwell parvient à l'expression de cette énergie par deux méthodes différentes; l'une de ces méthodes fait appel aux lois de l'électromagnétisme, tandis que l'autre, restreinte aux systèmes qui ne renferment pas de courants, repose exclusivement sur la théorie du magnétisme.

Le *Traité d'Électricité et de Magnétisme,* en effet, expose une théorie complète du magnétisme. Cette théorie forme la troisième partie de l'ouvrage.

La théorie du magnétisme exposée par Maxwell est la théorie classique créée par les travaux de Poisson, de F. E. Neumann, de G. Kirchhoff, de W. Thomson, la théorie dont nous avons résumé précédemment (**) les propositions essentielles. Il y considère, en particulier, l'*intensité d'aimantation,* définie comme nous l'avons fait au passage cité.

Les composantes A, B, C de cette intensité d'aimantation servent, pour Maxwell comme pour Poisson (***), à définir la fonction potentielle magnétique par la formule

$$(92) \qquad V = \int \left(A_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_1} + B_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y_1} + C_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z_1} \right) d\omega_1 .$$

A cette fonction, les composantes α, β, γ du champ sont liées par les relations

$$(93) \qquad \alpha = -\frac{\partial V}{\partial x}, \qquad \beta = -\frac{\partial V}{\partial y}, \qquad \gamma = -\frac{\partial V}{\partial z}.$$

(*) 1re partie, Chapitre IV, § 2.

(**) 1re partie, Chapitre I, § 1.

(***) 1re partie, égalité (1). — J. Clerk Maxwell, *Traité d'Électricité et de Magnétisme,* trad. française, t. II, p. 10, égalité (8).

Cette fonction potentielle peut s'exprimer également au moyen des deux densités, solide et superficielle, ρ et σ, du fluide magnétique fictif par l'égalité

$$V = \int \frac{\rho_1}{r} d\omega_1 + \int \frac{\sigma_1}{r} dS_1$$

et ces densités sont liées aux composantes de l'aimantation par les égalités (*)

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = -\rho, \tag{94}$$

$$A \cos(N_i, x) + B \cos(N_i, y) + C \cos(N_i, z) = -\sigma, \tag{95}$$

déjà données par Poisson.

A côté de l'intensité d'aimantation, mais sans la confondre avec elle, comme il semble l'avoir fait en ses premiers écrits, Maxwell considère (**) l'*induction magnétique*. Les composantes A, B, C de cette grandeur sont définies par les égalités

$$\left\{\begin{aligned} \mathrm{A} &= \alpha + 4\pi A, \\ \mathrm{B} &= \beta + 4\pi B, \\ \mathrm{C} &= \gamma + 4\pi C, \end{aligned}\right. \tag{96}$$

que les égalités (93) permettent également d'écrire

$$\left\{\begin{aligned} \mathrm{A} &= 4\pi A - \frac{\partial V}{\partial x}, \\ \mathrm{B} &= 4\pi B - \frac{\partial V}{\partial y}, \\ \mathrm{C} &= 4\pi C - \frac{\partial V}{\partial z}. \end{aligned}\right. \tag{97}$$

En restituant à l'induction magnétique son sens propre, Maxwell laisse tomber la relation que, sous deux formes différentes et

(*) 1re partie, égalités (2) et (3). — J. Clerk Maxwell, *loc. cit.*, p. 11.
(**) J. Clerk Maxwell, *loc. cit.*, n° 400, p. 28.

incompatibles, il avait voulu établir entre les composantes de l'induction magnétique et la densité de la matière magnétique fictive. Par là, il renie implicitement tous les raisonnements, si essentiels en ses précédents écrits, qui invoquaient cette relation.

En tout point d'un milieu continu, on a (*)

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 4\pi \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right).$$

En vertu des égalités (97), cette égalité devient (**)

$$(98) \qquad \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{B}}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{C}}{\partial z} = 0.$$

De cette dernière égalité, il résulte que l'on peut trouver trois fonctions F, G, H, telles que l'on ait

$$(99) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial y} - \frac{\partial \mathrm{G}}{\partial z} &= -\mathrm{A}, \\ \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z} - \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x} &= -\mathrm{B}, \\ \frac{\partial \mathrm{G}}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y} &= -\mathrm{C}. \end{aligned} \right.$$

Maxwell écrit ces équations (***) et donne le nom de *potentiel vecteur de l'induction magnétique* à la grandeur dont F, G, H sont les composantes. A ce sujet, il nous faut répéter l'observation que nous avons déjà faite touchant les égalités (80bis) : les égalités (99) ne suffisent pas à déterminer les fonctions F, G, H, tant qu'on laisse indéterminée la valeur de la somme

$$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{G}}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial z}.$$

(*) 1re partie, égalité (4).

(**) J. Clerk Maxwell, *loc cit.*, p. 57, égalité (17).

(***) J. Clerk Maxwell, *loc. cit.*, n° 405, p. 32, égalités (21). Dans le *Traité* de Maxwell, le signe des seconds membres est changé par suite d'un choix différent des axes de coordonnées.

Dans un corps parfaitement doux où la fonction magnétisante se réduit à un coefficient k indépendant de l'intensité d'aimantation, on a

(100) $$\mathcal{A} = k\alpha, \qquad \mathcal{B} = k\beta, \qquad \mathcal{C} = k\gamma.$$

Les égalités (96) deviennent alors

$$\mathrm{A} = \frac{1 + 4\pi k}{k}\mathcal{A},$$

$$\mathrm{B} = \frac{1 + 4\pi k}{k}\mathcal{B},$$

$$\mathrm{C} = \frac{1 + 4\pi k}{k}\mathcal{C}.$$

Entre les composantes de l'aimantation et les composantes de l'induction magnétique, on retrouve les relations (59).

Si l'on pose

(101) $$\mu = 1 + 4\pi k,$$

les égalités (96) et (100) donnent les égalités (*)

(102) $$\mathrm{A} = \mu\alpha, \qquad \mathrm{B} = \mu\beta, \qquad \mathrm{C} = \mu\gamma,$$

qui, dans les précédents écrits de Maxwell, servaient à définir l'induction magnétique.

Venons à la détermination de l'énergie magnétique.

Un aimant 1, dont (x_1, y_1, z_1) est un point et $d\omega_1$ un élément, se trouve en présence d'un autre aimant dont V_2 est la fonction potentielle magnétique; ces deux aimants sont des solides rigides et, à chacun de leurs éléments, est invariablement liée une intensité d'aimantation; tandis que l'aimant 2 demeure immobile, l'aimant 1 se déplace; les actions de l'aimant 2 sur l'aimant 1 effectuent un certain travail; selon les doctrines classiques du

(*) J. Clerk Maxwell, *loc. cit.*, p. 57, égalités (16).

magnétisme, ce travail est égal à la diminution subie par la quantité

$$W = \int \left(A_1 \frac{\delta \frac{1}{r}}{\delta x_1} + B_1 \frac{\delta \frac{1}{r}}{\delta y_1} + C_1 \frac{\delta \frac{1}{r}}{\delta z_1} \right) d\omega_1.$$

Maxwell démontre cette proposition (*), qui est universellement acceptée.

Prendre cette proposition pour point de départ et en conclure que l'énergie d'un système quelconque de corps aimantés est donnée par l'expression

$$(103) \qquad E = \frac{1}{2} \int \left(A \frac{\delta V}{\delta x} + B \frac{\delta V}{\delta y} + C \frac{\delta V}{\delta z} \right) d\omega,$$

où V est la fonction potentielle magnétique du système entier et où l'intégrale s'étend à tout le système, c'est évidemment faire une hypothèse; cette hypothèse, les progrès récents de la thermodynamique montrent qu'elle n'est pas justifiée; mais elle devait sembler naturelle à l'époque où Maxwell écrivait; aussi Maxwell l'adopte-t-il (**).

Dès lors, une transformation classique permet d'écrire

$$E = \frac{1}{8\pi} \int \left[\left(\frac{d V}{\delta x} \right)^2 + \left(\frac{\delta V}{\delta y} \right)^2 + \left(\frac{\delta V}{\delta z} \right)^2 \right] d\omega$$

ou bien, en vertu des égalités (93),

$$(104) \qquad E = \frac{1}{8\pi} \int (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)\, d\omega.$$

Telle est l'expression de l'énergie magnétique à laquelle parvient Maxwell (***).

Cette expression ne coïncide pas avec l'expression (73) qu'il désirait retrouver; le facteur μ fait défaut sous le signe d'intégra-

(*) J. Clerk Maxwell, *loc. cit.*, p. 18, égalité (3).
(**) J. Clerk Maxwell, *loc. cit.*, p. 304, expression (6).
(***) J. Clerk Maxwell, *loc. cit.*, p. 305, égalité (11).

tion. Pour retrouver l'expression de l'énergie électromagnétique à laquelle il désire parvenir, Maxwell devra faire appel à la théorie de l'électromagnétisme.

§ 7. *La théorie de l'électromagnétisme dans le* Traité d'Électricité et de Magnétisme

Résumons brièvement la théorie de l'électromagnétisme, telle que Maxwell l'expose dans son *Traité*.

Il introduit tout d'abord un vecteur, des composantes F, G, H, auquel, dans un système immobile, mais d'état électrique variable, les composantes E'_x, E'_y, E'_z, du champ électromoteur d'induction devront être liées par les égalités (*)

$$(105) \qquad E'_x = -\frac{\partial F}{\partial t}, \qquad E'_y = -\frac{\partial G}{\partial t}, \qquad E'_z = -\frac{\partial H}{\partial t}.$$

Ce vecteur est donc ce qu'il avait nommé, dans ses précédents écrits, l'*état électrotonique* ou le *moment électromagnétique ;* il le nomme maintenant *quantité de mouvement électrocinétique* (**) ; puis, aussitôt, il émet cette affirmation (***) ;

« Ce vecteur est identique à la quantité que nous avons étudiée sous le nom de *potentiel vecteur* de l'induction magnétique. »

A l'appui de cette affirmation, Maxwell esquisse un commencement de preuve (IV). Les expressions (105) du champ électromoteur d'induction, appliquées à un fil fermé et immobile, donnent l'expression suivante pour la force électromotrice totale d'induction qui agit dans ce fil :

$$-\int \left(\frac{\partial F}{\partial t}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial G}{\partial t}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial H}{\partial t}\frac{dz}{ds}\right) ds.$$

Dans cette expression, l'intégrale s'étend à tous les éléments linéaires ds en lesquels le fil peut être partagé.

(*) J. Clerk Maxwell, *loc. cit.*, p. 267 et p. 274, égalités (B).
(**) J. Clerk Maxwell, *loc. cit.*, p. 267.
(***) J. Clerk Maxwell, *loc. cit.*, p 267.
(IV) J. Clerk Maxwell, *loc. cit.*, p. 268, n° 592.

Prenons le fil pour contour d'une aire dont dS est un élément; soit N une normale à l'élément dS, menée dans un sens convenable; on sait que l'expression précédente pourra s'écrire

$$\int \left[\frac{\delta}{\delta t}\left(\frac{\delta H}{\delta y} - \frac{\delta G}{\delta z}\right)\cos(N,x) + \frac{\delta}{\delta t}\left(\frac{\delta F}{\delta z} - \frac{\delta H}{\delta x}\right)\cos(N,y) + \frac{\delta}{\delta t}\left(\frac{\delta G}{\delta x} - \frac{\delta F}{\delta y}\right)\cos(N,z)\right] dS,$$

l'intégrale s'étendant à l'aire considérée.

Mais, d'autre part, *si le fil est placé dans un milieu non magnétique,* on sait depuis Faraday que cette force électromotrice est liée à la variation du champ magnétique par la formule

$$-\int \left[\frac{\delta\alpha}{\delta t}\cos(N,x) + \frac{\delta\beta}{\delta t}\cos(N,y) + \frac{\delta\gamma}{\delta t}\cos(N,z)\right] dS.$$

Les égalités (105) s'accorderont donc avec les lois de l'induction en un circuit fermé, au sein d'un milieu non magnétique, si l'on a

$$(106) \quad \frac{\delta H}{\delta y} - \frac{\delta G}{\delta z} = -\alpha, \quad \frac{\delta F}{\delta z} - \frac{\delta H}{\delta x} = -\beta, \quad \frac{\delta G}{\delta x} - \frac{\delta F}{\delta y} = -\gamma.$$

Ces égalités (106) peuvent être regardées comme des cas particuliers des égalités

$$(99^{bis}) \quad \left\{\begin{aligned} \frac{\delta H}{\delta y} - \frac{\delta G}{\delta z} &= -(\alpha + 4\pi A) = -\mathrm{A},\\ \frac{\delta F}{\delta z} - \frac{\delta H}{\delta x} &= -(\beta + 4\pi B) = -\mathrm{B},\\ \frac{\delta G}{\delta x} - \frac{\delta F}{\delta y} &= -(\gamma + 4\pi C) = -\mathrm{C}.\end{aligned}\right.$$

Elles ne les justifient pas, mais elles rendent acceptable l'hypothèse que fait Maxwell en adoptant (*) les égalités (99bis).

(*) J. Clerk Maxwell, *loc. cit.*, p. 268, égalités (A).

Dans le cas où le milieu magnétique est parfaitement doux et où la fonction magnétisante de ce milieu se réduit à un coefficient indépendant de l'intensité d'aimantation (*), on a

$$(102) \qquad A = \mu\alpha, \quad B = \mu\beta, \quad C = \mu\gamma$$

et les égalités (99bis) prennent la forme

$$(80^{bis}) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\delta H}{\delta y} - \frac{\delta G}{\delta z} &= - \mu\alpha, \\ \frac{\delta F}{\delta z} - \frac{\delta H}{\delta x} &= - \mu\beta, \\ \frac{\delta G}{\delta x} - \frac{\delta F}{\delta y} &= - \mu\gamma, \end{aligned} \right.$$

déjà donnée dans le mémoire : *A dynamical Theory of the electromagnetic Field*. Jointes aux égalités (**)

$$(31) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\delta\gamma}{\delta y} - \frac{\delta\beta}{\delta z} &= - 4\pi (u + \bar{u}), \\ \frac{\delta\alpha}{\delta z} - \frac{\delta\gamma}{\delta x} &= - 4\pi (v + \bar{v}), \\ \frac{\delta\beta}{\delta x} - \frac{\delta\alpha}{\delta y} &= - 4\pi (w + \bar{w}), \end{aligned} \right.$$

les équations (80bis) forment le groupe, aujourd'hui célèbre, des *six équations de Maxwell.*

Les fonctions F, G, H qui figurent dans les équations (80bis) ne sont pas entièrement déterminées ; deux fois déjà nous en avons fait la remarque ; pour achever de les déterminer, il faudrait connaître la valeur de la quantité (***)

$$(81^{bis}) \qquad \frac{\delta F}{\delta x} + \frac{\delta G}{\delta y} + \frac{\delta H}{\delta z} = J.$$

(*) J. Clerk Maxwell, *loc. cit.*, p. 289, n. 614.
(**) J. Clerk Maxwell, *loc. cit.*, p. 286, égalités (E) et p. 290.
(***) J. Clerk Maxwell, *loc. cit.*, p. 290, égalité (2).

Or cette quantité a une valeur inconnue, ce qui jette quelque embarras dans le calcul suivant (*) :

Les égalités (80bis) et (31) donnent sans peine les relations

$$\Delta F = \frac{\delta J}{\delta x} - 4\pi\mu\,(u + \bar{u}),$$

$$\Delta G = \frac{\delta J}{\delta y} - 4\pi\mu\,(v + \bar{v}),$$

$$\Delta H = \frac{\delta J}{\delta z} - 4\pi\mu\,(w + \bar{w}).$$

Si donc on pose

$$(107)\qquad \begin{cases} F' = \displaystyle\int \frac{\mu_1\,(u_1 + \bar{u}_1)}{r}\,d\omega_1, \\ G' = \displaystyle\int \frac{\mu_1\,(v_1 + \bar{v}_1)}{r}\,d\omega_1, \\ H' = \displaystyle\int \frac{\mu_1\,(w_1 + \bar{w}_1)}{r}\,d\omega_1, \end{cases}$$

$$(108)\qquad \chi = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{J_1}{r}\,d\omega_1,$$

formules où les intégrations s'étendent à tout l'espace, on aura

$$(109)\qquad \begin{cases} F = F' + \dfrac{\delta\chi}{\delta x}, \\ G = G' + \dfrac{\delta\chi}{\delta y}, \\ H = H' + \dfrac{\delta\chi}{\delta z}. \end{cases}$$

(*) J. Clerk Maxwell, *loc. cit.*, p. 290, n° 616. — Ce calcul se trouvait déjà presque textuellement dans le mémoire : *A dynamical Theory of the electromagnetic Field* (J. Clerk Maxwell, Scientific Papers, vol. I, p. 581).

« La quantité χ, ajoute Maxwell (*), disparaît des équations (80bis) et n'a rapport à aucun phénomène physique. Si nous supposons qu'elle soit nulle, J est aussi nul en tout point, et les équations (107) donnent, en supprimant les accents, les vraies valeurs des composantes » du *potentiel vecteur*.

La quantité χ, assurément, disparaît des égalités (80bis); mais elle figure aux égalités (105); est-il donc, dès lors, si évident qu'elle n'ait aucune influence sur aucun phénomène physique? Sans doute, la force électromotrice totale qui agit dans un circuit fermé

$$-\int\left(\frac{\partial F}{\partial t}\frac{dx}{ds}+\frac{\partial G}{\partial t}\frac{dy}{ds}+\frac{\partial H}{\partial t}\frac{dz}{ds}\right)ds$$

pourra aussi bien s'écrire

$$-\int\left(\frac{\partial F'}{\partial t}\frac{dx}{ds}+\frac{\partial G'}{\partial t}\frac{dy}{ds}+\frac{\partial H'}{\partial t}\frac{dz}{ds}\right)ds$$

et sa valeur sera indépendante de la détermination attribuée à la fonction χ; mais il n'en résulte pas que celle-ci n'intervienne dans aucune discussion de physique; l'affirmer, serait taxer d'absurdité un passage que Maxwell écrit (**) tout auprès du précédent.

La force électromotrice qui agit dans un circuit fermé étant donnée par l'expression

$$-\int\left(\frac{\partial F}{\partial t}\frac{dx}{ds}+\frac{\partial G}{\partial t}\frac{dy}{ds}+\frac{\partial H}{\partial t}\frac{dz}{ds}\right)ds,$$

Maxwell en conclut que le champ électromoteur a pour composantes en chaque point

$$(110)\quad E_x=-\frac{\partial\Psi}{\partial x}-\frac{\partial F}{\partial t},\quad E_y=-\frac{\partial\Psi}{\partial y}-\frac{\partial G}{\partial t},\quad E_z=-\frac{\partial\Psi}{\partial z}-\frac{\partial H}{\partial t};$$

puis il ajoute : « Les termes comprenant la nouvelle quantité Ψ ont été introduits pour donner de la généralité aux expressions de

(*) J. Clerk Maxwell, *loc. cit.*, p. 291.
(**) J. Clerk Maxwell, *loc. cit.*, p. 274.

E_x, E_y, E_z. Ils disparaissent quand l'intégrale est prise tout le long d'un circuit fermé. La quantité Ψ est donc indéterminée, du moins en ce qui concerne le problème actuel, où nous nous proposons d'obtenir la force électromotrice totale qui agit le long d'un circuit. Mais nous verrons que, quand on connaît toutes les conditions du problème, on peut assigner à Ψ une valeur déterminée qui est le potentiel électrique au point (x, y, z). „

Si la fonction Ψ joue un rôle dans l'analyse de certains problèmes d'électricité, pourquoi la fonction χ n'en jouerait-elle aucun ?

Ce sont les deux groupes d'équations (80[bis]) et (31) qui vont fournir à Maxwell l'expression de l'énergie électromagnétique qu'il veut obtenir, cela par un calcul presque semblable à celui qui est donné dans le mémoire : *A dynamical Theory of the electromagnetic Field* et que nous avons exposé au § 5.

Cette énergie, selon Maxwell, a pour première expression (*)

$$E = \frac{1}{2}\int [F(u + \bar{u}) + G(v + \bar{v}) + H(w + \bar{w})]\, d\omega.$$

Les égalités (31) la transforment en

$$E = -\frac{1}{8\pi}\int \left[\left(\frac{\partial\gamma}{\partial y} - \frac{\partial\beta}{\partial z}\right) F + \left(\frac{\partial\alpha}{\partial z} - \frac{\partial\gamma}{\partial x}\right) G + \left(\frac{\partial\beta}{\partial x} - \frac{\partial\alpha}{\partial y}\right) H\right] d\omega.$$

Une intégration par parties donne

$$E = -\frac{1}{8\pi}\int \left[\left(\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z}\right)\alpha + \left(\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x}\right)\beta + \left(\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}\right)\gamma\right] d\omega$$

ou bien, en vertu des égalités (99[bis]),

$$(111) \qquad E = \frac{1}{8\pi}\int (A\alpha + B\beta + C\gamma)\, d\omega.$$

Dans le cas où le système ne renferme que des corps magné-

(*) J. Clerk Maxwell, *loc. cit.*, p. 305, n[os] 634 à 636.

tiques parfaitement doux, les égalités (102) transforment l'égalité (111) en

$$(73) \qquad E = \frac{1}{8\pi}\int \mu\,(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)\,d\omega.$$

Ainsi se retrouve par une méthode électrodynamique l'expression de l'énergie électromagnétique que le mémoire : *On physical Lines of Force* avait obtenue au moyen d'hypothèses mécaniques.

Les deux expressions (104) et (73) de l'énergie électromagnétique ne s'accordent pas; ce désaccord n'échappe point à Maxwell et ne laisse pas que de l'embarrasser; tout d'abord, il déclare (*), en parlant de l'énergie magnétique prise sous la forme (104), que " cette partie de l'énergie sera comprise dans l'énergie cinétique sous la forme que nous allons lui donner ", c'est-à-dire sous la forme (73); mais ensuite, il reconnaît (**) que l'expression obtenue pour l'énergie électromagnétique, jointe au postulat qu'une telle énergie représente de la force vive, ne peut s'accorder avec la théorie habituelle du magnétisme : " Cette façon d'expliquer le magnétisme exige aussi que nous abandonnions la méthode où nous considérions l'aimant comme un corps continu et homogène dont la plus petite partie a des propriétés magnétiques semblables à celles du tout. Nous devons maintenant considérer un aimant comme un nombre très considérable de circuits électriques..... "

En rédigeant son Traité, Maxwell se proposait de prendre pour point de départ les lois bien établies de l'électricité et du magnétisme et de les traduire par des équations dont la forme laisserait transparaître les liens entre ces lois et les principes de la dynamique; mais la réalité demeure fort loin de cette promesse et, plutôt que d'abandonner une interprétation mécanique à laquelle il tient surtout, Maxwell aime mieux renoncer à l'une des branches les plus parfaites de la physique rationnelle, la théorie du magnétisme; ainsi l'avions-nous vu, dans notre Première Partie, quitter pour les hypothèses les plus aventureuses, la doctrine électrique la plus anciennement constituée, l'électrostatique.

(*) J. Clerk Maxwell, *loc. cit.*, p. 304.
(**) J. Clerk Maxwell, *loc. cit.*, p. 309.

L'électrodynamique de Maxwell procède suivant la méthode insolite que nous avons déjà analysée en étudiant l'électrostatique; sous l'influence d'hypothèses qui demeurent en son esprit vagues et imprécises, Maxwell ébauche une théorie qu'il n'achève pas, dont il ne prend même pas la peine d'écarter les contradictions; puis, il modifie sans cesse cette théorie, il lui impose des changements essentiels qu'il ne signale pas à son lecteur; et celui-ci fait de vains efforts pour fixer la pensée fuyante et insaisissable de l'auteur; au moment où il pense y parvenir, il voit s'évanouir les parties mêmes de la doctrine qui ont trait aux phénomènes les mieux étudiés.

Cette méthode étrange et déconcertante est cependant celle qui conduit Maxwell à la théorie électromagnétique de la lumière.

CHAPITRE III

La théorie électromagnétique de la lumière

§ 1. *La vitesse de la lumière et la propagation des actions électriques; recherches de W. Weber et de G. Kirchhoff*

C'est à Wilhelm Weber qu'il faut remonter pour trouver la première mention, dans l'étude des phénomènes électriques, du nombre qui mesure la vitesse de la propagation de la lumière dans le vide.

La première étude publiée (*) en 1846 par W. Weber, sous le titre : *Elektrodynamische Maassbestimmungen,* contenait un appendice ainsi intitulé :

Ueber die Zusammenhang der elektrostatischen und der elektrodynamischen Erscheinungen nebst Anwendung auf die elektrodynamischen Maassbestimmungen.

Cet appendice renfermait la célèbre loi de Weber.

Un fil parcouru par un courant électrique est en réalité le siège de deux flux de direction opposée; l'un, dirigé dans le sens du courant, charrie de l'électricité positive; l'autre, dirigé en sens contraire, charrie de l'électricité négative; lorsque le courant est uniforme, ces deux flux ont un égal débit.

D'autre part, la loi d'action mutuelle de deux charges électriques énoncée par Coulomb est une loi incomplète; elle ne s'applique qu'à des charges qui sont en repos relatif; si deux charges électriques e, e', sont séparées par une distance r variable avec le

(*) W. Weber, *Elektrodynamische Maassbestimmungen,* Leipzig, 1846.

temps t, ces deux charges se repoussent par une force dont l'expression est

$$\frac{ee'}{r^2}\left[1 - \frac{a^2}{16}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{a^2}{8} r \frac{d^2r}{dt^2}\right].$$

Appliquée au calcul des actions électrodynamiques, cette loi redonne la loi élémentaire d'Ampère; appliquée aux phénomènes d'induction, elle en formule la loi mathématique.

La constante a figure dans chacune de ces lois. Voyons, en particulier, comment elle figure dans la loi d'Ampère.

Deux éléments de courants uniformes ds, ds' sont en présence; dans le premier, le flux d'électricité positive et le flux d'électricité négative ont une valeur commune i; dans le second, ces deux flux ont une valeur commune i'; ϵ est l'angle des deux éléments, r la distance qui les sépare, θ, θ' les angles que font ces éléments avec la droite qui va d'un point de l'élément ds à un point de l'élément ds'. Ces deux éléments se repoussent avec une force

$$- a^2 \frac{ids\, i'ds'}{r^2}\left(\cos\epsilon - \frac{3}{2}\cos\theta \cos\theta'\right).$$

Les *intensités* J, J' des deux courants sont liées aux débits partiels i, i' par les relations

$$J = 2i, \qquad J' = 2i'.$$

La force précédente peut donc encore s'écrire

$$-\frac{a^2}{4}\frac{J\,ds\,J'\,ds'}{r^2}\left(\cos\epsilon - \frac{3}{2}\cos\theta \cos\theta'\right).$$

Aujourd'hui, on écrit habituellement cette formule de la manière suivante :

$$- 2A^2 \frac{J\,ds\,J'\,ds'}{r^2}\left(\cos\epsilon - \frac{3}{2}\cos\theta \cos\theta'\right),$$

A^2 étant la *constante fondamentale des actions électromagnétiques*

évaluée en unités électrostatiques. La constante a^2 de Weber est, on le voit, liée à cette constante A^2 par la relation

$$A^2 = \frac{a^2}{8}. \tag{112}$$

W. Weber, d'ailleurs, changea bientôt la forme de sa loi, qu'il écrivit

$$\frac{ee'}{r^2}\left[1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{2}{c^2}\, r\, \frac{d^2r}{dt^2}\right].$$

La nouvelle constante c^2 ainsi introduite était liée à la constante a^2 par l'égalité

$$\frac{1}{c^2} = \frac{a^2}{16}$$

et, partant, en vertu de l'égalité (112), elle est liée à la constante A^2 par l'égalité

$$A^2 = \frac{2}{c^2}. \tag{113}$$

Il est clair que c est une grandeur de même espèce qu'une vitesse.

Imaginons que la vitesse avec laquelle les deux charges e, e' s'approchent ou s'éloignent l'une de l'autre, vitesse dont la valeur absolue est celle de $\frac{dr}{dt}$, soit une vitesse uniforme; $\frac{d^2r}{dt^2}$ sera égal à 0 et les deux charges se repousseront avec une force

$$\frac{ee'}{r^2}\left[1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right].$$

Si l'on a

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = c^2,$$

ces deux forces se détruiront; la force électrodynamique $-\frac{1}{c^2}\frac{ee'}{r^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2$ fera équilibre à la force électrostatique $\frac{ee'}{r^2}$.

Cette constante c, W. Weber et R. Kohlrausch, dans un mémoire demeuré classique (*), en ont déterminé expérimentalement la valeur; ils ont trouvé que cette valeur, évaluée *en millimètres par seconde*, était :

$$c = 439\,450 \times 10^6.$$

Ils font suivre simplement ce résultat de la réflexion que voici :

« Cette détermination de la constante c prouve donc que deux masses électriques devraient se déplacer avec une très grande vitesse l'une par rapport à l'autre, si l'on voulait que la *force électrodynamique* fît équilibre à la *force électrostatique;* savoir avec une vitesse de 439 millions de mètres ou de 59 320 milles par seconde; cette vitesse surpasse notablement celle de la lumière. »

L'année suivante, G. Kirchhoff (**) se proposa de déduire de la théorie de Weber les lois suivant lesquelles l'induction électrodynamique se propage dans un fil conducteur.

Il fit observer que la résistance du fil figurait dans les équations obtenues, mais divisée par un facteur constant dont la valeur numérique est extrêmement grande; de sorte que dans un fil de cuivre de quelques mètres de longueur, de quelques millimètres de rayon, les lois de variation du courant électrique étaient sensiblement les mêmes que si le fil avait une résistance nulle. Dans ce cas limite, où le fil est supposé sans résistance, l'intensité J du courant électrique qui parcourt un conducteur fermé s'exprime, à l'instant t, par la formule suivante :

$$J = -\frac{c}{4\sqrt{2}}\, e^{-ht} \left[f\left(s + \frac{c}{\sqrt{2}}t\right) + f\left(s - \frac{c}{\sqrt{2}}t\right) \right],$$

s étant la longueur du fil depuis une origine donnée jusqu'au point considéré, h une constante et f une fonction arbitraire.

(*) R. Kohlrausch et W. Weber, *Elektrodynamische Maassbestimmungen, insbesondere Zurückführung der Stromintensitäts-Messungen auf mechanische Maass*, Leipzig, 1856.

(**) G. Kirchhoff, *Ueber die Bewegung der Elektricität in Drähten* (Poggendorff's Annalen, Bd. C, 1857).



Ce courant peut être regardé comme le résultat de la superposition de deux autres courants d'intensités respectives

$$J' = \frac{c}{4\sqrt{2}} e^{-ht} f\left(s + \frac{c}{\sqrt{2}} t\right),$$

$$J'' = - \frac{c}{4\sqrt{2}} e^{-ht} f\left(s - \frac{c}{\sqrt{2}} t\right)$$

ou de deux ondes amorties qui se propagent en sens contraire avec une vitesse $\frac{c}{\sqrt{2}}$.

" La vitesse de propagation d'une onde électrique, dit Kirchhoff, se trouve d'après cela égale à $\frac{c}{\sqrt{2}}$; elle est donc indépendante de la section du fil, de sa conductibilité, enfin de la densité électrique; sa valeur est de 41 950 milles par seconde; elle est partant très voisine de la vitesse avec laquelle la lumière se propage dans un espace vide. "

L'analyse du mouvement de l'électricité dans un fil, qui avait conduit G. Kirchhoff à cette remarquable conséquence, se trouvait peu après étendue (*) par le même auteur aux conducteurs dont les trois dimensions sont finies.

Le résultat obtenu par G. Kirchhoff ne pouvait manquer de frapper Weber. Il entreprend de soumettre les oscillations d'un courant électrique variable en un fil conducteur à une étude théorique et expérimentale approfondie (**). Cette étude confirme les recherches de Kirchhoff. Moyennant certaines hypothèses, au nombre desquelles se trouve la petitesse de la résistance du fil, on reconnaît que " $\frac{c}{\sqrt{2}}$ est la limite vers laquelle tendent toutes les vitesses de propagation, et pour la valeur donnée de c

$$c = 439\,450 \times 10^6 \frac{\text{millimètre}}{\text{seconde}}$$

(*) G. Kirchhoff, *Ueber die Bewegung der Elektricität in Leitern* (Poggendorff's Annalen, Bd. CII, 1857).

(**) Wilhem Weber, *Elektrodynamische Maassbestimmungen, insbesondere über elektrische Schwingungen*, Leipzig, 1864.

cette limite a pour valeur

$$\frac{c}{\sqrt{2}} = 310\,740 \times 10^6 \frac{\text{millimètre}}{\text{seconde}},$$

c'est-à-dire une vitesse de 41 950 milles en une seconde. „

“ G. Kirchhoff a déjà trouvé cette expression pour la vitesse de propagation des ondes électriques et il a remarqué “ qu'elle est „ indépendante de la section du fil, de sa conductibilité et de la „ densité électrique; que sa valeur, qui est de 41 950 milles par „ seconde, est très voisine de la vitesse de la lumière dans le vide „. Si cette concordance approchée entre la vitesse de propagation des ondes électriques et la vitesse de la lumière pouvait être regardée comme l'indice d'une relation intime entre les deux doctrines, elle mériterait le plus grand intérêt; car la recherche d'une semblable relation a une grande importance. Mais il est évident qu'il faut considérer avant toutes choses la véritable signification qu'a cette vitesse en ce qui concerne l'électricité; et cette signification ne paraît pas être de nature à favoriser de grandes espérances. „

“ En effet, comme nous l'avons montré ci-dessus, pour que la véritable vitesse de propagation s'approche de cette limite qui coïncide avec la vitesse de la lumière, il faut non seulement que le fil conducteur soit très délié, eu égard à sa longueur, mais encore que ce fil long et fin ait une très petite résistance. Il est bien évident que la vitesse réelle ne s'approchera que très rarement de cette valeur limite et que, très souvent, elle en sera fort éloignée. „

§ 2. *La vitesse de la lumière et la propagation des actions électriques; recherches de B. Riemann, de C. Neumann, et de L. Lorenz*

L'égalité, au moins approchée,

$$A^2 = \frac{1}{V^2}, \tag{114}$$

où V désigne la vitesse de la lumière dans le vide, n'en est pas moins une conséquence des expériences de Weber et de Kohlrausch



et, malgré les approximations auxquelles était soumise la proposition démontrée par G. Kirchhoff, cette égalité était trop frappante pour qu'on n'y vît pas la marque d'une relation intime entre la lumière et l'électricité. Dès ce moment, les physiciens tentèrent d'introduire dans les théories électriques l'idée d'une propagation qui se produirait à travers l'espace avec la vitesse même de la lumière.

Le 10 février 1858, Bernhard Riemann lisait à la Société des Sciences de Goettingue une note intitulée : *Ein Beitrag zur Electrodynamik;* cette note ne fut publiée (*) qu'après la mort de l'illustre analyste.

Le point de départ adopté par Riemann est le suivant.

Supposons qu'un point M porte, à l'instant t, une charge électrique variable avec t, $q(t)$. On admet ordinairement qu'en un point M', dont r est la distance au point M, cette charge électrique engendre une fonction potentielle dont la valeur, au même instant t, est $\frac{q(t)}{r}$. A l'instant t, la fonction potentielle au point M' est

$$V' = \sum \frac{q(t)}{r}.$$

Riemann admet qu'à l'instant t, la fonction potentielle engendrée en M' par la charge du point M est $\frac{1}{r} q\left(t - \frac{r}{a}\right)$, a étant une constante positive ; la fonction potentielle en M' à l'instant t est

$$V' = \sum \frac{q\left(t - \frac{r}{a}\right)}{r}.$$

On peut évidemment énoncer cette hypothèse en disant que la fonction potentielle électrostatique, au lieu de se propager instantanément dans l'espace, comme on l'admet habituellement, s'y propage avec la vitesse finie a.

(*) Bernhard Riemann, *Ein Beitrag zur Elektrodynamik,* POGGENDORFF'S ANNALEN, Bd. CXXXI. — *Bernhard Riemann's gesammelte mathematische Werke,* p. 270; 1876.

Or, de cette hypothèse, Bernhard Riemann déduit pour le potentiel électrodynamique mutuel de deux systèmes, une formule qui coïncide avec celle que W. Weber a donnée, pourvu que l'on prenne

$$a = \frac{c}{\sqrt{2}}.$$

« D'après la détermination de Weber et de Kohlrausch, on a

$$c = 439\,450 \times 10^6 \frac{\text{millimètre}}{\text{seconde}}.$$

« Il en résulte que a est égal à 41 949 milles géographiques par seconde, tandis que les calculs de Busch, prenant pour point de départ les observations d'aberrations faites par Bradley, donnent pour vitesse de la lumière 41 994 milles, et que Fizeau, par une mesure directe, a trouvé 41 882 milles. »

Riemann pouvait donc résumer de la manière suivante sa contribution à l'électrodynamique :

« J'ai trouvé que l'on pouvait expliquer les actions électrodynamiques des courants électriques en supposant que l'action d'une masse électrique sur une autre ne se produit pas instantanément, mais se propage avec une vitesse constante; cette vitesse est d'ailleurs égale, aux erreurs d'expérience près, à la vitesse de la lumière. »

Malheureusement, selon une remarque de Clausius (*), l'analyse de B. Riemann était certainement inexacte; l'éditeur des œuvres de Riemann, M. H. Weber, suppose avec vraisemblance que l'erreur avait été reconnue par Riemann et l'avait empêché de livrer sa note à l'impression.

En 1868, alors que l'écrit de Riemann était encore inconnu, l'Université de Bonn fêtait son jubilé cinquantenaire; comme *Gratulationsschrift* de l'Université de Tubingue, M. Carl Neumann présenta un écrit intitulé : *Theoria nova phænomenis electricis applicanda;* cet écrit contenait le résumé d'une théorie qui fut,

(*) R. Clausius, Poggendorff's Annalen, Bd. CXXXV, p. 606; 1869.

plus tard, publiée *in extenso* sous ce titre (*) : *Die Principien der Elektrodynamik.*

L'hypothèse fondamentale de M. Carl Neumann concordait essentiellement avec celle de Riemann ; l'auteur l'énonçait en ces termes : " Nova introducitur suppositio, statuendo, causam illam motricem, quam potentiale vocamus, ab altera massa ad alteram non subito sed progrediente tempore transmitti, atque — ad instar lucis — per spatium propagari celeritate quadam permagna et constante. Quam celeritatem denotabimus litera *c*. "

" Ista suppositio, conjuncta cum hac altera, principium Hamiltonianum normam exprimere supremam ac sacrosanctam nullis exceptionibus obviam, fit *suppositio in theoria nostra fundamentalis*, ex qua (absque ulla ulteriore suppositione) leges illæ notissimæ a cel[is] Ampère, Neumann, Weber, conditæ sua sponte emanabunt. "

Mais si l'hypothèse essentielle admise par M. Carl Neumann concorde avec celle qu'avait émise B. Riemann, elle s'en sépare immédiatement lorsque son auteur la traduit en formules.

Considérons, dit-il, deux points M, M', portant des charges électriques et agissant l'un sur l'autre ; soit r leur distance à l'instant t. D'après ce que nous avons dit de la propagation du potentiel, nous devons distinguer deux espèces de potentiel : le *potentiel émissif* et le *potentiel réceptif*.

Le *potentiel émissif* du point M est le potentiel qui est émis par le point M à l'instant t, et qui ne parvient au point M' que quelque temps après ; il a pour expression

$$\omega_0 = \frac{ee'}{r}.$$

Quant au *potentiel réceptif*, M. Carl Neumann le définit en ces termes : " *Potentiale receptivum* vocabimus id, quod utrumque punctum *recipit tempore t*, aliquanto antea ab altero puncto emissum. Unde elucet potentiale receptivum respectu *dati* temporis

(*) C. Neumann, *Die Principien der Elektrodynamik*, Mathematische Annalen, Bd. XVII, p. 400.

cujuslibet formatum idem esse ac potentiale emissivum respectu temporis cujusdam *prioris* formatum. „

Par des considérations qu'il serait trop long d'exposer ici, mais que l'on trouvera dans l'écrit intitulé : *Die Principien der Elektrodynamik*, M. Carl Neumann parvient à l'expression du potentiel réceptif ω que donnent les égalités suivantes :

$$\omega = w + \frac{d\pi}{dt},$$

$$w = \frac{ee'}{r}\left[1 + \frac{1}{c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right],$$

$$\pi = ee'\left(\frac{\log r}{c} - \frac{1}{2c^2}\frac{dr}{dt}\right).$$

De cette expression du potentiel émissif, l'emploi du principe de Hamilton permet de tirer l'expression de la force que chaque point subit à l'instant t; cette force est dirigée suivant la droite qui joint les deux points, elle est répulsive et a pour grandeur

$$\frac{ee'}{r^2}\left[1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{2}{c^2}r\frac{d^2r}{dt^2}\right].$$

C'est la force donnée par la loi de Weber.

Pour que la théorie de M. Carl Neumann s'accorde avec les lois connues de l'électrodynamique, il sera nécessaire de donner à la constante c la valeur, déterminée par Weber et Kohlrausch,

$$c = 439\,450 \times 10^6 \ \frac{\text{millimètre}}{\text{seconde}}.$$

Ce n'est donc pas avec une vitesse égale à la vitesse V de la lumière dans le vide que se propage le potentiel, mais avec une vitesse plus grande et égale à $V\sqrt{2}$.

Dans le volume même des Annales de Poggendorff où était

imprimée pour la première fois l'hypothèse électrodynamique de B. Riemann, L. Lorenz publiait (*) une théorie qui avait avec la pensée de Riemann, d'ailleurs inconnue de l'auteur, une affinité plus étroite que la théorie de C. Neumann.

En généralisant par induction les équations de l'électrodynamique données par W. Weber, G. Kirchhoff (**) était parvenu à un système d'équations régissant la propagation des actions électriques dans les corps conducteurs.

Soit $V = \sum \frac{q}{r}$ la fonction potentielle électrostatique, où la sommation s'étend à toutes les charges électriques q du système.

Cette fonction peut s'exprimer plus explicitement.

A l'instant t, au point (x, y, z) d'un volume électrisé, la densité électrique solide a pour valeur $\sigma\,(x, y, z, t)$; à l'instant t, au point (x, y, z) d'une surface électrisée, la densité superficielle électrique a pour valeur $\Sigma\,(x, y, z, t)$. On a alors

$$(114) \qquad V\,(x, y, z, t) = \int \frac{\sigma\,(x', y', z', t)}{r}\, d\omega' + \int \frac{\Sigma\,(x', y', z', t)}{r}\, dS',$$

la première intégrale s'étendant à tous les éléments $d\omega'$ des volumes électrisés et la seconde à tous les éléments dS' des surfaces électrisées.

Soient

$$u\,(x, y, z, t), \qquad v\,(x, y, z, t), \qquad w\,(x, y, z, t)$$

les trois composantes du flux électrique (***) au point (x, y, z), à l'instant t.

(*) L. Lorenz, *Sur l'identité des vibrations de la lumière et des courants électriques* (cf. Selskabs. Overs., 1867, p. 26. — Poggendorf's Annalen, Bd. CXXXI, p. 243; 1867. — *Œuvres scientifiques de L. Lorenz, revues et annotées par H. Valentinier*, t. I, p. 173; 1896).

(**) G. Kirchhoff, *Ueber die Bewegung der Elektricität in Leitern.* (Poggendorff's Annalen, Bd. CII; 1857).

(***) Dans le mémoire de G. Kirchhoff, u, v, w, ont un sens un peu différent, lié aux conceptions particulières de Weber sur la nature du courant électrique.

Considérons les fonctions

$$(115)\quad \left\{\begin{aligned} U(x,y,z,t) &= \int \frac{x'-x}{r^3}\,[\,(x'-x)\,u(x',y',z',t) \\ &\qquad + (y'-y)\,v\,(x',y',z',t) \\ &\qquad + (z'-z)\,w\,(x',y',z',t)]\,d\omega', \\ V(x,y,z,t) &= \ldots\ldots, \qquad W(x,y,z,t) = \ldots\ldots, \end{aligned}\right.$$

Les équations du mouvement de l'électricité dans un corps conducteur dont ρ est la résistance spécifique s'écriront, selon G. Kirchhoff,

$$(116)\quad \left\{\begin{aligned} u &= -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x} + \frac{2}{c^2}\frac{\partial U}{\partial t}\right), \\ v &= -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y} + \frac{2}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t}\right), \\ w &= -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z} + \frac{2}{c^2}\frac{\partial W}{\partial t}\right). \end{aligned}\right.$$

L. Lorenz fait remarquer fort justement qu'en prenant pour point de départ non pas les formules de l'induction données par Weber, mais d'autres formules qui leur sont rigoureusement équivalentes pour le seul cas étudié jusqu'alors, celui des courants linéaires uniformes, on peut obtenir non point les équations précédentes, mais d'autres équations analogues, en particulier celles-ci :

$$(117)\quad \left\{\begin{aligned} u &= -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x} - \frac{2}{c^2}\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial t}\right), \\ v &= -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y} - \frac{2}{c^2}\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial t}\right), \\ w &= -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z} - \frac{2}{c^2}\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial t}\right), \end{aligned}\right.$$

où l'on a

$$(118)\quad \left\{\begin{aligned} F(x, y, z, t) &= \int \frac{u(x', y', z, t)}{r}\, d\omega', \\ G(x, y, z, t) &= \int \frac{v(x', y', z', t)}{r}\, d\omega', \\ H(x, y, z, t) &= \int \frac{w(x', y', z', t)}{r}\, d\omega'. \end{aligned}\right.$$

Cette remarque devait bientôt être reprise par Helmholtz (*) et lui suggérer l'introduction, dans les théories électrodynamiques, de la constante numérique, d'une si grande importance, qu'il désigne par la lettre k.

Ce sont les équations (117) que L. Lorenz prend pour équations du mouvement de l'électricité; mais au lieu d'y conserver les fonctions V, F, G, H, définies par les égalités (114) et (118), il y substitue les fonctions

$$(114^{\text{bis}})\quad \overline{V}(x, y, z, t) = \int \frac{\sigma\left(x', y', z', t - \frac{r}{a}\right)}{r}\, d\omega' + \int \frac{\Sigma\left(x', y', z', t - \frac{r}{a}\right)}{r}\, dS',$$

$$(118^{\text{bis}})\quad \left\{\begin{aligned} \overline{F}(x, y, z, t) &= \int \frac{u\left(x', y', z', t - \frac{r}{a}\right)}{r}\, d\omega', \\ \overline{G}(x, y, z, t) &= \int \frac{v\left(x', y', z', t - \frac{r}{a}\right)}{r}\, d\omega', \\ \overline{H}(x, y, z, t) &= \int \frac{w\left(x', y', z', t - \frac{r}{a}\right)}{r}\, d\omega', \end{aligned}\right.$$

(*) Helmholtz, *Ueber die Gesetze der inconstanten elektrischen Ströme in körperlich ausgedehnten Leitern* (VERHANDLUNGEN DES NATURHISTORISCH-MEDICINISCHEN VEREINS ZU HEIDELBERG, 21 janvier 1870. — WISSENSCHAFTLICHE ABHANDLUNGEN, Bd. I, p. 537). — *Ueber die Bewegungsgleichungen der Elektrodynamik für ruhende leitende Körper* (BORCHARDT'S JOURNAL FÜR REINE UND ANGEWANDTE MATHEMATIK, Bd. LXXII, p. 57. — WISSENSCHAFTLICHE ABHANDLUNGEN, Bd. I, p. 545).

où

$$a = \frac{c}{\sqrt{2}}. \tag{119}$$

C'est, on le voit, l'hypothèse, émise par B. Riemann, selon laquelle la fonction potentielle électrique se propage avec la vitesse a, que L. Lorenz admet et qu'il étend aux fonctions F, G, H, composantes de l'*état électrotonique*.

Les équations (117) deviennent

$$\left\{\begin{aligned} u &= -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \overline{U}}{\partial x} + \frac{2}{c^2}\frac{\partial \overline{F}}{\partial t}\right), \\ v &= -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \overline{V}}{\partial y} + \frac{2}{c^2}\frac{\partial \overline{G}}{\partial t}\right), \\ w &= -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \overline{W}}{\partial z} + \frac{2}{c^2}\frac{\partial \overline{H}}{\partial t}\right). \end{aligned}\right. \tag{117^{bis}}$$

Ces équations ne diffèrent des équations (117) que par la substitution de $\left(t - \frac{r}{a}\right)$ à t; or, dans toutes les expériences, r est égal au plus à quelques mètres, tandis que a représente une vitesse égale à peu près à 300 000 kilomètres par seconde; $\left(t - \frac{r}{a}\right)$ diffère donc extrêmement peu de t et les équations (117) et (117bis) peuvent être regardées comme également vérifiées par l'expérience.

On vérifie sans peine qu'en tout point d'une masse continue, on a

$$a^2\Delta\overline{V} - \frac{\partial^2 \overline{V}}{\partial t^2} = -4\pi a^2 \sigma(x, y, z, t),$$

$$a^2\Delta\overline{F} - \frac{\partial^2 \overline{F}}{\partial t} = -4\pi a^2 u(x, y, z, t),$$

$$a^2\Delta\overline{G} - \frac{\partial^2 \overline{G}}{\partial t^2} = -4\pi a^2 v(x, y, z, t),$$

$$a^2\Delta\overline{H} - \frac{\partial^2 \overline{H}}{\partial t^2} = -4\pi a^2 w(x, y, z, t).$$

Dès lors, il n'est pas malaisé de voir que les équations (117bis) et (119) permettent d'écrire les équations

$$(120) \quad \begin{cases} \Delta u - \dfrac{2}{c^2}\dfrac{\delta^2 u}{\delta t^2} = \dfrac{4\pi}{\rho}\left(\dfrac{\delta\sigma}{\delta x} + \dfrac{2}{c^2}\dfrac{\delta u}{\delta t}\right), \\ \Delta v - \dfrac{2}{c^2}\dfrac{\delta^2 v}{\delta t^2} = \dfrac{4\pi}{\rho}\left(\dfrac{\delta\sigma}{\delta y} + \dfrac{2}{c^2}\dfrac{\delta v}{\delta t}\right), \\ \Delta w - \dfrac{2}{c^2}\dfrac{\delta^2 w}{\delta t^2} = \dfrac{4\pi}{\rho}\left(\dfrac{\delta\sigma}{\delta z} + \dfrac{2}{c^2}\dfrac{\delta w}{\delta t}\right), \end{cases}$$

auxquelles doit être jointe l'équation de continuité

$$\frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta v}{\delta y} + \frac{\delta w}{\delta z} + \frac{\delta\sigma}{\delta t} = 0.$$

On voit sans peine que chacune des trois quantités

$$\omega_x = \frac{\delta w}{\delta y} - \frac{\delta v}{\delta z}, \quad \omega_y = \frac{\delta u}{\delta z} - \frac{\delta w}{\delta x}, \quad \omega_z = \frac{\delta v}{\delta x} - \frac{\delta u}{\delta y}$$

vérifie l'équation

$$\Delta\omega - \frac{2}{c^2}\frac{\delta^2\omega}{\delta t^2} = \frac{8\pi}{\rho c^2}\frac{\delta\omega}{\delta t}.$$

Si le milieu considéré est extrêmement résistant, de telle sorte que ρ ait une très grande valeur, le second membre de cette équation est négligeable devant le premier membre; l'équation se réduit à la forme bien connue

$$\Delta\omega - \frac{2}{c^2}\frac{\delta^2\omega}{\delta t^2} = 0,$$

ce qui nous enseigne que, dans le milieu considéré, les flux électriques transversaux se propagent avec la vitesse $\frac{c}{\sqrt{2}}$. Nous parvenons ainsi à la proposition suivante :

Dans un milieu extrêmement résistant, les flux électriques transversaux se propagent avec une vitesse égale à la vitesse de la lumière dans le vide.

Encouragé par cet important résultat, L. Lorenz n'hésite pas à formuler une théorie électromagnétique de la lumière : les milieux transparents sont tous des milieux très mauvais conducteurs de l'électricité et la lumière qui se propage en ces milieux est constituée par des flux électriques transversaux périodiques.

L'hypothèse, assurément, est séduisante; elle se heurte cependant à de grandes difficultés.

En premier lieu, les équations obtenues n'excluent nullement la possibilité de flux électriques longitudinaux, dont le rôle sera difficile à expliquer.

En second lieu, et c'est l'objection la plus grave, selon la théorie précédente, dans un milieu très mauvais conducteur quelconque, les flux électriques transversaux se propagent toujours avec une vitesse égale à la vitesse de la lumière dans le vide; au contraire, dans un milieu transparent, la lumière se propage avec une vitesse qui caractérise ce milieu et qui est moindre que la vitesse de la lumière dans le vide; et l'on ne voit aucun moyen simple de modifier les hypothèses de la théorie précédente de telle manière que cette contradiction disparaisse.

Cette contradiction semble condamner irrémédiablement la théorie électromagnétique de la lumière proposée par L. Lorenz.

§ 3. *L'hypothèse fondamentale de Maxwell. — Polarisation électrodynamique des diélectriques*

Une différence logique extrêmement profonde sépare les hypothèses de B. Riemann, de L. Lorenz, de M. C. Neumann, des suppositions admises jusque-là sur la propagation des actions physiques.

La théorie de l'émission de la lumière représentait la propagation de la lumière comme la marche d'un projectile; ce qui se propageait, en cette théorie, c'était une substance.

La propagation du son se produit, au contraire, sans que la substance siège de cette propagation, l'air par exemple, subisse des déplacements notables; mais, tandis qu'une masse d'air, d'abord en mouvement, retombe au repos, une masse voisine, qui était en repos, se met en mouvement; dans ce cas, il y a propagation non d'une substance, mais d'un accident, d'un mouvement.

De ces deux types se rapprochent la plupart des théories physiques où intervient la notion de propagation. Dans la théorie des ondulations, la transmission de la lumière est la propagation d'un mouvement; et lorsque, adoptant les idées de Weber, Kirchhoff étudie la propagation de l'électricité dans les corps conducteurs, il la considère comme le flux d'une certaine substance.

On peut évidemment généraliser davantage encore et concevoir la propagation en un corps d'un accident qui ne serait pas un mouvement de ce corps, mais une qualité quelconque; pour un physicien qui regarde l'électricité comme n'étant ni un fluide, ni un mouvement, mais simplement une certaine qualité, les équations de Kirchhoff représentent une propagation de cette qualité au travers des corps conducteurs.

Mais toutes ces manières diverses de considérer la notion de propagation ont un caractère commun; substance ou accident, c'est quelque chose de réel qui disparaît d'une région de l'espace pour apparaître dans une région voisine. Il n'en est plus de même dans les théories de la propagation des actions électriques proposées par B. Riemann, par L. Lorenz, par M. Carl Neumann; ce n'est plus une réalité qui parcourt l'espace, mais une fiction, un symbole mathématique tel que la fonction potentielle ou les composantes de l'état électrotonique.

Ce caractère des nouvelles théories a peut-être été soupçonné par L. Lorenz; en tous cas, il a été clairement aperçu par M. Carl Neumann; mais celui-ci n'hésite pas à regarder la fonction potentielle dont il suppose la propagation comme une réalité : „ Potentiis datis, dit-il, datum esse potentiale, ac vice versa, potentiali dato, datas esse potentias, satis notum est. Unde apparet in traditam mechanices theoriam nil novi introduci statuendo, potentiale principalem esse causam, ab isto procreari potentias, scilicet potentiale vocare *veram causam motricem,* potentias vero tantummodo formam vel speciem exprimere ab illa causa sibi paratam. „ Ce passage permettrait, je crois, de regarder à juste titre M. Carl Neumann comme le créateur de la doctrine philosophique et scientifique qui a aujourd'hui si grande vogue sous le nom de doctrine de la migration de l'énergie (Wanderung der Energie).

Les idées de Maxwell n'ont rien de commun avec ces doctrines;

les symboles mathématiques ne se propagent pas; par exemple, la fonction potentielle électrostatique au point (x, y, z), à l'instant t, a pour expression, dans un milieu de pouvoir diélectrique K,

$$V(x, y, z, t) = \frac{1}{K} \sum \frac{q(x', y', z', t)}{r}$$

et non, comme le voudrait l'hypothèse de B. Riemann,

$$V(x, y, z, t) = \frac{1}{K} \sum \frac{1}{r} q\left(x', y', z', t - \frac{r}{a}\right).$$

Ce qui se propage, c'est une qualité réelle : dans les corps conducteurs, le flux de conduction, dans les corps diélectriques, le flux de déplacement.

La considération des corps diélectriques est, d'ailleurs, un des points essentiellement nouveaux de la théorie de Maxwell; ni B. Riemann, ni M. C. Neumann n'ont fait la moindre allusion à la polarisation des diélectriques; pour L. Lorenz, les corps isolants sont simplement des corps dont la résistance spécifique est très grande, des corps très mauvais conducteurs (*) et c'est au *flux de conduction* se propageant dans de semblables corps qu'il assimile les vibrations lumineuses.

Au contraire, pour Maxwell, la lumière qui se propage en des corps transparents consiste essentiellement en *flux de déplacement* produits au sein de corps diélectriques.

Ces flux de déplacement, nous le savons, produisent les mêmes actions pondéromotrices et électromotrices que les flux de conduction; mais leur génération est soumise à une autre loi, et l'invention de cette loi est une des idées les plus puissantes et les plus fécondes de Maxwell.

Dans un système où l'équilibre est établi, les composantes f, g, h

---

(*) La différence entre le point de vue de Maxwell et le point de vue de Lorenz a été fort bien marquée dans une note ajoutée par M. H. Valentinier aux œuvres scientifiques de ce dernier (L. Lorenz, *Œuvres scientifiques*, revues et annotées par H. Valentinier, tome I, p. 204, note 16).

du déplacement sont liées aux dérivées de la fonction potentielle électrostatique Ψ par les égalités [1[re] partie, égalités (102)]

$$f = -\frac{K}{4\pi}\frac{\partial\Psi}{\partial x}, \qquad g = -\frac{K}{4\pi}\frac{\partial\Psi}{\partial y}, \qquad h = -\frac{K}{4\pi}\frac{\partial\Psi}{\partial z}.$$

Dans un système qui n'est pas en équilibre, les égalités précédentes doivent être remplacées par celles-ci

$$(121) \qquad f = \frac{K}{4\pi} E_x, \qquad g = \frac{K}{4\pi} E_y, \qquad h = \frac{K}{4\pi} E_z,$$

où E_x, E_y, E_z sont les composantes du champ électromoteur total, aussi bien du champ d'induction que du champ statique.

Voyons cette idée découler naturellement des hypothèses admises par Maxwell touchant la constitution des diélectriques.

Nous avons reconnu, au cours de cette étude, que Maxwell se laissait presque constamment guider, dans ses suppositions touchant les diélectriques, par les hypothèses de Faraday et de Mossotti, conçues elles-mêmes à l'imitation des hypothèses magnétiques de Poisson. Selon ces hypothèses, un diélectrique est formé de petites masses conductrices, noyées dans un ciment isolant. L'action d'un champ électromoteur d'induction sur un diélectrique résultera donc des actions que ce champ exerce sur un grand nombre de conducteurs ouverts.

Or, en un conducteur ouvert, un champ électromoteur d'induction produit le même effet qu'un champ électromoteur statique; il oblige l'électricité à se distribuer de telle sorte que la charge positive s'accumule à l'une des extrémités du conducteur et la charge négative à l'autre extrémité; en d'autres termes, ce champ *polarise* le conducteur ouvert.

Maxwell insiste à plusieurs reprises au sujet de cette action qu'un champ d'induction exerce sur un conducteur ouvert.

« Considérons, écrit-il déjà dans son mémoire *On Faraday's Lines of Force* (*), un conducteur linéaire ne formant pas un circuit fermé; supposons que ce conducteur coupe des lignes de force

(*) J. Clerk Maxwell, Scientific Papers, vol. I, p. 186.

magnétique, soit par l'effet de son propre mouvement, soit par les variations du champ magnétique. Une force électromotrice agira dans la direction du conducteur; mais cette force ne pourra produire un courant, car le conducteur n'est pas fermé; elle produira une tension électrique aux extrémités du conducteur. „

De ce passage, Maxwell ne tire, pour le moment, aucune conclusion relative à la polarisation des diélectriques, à laquelle il ne s'attache guère en ce premier mémoire sur l'électricité; il en va autrement du mémoire : *On physical Lines of Force.*

“ L'expérience nous enseigne, y écrit-il (*), que la tension électrique est de même nature, qu'elle soit engendrée par l'électricité statique ou par l'électricité galvanique; une force électromotrice produite par le galvanisme, par exemple celle que fournit une bobine d'induction, peut charger une bouteille de Leyde. „

“... Si une différence de tension existe entre les diverses parties d'un corps, l'électricité passe ou tend à passer de la partie où la tension est la plus grande à la partie où elle est la plus faible. „

L'application de ces considérations aux petits corps conducteurs que renferme un diélectrique est immédiate; elle impose des conclusions que Maxwell énonce en ces termes (**) :

“ Lorsqu'une force électromotrice agit sur un diélectrique, elle produit un état de polarisation de ses particules semblables à la distribution de la polarité sur les particules du fer qu'on soumet à l'action d'un aimant; comme la polarisation magnétique, cet état de polarisation peut être figuré comme un état où chaque particule possède deux pôles de propriétés contraires. „

“ Lorsqu'un diélectrique est soumis à l'induction, nous pouvons concevoir que, dans chaque molécule, l'électricité est déplacée de manière à rendre positive une des extrémités et négative l'autre extrémité; mais l'électricité demeure liée en entier à chaque molécule et ne peut passer d'une molécule à une autre. „

“ L'effet de cette action sur la masse totale du diélectrique est de produire un déplacement général de l'électricité dans une certaine direction... La grandeur du déplacement dépend de la

(*) J. Clerk Maxwell, Scientific Papers, vol. I, p. 490.
(**) J. Clerk Maxwell, *loc. cit.*, p. 491.

nature du corps et de la force électromotrice; si h est le déplacement, R la force électromotrice et E un coefficient qui dépend de la nature du diélectrique, on a

$$R = -4\pi E^2 h \quad (*),$$

et si r est la valeur du courant électrique dû au déplacement

$$r = \frac{dh}{dt} \cdot \text{»}$$

Les mêmes idées se retrouvent, sous une forme encore plus nette, dans le mémoire : *A dynamical Theory of the electromagnetic Field.*

« Si un corps se meut au travers des lignes de force magnétique, il subit, écrit Maxwell (**), ce que l'on nomme une force électromotrice : les deux extrémités du corps tendent à prendre un état électrique opposé et un courant électrique tend à circuler au travers du corps. Si la force électromotrice est suffisamment puissante, et si elle s'exerce sur certains corps composés, elle les décompose, transporte l'un des composants à l'une des extrémités du corps et l'autre composant à l'autre extrémité. »

« Ces faits mettent en évidence une force ; cette force produit un courant, en dépit de la résistance; cette force communique des électrisations opposées aux deux extrémités du corps, créant un état que l'action de la force électromotrice est seule capable de maintenir ; au moment où cette force cesse d'agir, cet état tend, par une force égale et de sens contraire, à produire un contre-courant au travers du corps et à ramener celui-ci à son état électrique initial ; enfin, lorsque cette force est assez puissante, elle arrache les unes aux autres les parties d'un composé chimique et les charrie en des sens opposés, bien que ces parties aient une tendance naturelle à se combiner, et à se combiner précisément avec une énergie capable d'engendrer une force électromotrice de sens contraire. »

(*) Au sujet du signe du second membre, voir Iᵉ Partie, égalité (42).
(**) J. Clerk Maxwell, SCIENTIFIC PAPERS, vol. I, p. 530.

« Telle est donc la force à laquelle un corps se trouve soumis lorsqu'on le déplace dans un champ magnétique ou lorsque quelque changement se produit dans ce champ; cette force a pour effet ou bien de produire dans le corps un courant et un dégagement de chaleur; ou bien de décomposer le corps; ou bien enfin, si l'un et l'autre effet lui sont également impossibles, de mettre le corps dans un état de polarisation électrique; cet état de polarisation est un état de contrainte où les extrémités opposées du corps sont électrisées en sens contraire; aussitôt que la force perturbatrice est écartée, le corps réagit et, de lui-même, perd cet état. »

« ... Lorsqu'une force électromotrice agit en un circuit conducteur, elle produit un courant... Mais lorsqu'une force électromotrice agit en un diélectrique, elle produit un état de polarisation de ses parties... » et Maxwell, citant d'ailleurs Faraday et Mossotti dont il s'inspire visiblement, reproduit, au sujet de cette polarisation diélectrique, le passage du mémoire : *On physical Lines of Force* que nous avons cité plus haut.

Telles sont, dans leur suite naturelle, les inductions qui ont conduit Maxwell à poser les équations générales de la polarisation diélectrique (*)

$$(121) \qquad f = \frac{K}{4\pi} E_x, \qquad g = \frac{K}{4\pi} E_y, \qquad h = \frac{K}{4\pi} E_z.$$

Dans un milieu homogène, les composantes E_x, E_y, E_z du champ électromoteur sont données par les égalités (82), en sorte que les égalités (121) deviennent

$$(122) \qquad \begin{cases} f = -\dfrac{K}{4\pi}\left(\dfrac{\partial \Psi}{\partial x} + \dfrac{\partial F}{\partial t}\right), \\ g = -\dfrac{K}{4\pi}\left(\dfrac{\partial \Psi}{\partial y} + \dfrac{\partial G}{\partial t}\right), \\ h = -\dfrac{K}{4\pi}\left(\dfrac{\partial \Psi}{\partial z} + \dfrac{\partial H}{\partial t}\right). \end{cases}$$

(*) J. Clerk Maxwell, *A dynamical Theory of the electromagnetic Field*, (Scientifics Papers, vol. I, p. 560.) — *Traité d'Électricité et de Magnétisme*, vol. II, p. 287.

D'ailleurs, dans ce cas, les composantes du flux de déplacement ont pour valeurs

$$(3) \qquad \bar{u} = \frac{\delta f}{\delta t}, \qquad \bar{v} = \frac{\delta g}{\delta t}, \qquad \bar{w} = \frac{\delta h}{\delta t}.$$

On a donc

$$(123) \qquad \begin{cases} \bar{u} = -\dfrac{K}{4\pi}\dfrac{\delta}{\delta t}\left(\dfrac{\delta\Psi}{\delta x} + \dfrac{\delta F}{\delta t}\right), \\ \bar{v} = -\dfrac{K}{4\pi}\dfrac{\delta}{\delta t}\left(\dfrac{\delta\Psi}{\delta y} + \dfrac{\delta G}{\delta t}\right), \\ \bar{w} = -\dfrac{K}{4\pi}\dfrac{\delta}{\delta t}\left(\dfrac{\delta\Psi}{\delta z} + \dfrac{\delta H}{\delta t}\right). \end{cases}$$

Ces équations sont le fondement de la théorie électromagnétique de la lumière.

§ 4. *Première ébauche de la théorie électromagnétique de la lumière de Maxwell*

Toutefois, avant de développer une théorie électromagnétique de la lumière fondée sur ces équations, Maxwell avait obtenu les deux lois essentielles de cette théorie par une méthode toute différente. Cette méthode, intimement liée aux hypothèses mécaniques que renferme le mémoire : *On physical Lines of Force*, est exposée dans ce mémoire.

Nous avons vu (1re Partie, Chapitre III) comment, dans ce mémoire, Maxwell se représente l'action d'un champ électromoteur sur un diélectrique. La force électromotrice est assimilée à une traction qui s'exerce sur les parois parfaitement élastiques des cellules; si R est le champ électromoteur, les parois subissent un déplacement dans la direction de ce champ; la valeur moyenne par unité de volume de ce déplacement, que désigne la lettre h, est liée au champ électromoteur R par la relation [1re Partie, égalité (42bis)]

$$R = 4\pi E^2 h,$$

E^2 étant une quantité qui dépend de l'élasticité des parois cellulaires.

Sans discuter, au point de vue de la théorie de l'élasticité, la solution du problème traité par Maxwell, nous nous bornerons à indiquer la relation qui existe, selon lui, entre E^2 et les coefficients d'élasticité de la substance.

Maxwell exprime (*) E^2 en fonction de deux coefficients qu'il désigne par μ et m et que, pour éviter certaines confusions, nous désignerons par μ' et m; cette expression est la suivante :

$$(124) \qquad E^2 = \pi m \frac{9\mu'}{3\mu' + 5m}.$$

Le coefficient μ' est défini (**) comme le rapport de la pression à la contraction cubique dans un corps uniformément pressé; c'est donc l'inverse de ce qu'on nomme habituellement le coefficient de compressibilité cubique. Si nous désignons par Λ et M les coefficients que Lamé désigne par λ et μ, nous aurons (***)

$$(125) \qquad \mu' = \frac{3\Lambda + 2M}{3}.$$

Quant au coefficient m, en comparant (IV) les équations de Maxwell à celles de Lamé, on trouve de suite

$$(126) \qquad m = 2M.$$

En vertu des égalités (125) et (126), l'égalité (124) devient

$$(127) \qquad E^2 = \pi m \frac{3\Lambda + 2M}{\Lambda + 4M}.$$

(*) J. Clerk Maxwell, SCIENTIFIC PAPERS, vol. I, p. 495, égalité (107).

(**) J. Clerk Maxwell, *loc. cit.*, p. 493, égalité (80).— Pour mettre cette égalité d'accord avec le reste de l'exposé de Maxwell, il faut changer le signe du second membre.

(***) Lamé, *Leçons sur l'élasticité*, 2e édition, p. 74, égalité (*a*).

(IV) J. Clerk Maxwell, *loc. cit.*, p. 493, égalité (83) et Lamé, *loc. cit.*, p. 65, égalités (1).

Si l'on admet la théorie de l'élasticité moléculaire telle que l'a développée Poisson, on a comme l'on sait, l'égalité

(128) $$\Lambda = M,$$

et l'égalité (127) devient

(129) $$E^2 = \pi m$$

que Maxwell accepte (*) pour le développement ultérieur de sa théorie.

Selon cette théorie, deux charges électriques dont les valeurs en unités électromagnétiques sont q_1, q_2, se repoussent à une distance r avec une force [1re Partie, égalité (78)]

(130) $$F = E^2 \frac{q_1 q_2}{r^2},$$

E^2 ayant la valeur qui convient au diélectrique interposé.

Si ce diélectrique est le vide, la valeur de E^2 peut être demandée à la célèbre expérience de Weber et Kohlrausch; nous trouvons alors (**) que E est une grandeur de même espèce qu'une vitesse dont la valeur numérique est

(131) $$E = 310\,740 \times 10^6 \frac{\text{millimètre}}{\text{seconde}}.$$

Parvenu à ce point, Maxwell continue (***) en ces termes :

« Trouver la vitesse de propagation des vibrations transversales dans le milieu élastique qui forme les cellules, en supposant que l'élasticité est due entièrement à des forces agissant entre les molécules prises deux à deux (IV). »

(*) J. Clerk Maywell, *loc. cit.*, p. 495, égalité (108).

(**) J. Clerk Maxwell, *loc. cit.*, p. 499, égalité (131).

(***) J. Clerk Maxwell, *loc. cit.*, p. 499.

(IV) Par ces mots, Maxwell désigne la théorie moléculaire de Poisson.

« Par la méthode ordinaire, on sait que

$$V = \sqrt{\frac{m}{\rho}}, \tag{132}$$

m désignant le coefficient d'élasticité transversale et ρ la densité. »

La densité qui doit figurer dans cette formule, c'est la densité du milieu élastique qui forme les parois des cellules; sans avertir de cette transposition, Maxwell suppose que ρ désigne la densité du fluide qui remplit les cellules et il admet alors la relation

$$\mu = \pi\rho \tag{133}$$

qu'il a été amené à établir (*) entre cette densité et la perméabilité magnétique μ. Il trouve alors

$$\mu V^2 = \pi m$$

ou, en vertu de l'égalité (129),

$$E = V\sqrt{\mu}. \tag{134}$$

Il commente (**) en ces termes ce résultat :

« Dans l'air ou le vide, $\mu = 1$ et, par conséquent,

$$\begin{aligned} V &= E \\ &= 310\,740 \times 10^6 \text{ millimètres par seconde} \\ &= 193\,088 \text{ milles par seconde.} \end{aligned}$$

« La vitesse de la lumière dans l'air, déterminée par M. Fizeau, est de 70 843 lieues par seconde (25 lieues au degré) ce qui donne

$$\begin{aligned} V &= 314\,858 \times 10^6 \text{ millimètres par seconde} \\ &= 195\,647 \text{ milles par seconde.} \end{aligned}$$

« La vitesse de propagation des ondulations transversales dans notre milieu hypothétique, calculée d'après les expériences électromagnétiques de MM. Kohlrausch et Weber, concorde si exactement avec la vitesse de la lumière calculée au moyen des expériences optiques de M. Fizeau, qu'il nous serait difficile de ne

(*) J. Clerk Maxwell, *loc. cit.*, pp. 456 et 457.
(**) J. Clerk Maxwell, *loc. cit.*, pp. 499 et 500.



point faire cette supposition : *La lumière consiste en ondulations transversales de ce même milieu qui est la cause des phénomènes électriques et magnétiques.* „

La capacité d'un condensateur plan de surface S, dont les armatures sont séparées par une épaisseur θ d'un diélectrique donné 1, a pour valeur [Iᵉ Partie, égalité (87)]

$$C_1 = \frac{1}{4\pi E_1^2} \frac{S}{\theta}.$$

Si l'espace compris entre les deux armatures du condensateur est vide, ce condensateur a, de même, pour capacité

$$C = \frac{1}{4\pi E^2} \frac{S}{\theta}.$$

Le rapport

$$D_1 = \frac{C_1}{C}$$

est, par définition, le pouvoir inducteur spécifique du diélectrique 1. On a donc

$$D_1 = \frac{E^2}{E_1^2}$$

ou bien, en vertu de l'égalité (134),

(135) $$D_1 = \frac{V^2}{V_1^2} \frac{1}{\mu_1}.$$

“ En sorte (*) que le pouvoir inducteur d'un diélectrique est directement proportionnel au carré de l'indice de réfraction et en raison inverse du pouvoir inducteur magnétique. „

Ainsi, dès 1862, avant que la note de Bernhard Riemann ait été publiée, alors que les théories de L. Lorenz et de M. C. Neumann n'étaient point encore conçues, Maxwell était déjà en possession des lois essentielles de la théorie électromagnétique de la lumière. Malheureusement, la méthode par laquelle il y était parvenu, très

(*) J. Clerk Maxwell, *loc. cit.*, p. 501.

différente de celle qu'il a proposée depuis, était viciée par une grave erreur matérielle. En vertu de l'égalité (126), l'égalité (132) deviendrait

$$V = \sqrt{\frac{2M}{\rho}},$$

formule inexacte à laquelle on doit substituer l'égalité (*)

$$V = \sqrt{\frac{M}{\rho}}.$$

§ 5. *Forme définitive de la théorie électromagnétique de la lumière de Maxwell*

Deux fois Maxwell a exposé, avec des variantes de détail, la théorie électromagnétique de la lumière sous une forme précise et exempte d'hypothèses mécaniques : une première fois (**), dans le mémoire : *A dynamical Theory of the electromagnetic Field;* une seconde fois (***), dans le *Traité d'Électricité et de Magnétisme.*

Prenons le système des six équations de Maxwell

$$(31)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\delta\gamma}{\delta y} - \frac{\delta\beta}{\delta z} &= -\ 4\pi\,(u + \bar{u}),\\ \frac{\delta\alpha}{\delta z} - \frac{\delta\gamma}{\delta x} &= -\ 4\pi\,(v + \bar{v}),\\ \frac{\delta\beta}{\delta x} - \frac{\delta\alpha}{\delta y} &= -\ 4\pi\,(w + \bar{w}),\end{aligned}\right.$$

$$(80^{bis})\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\delta H}{\delta y} - \frac{\delta G}{\delta z} &= -\ \mu\alpha,\\ \frac{\delta F}{\delta z} - \frac{\delta H}{\delta x} &= -\ \mu\beta,\\ \frac{\delta G}{\delta x} - \frac{\delta F}{\delta y} &= -\ \mu\gamma.\end{aligned}\right.$$

(*) Lamé, *loc. cit.*, p. 142, égalité (9).

(**) J. Clerk Maxwell, Scientific Papers, vol. I, pp. 577 à 588.

(***) J. Clerk Maxwell, *Traité d'Électricité et de Magnétisme*, trad. française, t. II, pp. 485 à 504.

Posons

$$(81^{bis}) \qquad \frac{\delta F}{\delta x} + \frac{\delta G}{\delta y} + \frac{\delta H}{\delta z} = J$$

et supposons le milieu homogène. Nous obtiendrons sans peine les trois égalités

$$(136) \qquad \left\{ \begin{aligned} \Delta F &= \frac{\delta J}{\delta x} - 4\pi\mu\,(u + \bar{u}), \\ \Delta G &= \frac{\delta J}{\delta y} - 4\pi\mu\,(v + \bar{v}), \\ \Delta H &= \frac{\delta J}{\delta z} - 4\pi\mu\,(w + \bar{w}). \end{aligned} \right.$$

Ces équations sont générales. Supposons maintenant le milieu non conducteur, mais diélectrique; nous aurons

$$u = 0, \qquad v = 0, \qquad w = 0,$$

tandis que $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ seront donnés par les égalités (123). Dès lors, les égalités (136) deviendront

$$(137) \qquad \left\{ \begin{aligned} \Delta F - K\mu \frac{\delta^2 F}{\delta t^2} &= \frac{\delta J}{\delta x} + K\mu \frac{\delta^2 \Psi}{\delta x\, \delta t}, \\ \Delta G - K\mu \frac{\delta^2 G}{\delta t^2} &= \frac{\delta J}{\delta y} + K\mu \frac{\delta^2 \Psi}{\delta y\, \delta t}, \\ \Delta H - K\mu \frac{\delta^2 H}{\delta t^2} &= \frac{\delta J}{\delta z} + K\mu \frac{\delta^2 \Psi}{\delta z\, \delta t}. \end{aligned} \right.$$

Jointes aux égalités (80bis), ces relations nous donnent, en premier lieu, les égalités

$$(138) \qquad \left\{ \begin{aligned} \Delta\alpha - K\mu \frac{\delta^2 \alpha}{\delta t^2} &= 0, \\ \Delta\beta - K\mu \frac{\delta^2 \beta}{\delta t^2} &= 0, \\ \Delta\gamma - K\mu \frac{\delta^2 \gamma}{\delta t^2} &= 0. \end{aligned} \right.$$

Ces trois équations, dont la forme est bien connue, nous enseignent que dans un diélectrique homogène, les trois composantes α, β, γ du champ magnétique, lesquelles, selon les égalités (80bis), vérifient la relation

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \beta} + \frac{\partial \gamma}{\partial z} = 0 \tag{139}$$

qui caractérise les composantes d'une vibration transversale, se propagent avec une vitesse

$$V = \sqrt{\frac{1}{K\mu}}. \tag{140}$$

La suite des déductions de Maxwell est différente dans le mémoire : *A dynamical Theory of the electromagnetic Field* et dans le *Traité d'Électricité et de Magnétisme;* attachons-nous d'abord aux raisonnements exposés dans ce dernier, qui sont plus corrects.

Différentions la première égalité (137) par rapport à x, la seconde par rapport à y, la troisième par rapport à z et ajoutons membre à membre les résultats obtenus en tenant compte de l'égalité (81bis); nous trouvons

$$K\mu \left(\frac{\partial}{\partial t} \Delta \Psi + \frac{\partial^2 J}{\partial t^2} \right) = 0. \tag{141}$$

D'autre part, l'égalité (103) de la Ire Partie nous enseigne que, dans un milieu homogène, la densité électrique e est donnée par l'égalité

$$K \Delta \Psi + 4\pi e = 0. \tag{142}$$

Enfin, l'égalité

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial e}{\partial t} = 0 \tag{19}$$

nous montre que l'on a, dans un milieu non conducteur où

$$u = 0, \qquad v = 0, \qquad w = 0,$$

l'égalité

$$\frac{\delta e}{\delta t} = 0. \tag{143}$$

Les égalités (141), (142) et (143) donnent

$$\frac{\delta^2 J}{\delta t^2} = 0. \tag{144}$$

" Donc (*) J doit être une fonction linéaire de t, ou une constante, ou zéro, et nous pouvons ne tenir compte ni de J, ni de Ψ, si nous considérons des perturbations périodiques „. Et les équations (137) deviennent, selon Maxwell (**),

$$\left\{\begin{aligned} \Delta F - K\mu \frac{\delta^2 F}{\delta t^2} &= 0, \\ \Delta G - K\mu \frac{\delta^2 G}{\delta^2 t} &= 0, \\ \Delta H - K\mu \frac{\delta^2 H}{\delta t^2} &= 0. \end{aligned}\right. \tag{145}$$

La phrase de Maxwell que nous avons citée, exacte en ce qui concerne la fonction J, ne l'est pas pour la fonction Ψ; mais, sans s'écarter beaucoup de la pensée essentielle de Maxwell, on pourrait raisonner de la manière suivante :

Différentions deux fois les égalités (137) par rapport à t et tenons compte de l'égalité (144) et de l'égalité

$$\frac{\delta}{\delta t} \Delta\Psi = 0,$$

qui découle des égalités (142) et (143) et qui donne

$$\Delta \frac{\delta^2\Psi}{\delta x\, \delta t} = 0, \qquad \Delta \frac{\delta^2\Psi}{\delta y\, \delta t} = 0, \qquad \Delta \frac{\delta^2\Psi}{\delta z\, \delta t} = 0.$$

(*) J. Clerk Maxwell, *Traité d'Électricité et de Magnétisme*, t. II, p. 488.
(**) J. Clerk Maxwell, *loc. cit.*, p. 488, équations (9).

Nous pourrons écrire les résultats obtenus

$$\Delta \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial t}\right) - K\mu \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial t}\right) = 0,$$

$$\Delta \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial t}\right) - K\mu \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial t}\right) = 0,$$

$$\Delta \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial z} + \frac{\partial H}{\partial t}\right) - K\mu \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial z} + \frac{\partial H}{\partial t}\right) = 0$$

ou bien, en vertu des égalités (123),

$$(146) \qquad \left\{\begin{array}{l} \Delta\bar{u} - K\mu \dfrac{\partial^2\bar{u}}{\partial t^2} = 0, \\ \Delta\bar{v} - K\mu \dfrac{\partial^2\bar{v}}{\partial t^2} = 0, \\ \Delta\bar{w} - K\mu \dfrac{\partial^2\bar{w}}{\partial t^2} = 0. \end{array}\right.$$

D'ailleurs, en vertu de l'égalité (25), dans un milieu non conducteur où

$$u = 0, \qquad v = 0, \qquad w = 0,$$

les composantes $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$, du flux de déplacement vérifient l'égalité

$$(147) \qquad \frac{\partial\bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial\bar{y}}{\partial v} + \frac{\partial\bar{w}}{\partial z} = 0.$$

Donc, dans un milieu non conducteur, les flux de déplacement sont des flux transversaux qui se propagent avec la vitesse

$$(140) \qquad V = \sqrt{\frac{1}{K\mu}}.$$

L'analyse précédente repose essentiellement sur l'emploi des égalités (19) et (25), conséquences naturelles de la *troisième électro-*

statique de Maxwell; on ne pouvait donc s'attendre à la rencontrer dans le mémoire : *A dynamical Theory of the electromagnetic Field;* elle y est remplacée par une autre analyse qu'il serait moins aisée de rendre exacte.

Maxwell détermine une fonction χ, analogue à la fonction χ, donnée par l'égalité (108), qu'il a considérée plus tard dans son *Traité*, telle que

$$\Delta\chi = J \tag{148}$$

Il pose

$$\left\{\begin{aligned} F &= F' + \frac{\partial\chi}{\partial x}, \\ G &= G' + \frac{\partial\chi}{\partial y}, \\ H &= H' + \frac{\partial\chi}{\partial z}. \end{aligned}\right. \tag{109}$$

Les égalités (81bis), (148) et (109) donnent visiblement

$$\frac{\partial F'}{\partial x} + \frac{\partial G'}{\partial y} + \frac{\partial H'}{\partial z} = 0, \tag{149}$$

en sorte que F', G', H' peuvent être regardés comme la *partie transversale de l'état électrotonique* dont F, G, H sont les composantes.

Moyennant les égalités (109), les égalités (137) deviennent

$$\left\{\begin{aligned} \Delta F' - K\mu \frac{\partial^2 F'}{\partial t^2} &= K\mu \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial t} + \frac{\partial^2\chi}{\partial t^2}\right), \\ \Delta G' - K\mu \frac{\partial^2 G'}{\partial t^2} &= K\mu \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial t} + \frac{\partial^2\chi}{\partial t^2}\right), \\ \Delta H' - K\mu \frac{\partial^2 H'}{\partial t^2} &= K\mu \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial t} + \frac{\partial^2\chi}{\partial t^2}\right). \end{aligned}\right. \tag{150}$$

Différentions respectivement ces égalités par rapport à x, y et z et ajoutons membre à membre les résultats obtenus en tenant compte de l'égalité (149); nous trouvons

$$\Delta\left(\frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2}\right) = 0. \tag{151}$$

Maxwell fait ce calcul (*); mais au lieu d'en conclure l'égalité (151), il en conclut, ce qui n'est point légitime, l'égalité

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = 0. \tag{152}$$

Faisant usage de cette égalité (152), il transforme les égalités (150) en

$$(153)\quad \left\{\begin{aligned} \Delta F' - K\mu \frac{\partial^2 F'}{\partial t^2} &= 0, \\ \Delta G' - K\mu \frac{\partial^2 G'}{\partial t^2} &= 0, \\ \Delta H' - K\mu \frac{\partial^2 H'}{\partial t^2} &= 0. \end{aligned}\right.$$

La partie transversale de l'état électrotonique se propage avec une vitesse

$$V = \sqrt{\frac{1}{K\mu}}. \tag{140}$$

D'ailleurs, les égalités (148) et (152) donnent

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta \Psi + \frac{\partial^2 J}{\partial t^2} = 0$$

et comme $\Delta\Psi$ est, dans un milieu homogène, proportionnel [1re Partie, égalités (57) et (57bis)] à la densité e de l'électricité libre,

(*) J. Clerk Maxwell, Scientific Papers, vol. I, p. 581, égalité (77).

$\frac{\delta^2 J}{\delta t^2}$ se trouve être proportionnel à $\frac{\delta e}{\delta t}$. „ Comme le milieu est un isolant parfait, dit Maxwell (*), la densité e de l'électricité libre est invariable „ ; cette affirmation ne découle point logiquement de l'électrostatique admise dans le mémoire : *A dynamical Theory of the electromagnetic Field;* Maxwell s'y tient cependant, admet que $\frac{\delta^2 J}{\delta t^2}$ est forcément nul et en conclut qu'une perturbation électrique périodique ne peut correspondre à une valeur de J différente de 0.

La seconde électrostatique de Maxwell se prête donc moins bien au développement de la théorie électromagnétique de la lumière que la troisième électrostatique du même auteur.

Il est deux points sur lesquels s'accordent (**) toutes les électrostatiques de Maxwell.

En premier lieu, deux charges électriques q_1, q_2, placées à une distance r l'une de l'autre au sein d'un certain diélectrique 1, se repoussent avec une force [1re Partie, égalités (78) et (83)]

$$F = \frac{1}{K_1} \frac{q_1 q_2}{r^2}.$$

En second lieu, un condensateur plan dont les plateaux d'aire S sont séparés par une épaisseur θ du même diélectrique a une capacité [1re Partie, égalité (87)]

$$C = \frac{K_1}{4\pi} \frac{S}{\theta}.$$

Ces deux égalités, jointes à l'égalité (140), redonnent immédiatement ces deux lois, déjà obtenues par Maxwell, en son mémoire : *On physical Lines of Force :*

(*) J. Clerk Maxwell, Scientific Papers, vol. I, p. 582.

(**) Pour reconnaître cet accord, il faut se souvenir que la même quantité se nomme K dans le *Traité d'Électricité et de Magnétisme* et ici même, $\frac{1}{E^2}$ dans le mémoire : *On physical Lines of Force* et $\frac{4\pi}{K}$ dans le mémoire : *A dynamical Theory of the electromagnetic Field.*

1re Loi. *Dans le vide, les courants de déplacement transversaux se propagent avec la même vitesse que la lumière.*

2me Loi. *Le pouvoir inducteur spécifique par rapport au vide est lié aux vitesses de propagation* V_1 *et* V *des flux de déplacement transversaux dans ce diélectrique et dans le vide, et à la perméabilité magnétique* μ_1 *du diélectrique par la relation*

$$D_1 = \frac{V^2}{V_1^2}\frac{1}{\mu_1}. \qquad (135)$$

Ce sont les deux lois essentielles de la théorie électromagnétique de la lumière.

CONCLUSION

La théorie électromagnétique de la lumière relie d'une manière si heureuse deux disciplines jusque là distinctes, elle satisfait si pleinement au besoin, souvent manifesté par les physiciens, de rapprocher l'optique de la doctrine électrique, que bien peu de personnes consentiraient aujourd'hui à la tenir pour nulle et non avenue.

D'autre part, à moins d'être aveuglé par une admiration de parti pris, on ne saurait méconnaître les illogismes et les incohérences qui rendent inacceptables à un esprit juste les raisonnements de Maxwell; ces illogismes, ces incohérences, ne sont d'ailleurs pas, dans l'œuvre du physicien anglais, des défauts de minime importance et faciles à corriger; d'illustres géomètres ont cherché à mettre de l'ordre dans cette œuvre et ont dû y renoncer.

Quel parti prendre puisqu'on ne saurait se résoudre ni à accorder une valeur démonstrative aux raisonnements de Maxwell, ni à renoncer à la théorie électromagnétique de la lumière ?

Beaucoup de physiciens penchent aujourd'hui pour un parti qui a été adopté par O. Heaviside (*), par Hertz (**), par Cohn (***)

(*) O. Heaviside. *On the electromagnetic Wawe-surface* (PHILOSOPHICAL MAGAZINE, 5e série, vol. XIX, p. 397; 1885. — HEAVISIDE'S ELECTRICAL PAPERS, vol. II, p. 8). — *On electromagnetic Wawes, especially in Relation to the Vorticity of the impressed Forces; and the forced Vibrations of electromagnetic Systems* (PHILOSOPHICAL MAGAZINE, 5e série, vol. XXV, p. 130; 1888. — ELECTRICAL PAPERS, vol. II, p. 375).

(**) H. Hertz. *Ueber die Grundgleichungen der Elektrodynamik für ruhende Körper* (WIEDEMANN'S ANNALEN. Bd. XL, p. 577; 1890. — *Untersuchungen über die Ausbreitung der elektrischen Kraft*, p. 208; 1894).

(***) Cohn. *Zur Systematik der Elektricitätslehre* (WIEDEMANN'S ANNALEN, Bd. XL, p. 625; 1890).

et dont Hertz (*) a nettement formulé le principe et revendiqué la légitimité :

Puisque les raisonnements et les calculs par lesquels Maxwell développe sa théorie de l'électricité et du magnétisme sont à chaque instant compromis par des contradictions non pas accidentelles, non pas aisées à corriger, mais essentielles et inséparables de l'ensemble de l'œuvre, laissons de côté ces raisonnements et ces calculs. Prenons simplement les équations auxquelles ils ont conduit Maxwell et, sans souci des procédés par lesquels ces équations ont été obtenues, acceptons-les comme des hypothèses fondamentales, comme des postulats sur lesquels nous ferons reposer l'édifice entier des théories électriques. Nous garderons ainsi, sinon toutes les pensées qui ont agité l'esprit de Maxwell, du moins tout ce qu'il y a d'essentiel et d'indestructible dans ces pensées, car " ce qu'il y a d'essentiel dans les théories de Maxwell, ce sont les équations de Maxwell. "

A-t-on le droit de laisser de côté à la fois les anciennes théories électriques et les théories nouvelles par lesquelles Maxwell est arrivé à ces équations et de prendre purement et simplement ces équations comme point de départ d'une doctrine nouvelle ?

Un algébriste a toujours le droit de prendre un groupe quelconque d'équations et de combiner ces équations entre elles selon les règles du calcul. Les lettres que liaient certaines relations seront impliquées dans d'autres relations algébriquement équivalentes aux premières.

Mais un physicien n'est pas un algébriste; une équation ne porte pas simplement, pour lui, sur des lettres; ces lettres symbolisent des grandeurs physiques qui doivent être ou mesurables expérimentalement, ou formées d'autres grandeurs mesurables. Si donc on se contente de donner à un physicien une équation, on ne lui enseigne rien du tout; il faut, à cette équation, joindre l'indication des règles par lesquelles on fera correspondre les lettres sur lesquelles porte l'équation aux grandeurs physiques qu'elles représentent. Or, ces règles, ce qui les fait connaître,

(*) H. Hertz. *Untersuchungen über die Ausbreitung der elektrischen Kraft. Einleitende Uebersicht*, p. 21.

c'est l'ensemble des hypothèses et des raisonnements par lesquels on est parvenu aux équations en question; c'est la *théorie* que ces équations résument sous forme symbolique : *en physique, une équation, détachée de la théorie qui y a conduit, n'a aucun sens.*

Selon H. Hertz, des théories sont identiques lorsqu'elles conduisent aux mêmes équations. " A cette question (*) : " Qu'est-ce que la théorie de Maxwell? " je ne connais aucune réponse plus brève et plus précise que celle-ci : " La théorie de Maxwell, c'est le système des équations de Maxwell. " Toute théorie qui conduit aux mêmes équations, et, par conséquent, embrasse le même ensemble de phénomènes possibles, je la regarderai comme une forme ou un cas particulier de la théorie de Maxwell; toute théorie qui conduit à d'autres équations, et par conséquent, fait prévoir la possibilité d'autres phénomènes sera pour moi une autre théorie. "

Ce criterium ne saurait suffire à juger l'équivalence de deux théories; pour qu'elles soient équivalentes, il ne suffit pas que les équations qu'elles proposent soient littéralement identiques; il faut encore que les lettres qui figurent dans ces équations représentent des grandeurs liées de la même manière aux quantités mesurables; et pour s'assurer de ce dernier caractère, il ne suffit pas de comparer les équations, il faut comparer les raisonnements et les hypothèses qui constituent les deux théories.

On ne peut donc adopter les équations de Maxwell que si l'on y parvient comme conséquence d'une théorie sur les phénomènes électriques et magnétiques; et comme ces équations ne s'accordent pas avec la théorie classique issue des travaux de Poisson, force sera de rejeter cette théorie classique, de rompre avec la doctrine traditionnelle, et de créer avec des notions nouvelles, sur des hypothèses nouvelles, une théorie nouvelle de l'électricité et du magnétisme.

C'est ce qu'a fait M. Boltzmann.

(*) H. Hertz, *Abhandlungen über die Ausbreitung der elektrischen Kraft. Einleitende Uebersicht*, p. 23.

Dans un livre publié de 1891 à 1893 (*), il a tenté un prodigieux effort pour oublier les doctrines que nous enseignent la tradition et l'usage et pour construire, au moyen de conceptions toutes nouvelles, un système où les équations de Maxwell soient logiquement enchaînées.

On ne saurait nier, en effet, que cet ouvrage n'établisse un lien irréprochable entre les diverses équations écrites par Maxwell en son *Traité d'Électricité et de Magnétisme.* Les contradictions et les paralogismes dont Maxwell s'était plu, trop souvent, à semer la voie qui mène à ces équations ont été soigneusement écartés. Est-ce à dire que la théorie ainsi construite ne prête plus le flanc à aucune critique et satisfasse à tous les désirs des physiciens ? Il s'en faut de beaucoup. Ainsi l'électrostatique de M. L. Boltzmann n'est autre chose que la troisième électrostatique de Maxwell; comme cette dernière, elle ne paraît point s'accorder avec les actions que les conducteurs électrisés exercent sur les diélectriques; le magnétisme, imité des Mémoires de Maxwell, ne semble pas susceptible de s'identifier aux doctrines fécondes de Poisson, de F. Neumann, de W. Thomson, de G. Kirchhoff, doctrines que Maxwell lui-même avait reprises dans son *Traité.*

Si donc, pour parvenir d'une manière logique aux équations de Maxwell, nous suivons les méthodes proposées par M. L. Boltzmann, nous nous voyons contraints d'abandonner en partie l'œuvre de Poisson et de ses successeurs sur la distribution de l'électricité et du magnétisme, c'est-à-dire l'une des parties les plus précises et les plus utiles de la physique mathématique.

D'autre part, pour sauver ces théories, devons-nous renoncer à toutes les conséquences de la doctrine de Maxwell, et, en particulier, à la plus séduisante de ces conséquences, à la théorie électromagnétique de la lumière ? Comme le remarque quelque part M. Poincaré, il serait difficile de s'y résoudre.

Enfermés en ce dilemne : ou bien abandonner la théorie tradi-

---

(*) L. Boltzmann, *Vorlesungen über Maxwell's Theorie der Elektricität und des Lichtes. Ier Theil : Ableitung der Grundgleichungen für ruhende, homogene, isotrope Körper. — IIe Theil : Verhaltniss zur Fernwirkungs-theorie; specielle Falle der Elektrostatik, stationaren Strömung und Induction.* Leipzig, 1891-1893.

tionnelle de la distribution électrique et magnétique, ou bien renoncer à la théorie électromagnétique de la lumière, les physiciens ne peuvent-ils adopter un tiers parti? Ne peuvent-ils imaginer une doctrine où se concilieraient logiquement l'ancienne électrostatique, l'ancien magnétisme et la doctrine nouvelle de la propagation des actions électriques au sein des milieux diélectriques ?

Cette doctrine existe; elle est l'une des plus belles œuvres de Helmholtz (*); prolongement naturel des doctrines de Poisson, d'Ampère, de Weber et de Neumann, elle conduit logiquement des principes posés au commencement du XIXe siècle aux conséquences les plus séduisantes des théories de Maxwell, des lois de Coulomb à la théorie électromagnétique de la lumière; sans perdre aucune des récentes conquêtes de la science électrique, elle rétablit la continuité de la tradition.

(*) Helmholtz. *Ueber die Bewegungsgleichungen der Elektrodynamik für ruhende leitende Körper* (BORCHARDT'S JOURNAL FUR REINE UND ANGEWANDTE MATHEMATIK, Bd. LXXII, p. 57, 1870. — WISSENSCHAFTLICHE ABHANDLUNGEN, Bd. I, p. 543).

TABLE DES MATIÈRES

DEUXIÈME PARTIE

L'Électrodynamique de Maxwell.

FIN DE LA SECONDE PARTIE

TABLE DES MATIÈRES

PREMIÈRE PARTIE

DOCUMENTS ET COMPTES RENDUS

COMMUNICATIONS DIVERSES